Mécanique des fluides

Examen du 27 octobre 2015

(Durée : 3 heures — sans calculatrice ni document)

Problème 1 : Jet impactant sur un coin

On considère un jet d'eau bi-dimensionnel impactant sur un coin d'angle intérieur 2α, dont chaque segment mesure a (voir la figure 1). L'objectif de ce problème est de déterminer la force $\vec{F}$ exercée par le jet sur le coin, avec ou sans prise en compte de la viscosité.

On note L la dimension transverse, perpendiculaire au plan de la figure, et $f = F/L$ la force par unité de longueur exercée par le jet sur le coin. Loin en amont, la vitesse du jet est U_0, et son épaisseur est h_0. On suppose que l'écoulement est stationnaire, que le fluide est incompressible, de masse volumique ρ, et que le jet reste symétrique de part et d'autre du coin. On note p_0 la pression de l'air, dont on néglige la viscosité : la surface du liquide peut ainsi être considérée comme une surface libre. On néglige enfin les effets de la pesanteur et de la tension de surface.

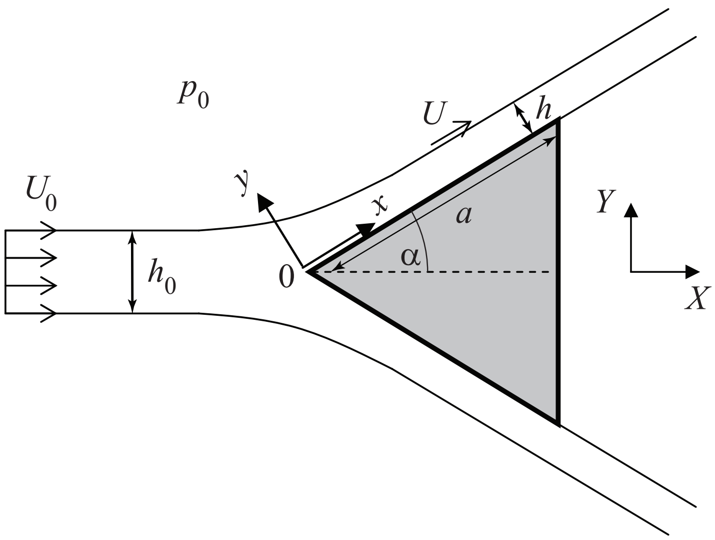

FIGURE 1 – Jet impactant sur un coin.

1 – On cherche à déterminer une expression de la force par unité de longueur f par analyse dimensionnelle. On suppose que les grandeurs pertinentes du problème sont ρ, U_0, h_0, et α. Identifier le(s) nombre(s) sans dimension dans ce problème, et proposer une expression pour f. D'après vous, comment f peut-elle dépendre de α ?

2 – Que devient le résultat précédent si l'on suppose maintenant que η, la viscosité cinématique du fluide, ainsi que a, interviennent également dans le problème ? Commenter ce résultat.

3 – On suppose dans un premier temps que la viscosité n'intervient pas (fluide parfait, $\eta = 0$). Dans ce cas, suffisamment loin de la pointe en $x = 0$, l'épaisseur h de chaque couche est indépendante de x, et la vitesse U est uniforme (indépendante de y). En écrivant la relation de conservation de la masse dans un volume de contrôle que l'on précisera, donner une relation entre U_0, h_0, U et h.

4 – En appliquant la relation de Bernoulli sur une ligne de courant que l'on précisera, exprimer U en fonction de U_0, et en déduire h en fonction de h_0.

5 – A partir d'un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force par unité de longueur $\vec{f_p}$ exercée par le fluide sur le coin.

6 – On souhaite maintenant prendre en compte les effets de la viscosité. On suppose que la viscosité est faible, de sorte qu'elle n'intervient que dans une fine couche limite le long de chaque segment du coin, d'épaisseur

$$\delta(x) = c\sqrt{\frac{\nu x}{U}},$$

où c une constante sans dimension. Justifier l'origine physique de cette équation et donner une condition sur le nombre de Reynolds $Re = Uh/\nu$ pour que la condition $\delta(x) \ll h$ soit satisfaite pour tout x le long du coin.

