MASTER 1 ET MAGISTÈRE 2 DE
PHYSIQUE FONDAMENTALE

Mécanique des fluides

EXAMEN DU JEUDI 3 NOVEMBRE 2016
(Durée : 3 heures - sans document)

Important : rendre les deux problèmes sur des copies séparées.
Reporter votre numéro d'anonymat sur chacune des deux copies.

Problème 1 : Ecoulement de recirculation dans une couche d'huile

On considère un récipient rectangulaire rempli d'une huile, de densité ρ et de viscosité dynamique η, à la surface de laquelle est imposé un courant d'air (figure 1). On note L la longueur du récipient selon x, et h_m la profondeur moyenne selon z, telle que $h_m \ll L$ (la direction transverse, selon y, est supposée grande, et n'interviendra pas dans ce problème). On suppose que le courant d'air impose à la surface de l'huile une contrainte tangentielle $\sigma > 0$ constante ; l'interface étant quasiment horizontale, cette contrainte s'identifie avec la composante σ'_{xz} du tenseur de contrainte.

Du fait de cette contrainte, un écoulement de gauche à droite va s'établir près de la surface de l'huile, qui va être compensé au fond du récipient par un contre-écoulement de droite à gauche. Le but de ce problème est de montrer que cette circulation va induire une légère inclinaison de la surface du liquide, et d'obtenir l'expression de la hauteur de la surface $z = h(x)$ en fonction de la contrainte imposée σ. On note p_0 la pression atmosphérique au-dessus du bain liquide, g la gravité, et l'on néglige les effets de la tension de surface.

Application numérique : $L = 1$ m, $h_m = 30$ mm, $\rho = 1.2\ 10^3$ kg m^{-3}, $\eta = 0.03$ Pa s, $\sigma = 0.1$ N m^{-2}.

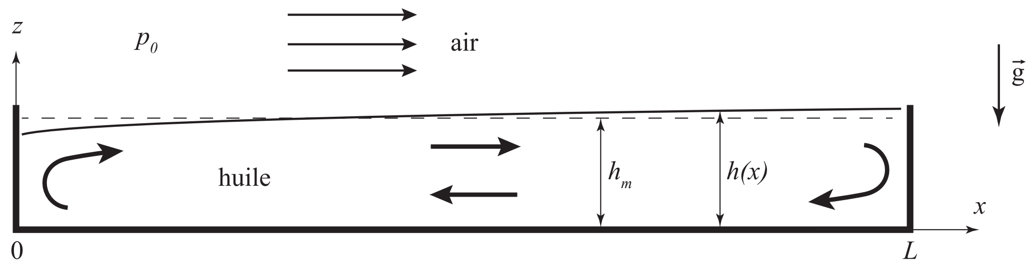

FIGURE 1 – Ecoulement dans un bain d'huile induit par une contrainte de surface due à un écoulement d'air.

1. Estimer le temps caractéristique τ_v de diffusion visqueuse sur l'épaisseur de la couche d'huile. Dans toute la suite on considèrera des temps très supérieurs à τ_v, pour lesquels l'écoulement induit par la contrainte à la surface est stationnaire.