7 – Pour $y > \delta(x)$, on suppose que l'écoulement est celui d'un fluide parfait, tandis que pour $y < \delta(x)$, le profil de vitesse est une fonction linéaire de y se raccordant en $y = \delta(x)$. Dessiner l'allure du profil de vitesse $u_x(y)$ pour différents x.

8 – En utilisant la conservation du débit, en déduire la variation d'épaisseur de la couche fluide $h(x)$ en fonction de x.

9 – En effectuant un bilan de quantité de mouvement sur le même volume de contrôle que précédemment, calculer la nouvelle force $\vec{f_t}$ exercée par le fluide sur le coin.

10 – Déterminer la différence $\Delta f = f_t - f_p$. A quoi peut être attribuée cette différence ? Que vaut Δf lorsque $\alpha = \pi/2$, et pourquoi ?

11 – Calculer la contrainte visqueuse exercée par le fluide le long de chaque segment, puis en déduire la force par unité de longueur f_v exercée par le fluide sur le coin du fait de la viscosité. Commenter ce résultat à la lumière de la question précédente. Que doit valoir la constante c ?

Problème 2 : Écoulement en eau peu profonde : équations de Saint-Venant et soliton de Korteweg-de Vries

En 1834, John Scott Russell observa l'apparition d'une onde solitaire se déplaçant le long d'un canal (≪ *assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water (...) continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed* ≫). C'est cette onde solitaire, ou *soliton*, que l'on va caractériser dans ce sujet.

Équations de saint-Venant

On se place dans le cadre d'un écoulement de fluide parfait incompressible. On considère une couche de liquide de hauteur moyenne H au-dessus d'un fond horizontal (figure 2). On suppose le problème invariant dans la direction y, le problème est donc 2D dans le plan (xOz). La surface libre du fluide est repérée par sa hauteur $h(x,t)$, et le champ de vitesse du fluide est $\vec{u}(x,z) = u\,\vec{e}_x + w\,\vec{e}_z$. On note

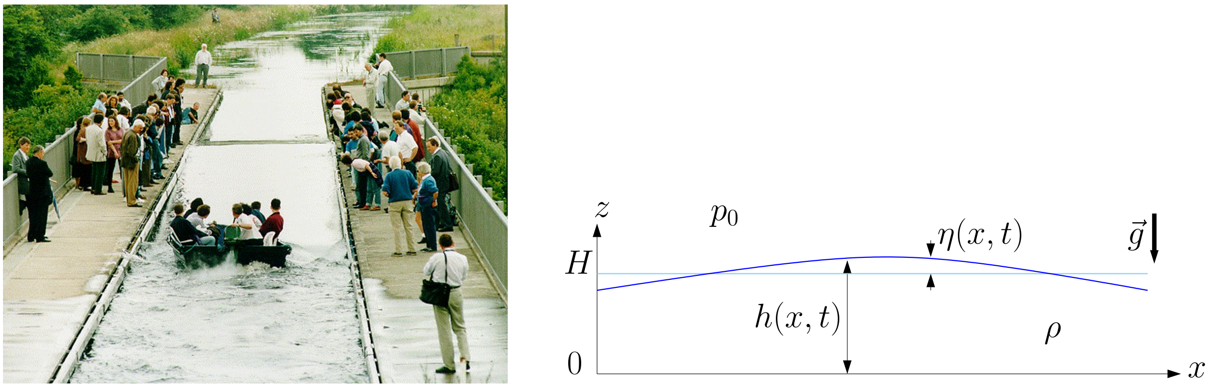

FIGURE 2 – Gauche : photo d'une reproduction de l'observation originale de Russell ; le soliton est à l'avant du bateau qui le suit (Crédits : Department of Mathematics, Heriot-Watt University). Droite : notations du problème.

$\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur. On négligera les effets de tension de surface.

1 – Écrire les équations d'Euler en précisant les conditions aux limites au fond ($z = 0$).