2. Quelles conditions aux limites s'appliquent au liquide en $z = 0$ et en $z = h(x)$?
3. Ecrire l'équation de Navier-Stokes pour les composantes (u_x, u_z) de la vitesse. Sous quelle condition sur le nombre de Reynolds peut-on négliger le terme non-linéaire ? on supposera cette condition satisfaite dans la suite.
4. On se place loin des parois verticales (en $x = 0$ et en $x = L$), et l'on suppose que la différence de hauteur $h(L) - h(0)$ reste très faible comparée à la hauteur moyenne h_m. Dans ces conditions, on peut considérer que l'écoulement est purement horizontal. En déduire la pression dans le fluide, $p(x, z)$, en fonction p_0, ρ, g et $h(x)$.
5. Montrer que la vitesse horizontale satisfait l'équation
$$\rho g h'(x) = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2},$$
où $h'(x) = \partial h/\partial x$. Intégrer cette équation selon z et, en tenant compte des conditions aux limites, en déduire le profil de vitesse $u_x(x, z)$ en fonction de σ, ρ, η, g, $h(x)$, $h'(x)$ et z.
6. Que vaut le débit $Q(x)$ à travers un plan vertical d'abscisse x ? En déduire une équation différentielle reliant $h(x)$ à σ.
7. Intégrer cette équation différentielle, et montrer que la hauteur de la surface s'écrit
$$h(x) = \sqrt{h_0^2 + \frac{3\sigma}{\rho g} x},$$
où $h_0 = h(0)$.
8. En déduire le profil de vitesse sous la forme
$$u_x(x, z) = U_s(x) \left[3 \left(\frac{z}{h(x)} \right)^2 - 2 \left(\frac{z}{h(x)} \right) \right],$$
où $U_s(x)$ est la vitesse du liquide à la surface $z = h(x)$, que l'on exprimera en fonction de σ, de h et de η. Calculer l'ordre de grandeur de U_s.
9. Dessiner le profil de vitesse dans le liquide (on fera en particulier apparaître les hauteurs z telles que u_x est nul ou extrémal).

Question hors barême : Calculer la contrainte au fond du récipient en fonction de σ. Pourquoi ne retrouve-t-on pas la même contrainte qu'à la surface ?

Problème 2 : Rendement d'une éolienne

On s'intéresse dans ce problème à l'aérodynamique et au rendement énergétique d'une éolienne. On considère une éolienne tripale (figure 2), constituée de pales de rayon R, placée face à un vent u_0 supposé uniforme et constant loin en amont de l'éolienne. Sous l'effet du vent, l'éolienne tourne avec une vitesse angulaire Ω. On note p_0 la pression atmosphérique, ρ la masse volumique et η la viscosité dynamique de l'air.

Pour les applications numériques on prendra $\rho = 1,2$ kg/m^3, $\eta = 15 \times 10^{-6}$ Pa·s, $R = 30$ m, $\Omega = 1$ rad/s et $u_0 = 10$ m/s.

A. Analyse qualitative

1. L'émission sonore d'une éolienne augmente très fortement lorsque le nombre de Mach, calculé à partir de la vitesse de l'extrémite d'une pale (dans l'air supposé immobile), approche la valeur 1. Calculer le nombre de Mach dans ce problème, et conclure (vitesse du son dans l'air : $c \simeq 330$ m/s).

FIGURE 2 – Une éolienne tripale.

2. Montrer que le flux d'énergie cinétique par unité de temps à travers la surface balayée par les pales s'écrit
$$P_e = \frac{\pi}{2}\rho u_0^3 R^2. \quad (1)$$
Ce flux correspond à la puissance entrante, et donc en théorie à la puissance maximale qui pourrait être récupérée par l'éolienne. Faire l'application numérique (A.N.).
3. On note P la puissance effectivement récupérée par l'éolienne, et on introduit son rendement aérodynamique : $\xi = P/P_e \leq 1$. En supposant que P soit fonction de u_0, R, Ω, ρ, η, montrer par analyse dimensionnelle que ce rendement peut s'écrire sous la forme
$$\xi = f(Re, St), \quad (2)$$
où Re et St sont un nombre de Reynolds et de Strouhal, que l'on identifiera en fonction des paramètres du problème.
4. On souhaite fabriquer une maquette de l'éolienne fonctionnant dans l'eau, avec un rayon $R_m = 15$ cm ($\eta_{eau} = 10^{-3}$ Pa·s et $\rho_{eau} \simeq 10^3$ kg/m^3). Quelles sont les conditions sur la vitesse de l'eau u_m et la vitesse de rotation Ω_m pour que l'écoulement autour de la maquette soit similaire à celui de l'éolienne ? Faire l'A.N. Ces conditions vous semblent-elles réalistes ?

B. Modèle du disque actuateur

On souhaite calculer le rendement maximal ξ pouvant être atteint par l'éolienne. Pour cela, on introduit le modèle dit du "disque actuateur" de Froude : on suppose que l'action du vent sur les pales est équivalente à celle du vent sur un disque perméable de surface $S_1 = \pi R^2$ au point x_1 (figure 3). On considère un tube de courant, défini par cette surface S_1 et par deux surfaces $S_0 < S_1$ et $S_2 > S_1$, situées aux points x_0 et en x_2, suffisamment loin de S_1 pour que la pression y soit égale à la pression atmosphérique p_0. On supposera que l'écoulement est incompressible, et que le fluide est parfait (sauf au niveau du disque S_1). On note $u(x)$ la vitesse supposée uniforme dans toute section transverse à l'intérieur du tube de courant et continue pour tout x. En revanche, la pression $p(x)$ est discontinue en $x = x_1$.

1. Pourquoi peut-on supposer que l'écoulement est incompressible ? Qu'est qu'un fluide parfait ? Pourquoi ne peut-on pas appliquer la loi de Bernoulli au niveau du disque S_1 ?
2. Ecrire les débits volumiques en x_0, x_1 et x_2 en fonction des surfaces et des vitesses qui interviennent dans le problème. Pourquoi ces débits sont-ils égaux ?
3. Tracer l'allure des fonctions $u(x)$ et $p(x)$.

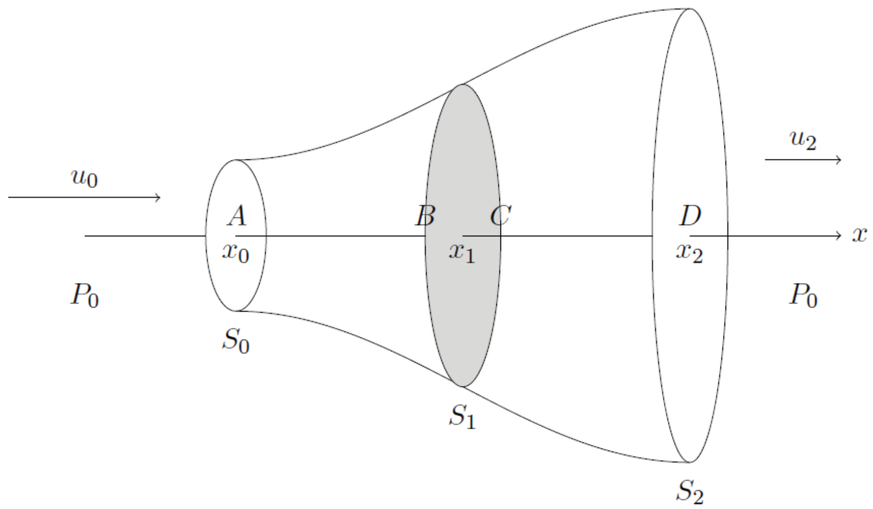

FIGURE 3 – Tube de courant décrivant l'écoulement autour de l'éolienne, modélisée par le “disque actuateur” S_1.

4. Calculer le saut de pression $p_B - p_C$ de part et d'autre du disque S_1, en fonction de u_0 et u_2. En déduire la force $\vec{F}$ s'appliquant sur le disque.
5. Appliquer le théorème du transport de Reynolds pour la quantité de mouvement sur le volume de contrôle contenu entre S_0 et S_2, l'éolienne étant exclue du volume de contrôle. Quelles sont les forces appliquées sur ce volume ? Pourquoi la pression atmosphérique p_0 ne contribue-t-elle pas ?
6. En déduire une autre expression de $\vec{F}$ en fonction des vitesses u_0, u_2 et des sections S_0 et S_2.
7. En égalisant les expressions de $\vec{F}$ trouvées en questions 4 et 6, en déduire que l'on a $u_1 = (u_0 + u_2)/2$.
8. En déduire S_1 en fonction de S_0 et S_2.
9. La puissance récupérée par l'éolienne s'écrit $P = \vec{F} \cdot \vec{u}$. En déduire le rendement ξ de l'éolienne, défini en question A3, en fonction du rapport de vitesse $a = u_2/u_0 \leq 1$.
10. Montrer que ce rendement atteint un maximum ξ_{max} pour une certaine valeur de $a = a_c$, et calculer ce maximum. Tracer ξ en fonction de a. Que pensez-vous des limites $a \to 0$ et $a \to 1$?