2 – Rappeler pourquoi à l'interface, on a la relation cinématique suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} = w.$$

3 – On note $\bar{\psi}(x,t)$ la valeur moyenne selon l'épaisseur d'un champ scalaire quelconque $\psi(x,z,t)$,

$$\bar{\psi}(x,t) = \frac{1}{h(x,t)}\int_0^{h(x,t)} \psi(x,z,t)\mathrm{d}z.$$

On admet les relations suivantes :

$$\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\mathrm{d}z = \frac{\partial}{\partial x}\left\{h\bar{\psi}\right\} - \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\psi[x,h(x,t),t],$$
$$\int_0^{h(x,t)} \frac{\partial\psi}{\partial t}\,\mathrm{d}z = \frac{\partial}{\partial t}\left\{h\bar{\psi}\right\} - \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)\psi[x,h(x,t),t].$$

Intégrer sur l'épaisseur l'équation d'incompressibilité, et en déduire l'équation de conservation du débit suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\{h\bar{u}\} = 0. \tag{1}$$

4 – On se place dans l'hypothèse dite « eau peu profonde », à savoir que l'épaisseur moyenne H est faible devant les échelles de longueur horizontale L_0. On pose $\varepsilon = \frac{H}{L_0} \ll 1$. On définit U_0 l'ordre de grandeur de la vitesse horizontale u.

Calculer les ordres de grandeur de chacun des termes de l'équation d'Euler dans la direction z, et en déduire qu'à l'ordre ε, la pression satisfait l'équation de l'hydrostatique :

$$-\frac{\partial}{\partial z}p - \rho g = 0.$$

En déduire le champ de pression dans tout le fluide.

5 – Montrer que l'on peut écrire

$$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u = \frac{\partial}{\partial x}\left\{u^2\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{uw\right\}.$$

6 – En considérant l'équation d'Euler projetée dans la direction x et en l'intégrant sur l'épaisseur de fluide $h(x,t)$, montrer que l'on obtient, en faisant l'approximation $\overline{u^2} \simeq (\bar{u})^2$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\{h\bar{u}\} + \frac{\partial}{\partial x}\{h\bar{u}^2\} = -gh\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{2}$$

7 – Montrer qu'on peut réécrire l'équation (2) sous la forme

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Les équations (1) et (3) sont appelées *équations de Saint-Venant*. On aura ainsi transformé un problème 2D incompressible à surface libre en un problème 1D de type compressible, dans lequel la hauteur de fluide joue le rôle d'une densité.

Prise en compte de termes dispersifs

8 – Considérons une perturbation de l'état du fluide au repos [$h(x,t) = H$ et $\bar{u}_0 = 0$], que l'on écrira sous la forme $h(x,t) = H + \eta_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$ et $\bar{u} = v_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$. Montrer, en ne retenant que les contributions linéaires en η_0 et v_0 dans les équations de Saint-Venant, qu'une telle perturbation conduit à une relation de dispersion de la forme

$$\omega = c_0\, k,$$

où l'on identifiera la constante c_0. S'agit-il d'une onde dispersive ?

9 – On souhaite désormais aller au-delà de cette relation linéaire et faire intervenir des termes dispersifs. Pour cela, on rappelle que les ondes de surface en l'absence de tension capillaire ont pour relation de dispersion

$$\omega^2 = gk \tanh kH. \tag{4}$$

Que devient cette relation de dispersion pour une onde en eau profonde ($Hk \gg 1$) ? S'agit-il dans ce cas d'une onde dispersive ?

10 – On donne le développement limité $\tanh(x) \simeq x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ au voisinage de $x = 0$. Montrer que la relation de dispersion (4) peut s'écrire, pour une profondeur modérée comparée à la longueur d'onde,

$$\omega \simeq c_0 k \times \Phi(Hk) + o(k^3),$$

où Φ est un polynôme de degré 2 qu'on explicitera.

11 – Montrer qu'une telle relation de dispersion approchée est compatible avec les équations suivantes (dues à Boussinesq)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\{h\bar{u}\} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{3}H\frac{\partial^3 h}{\partial t^2 \partial x} = 0. \tag{6}$$

Corrections non linéaires : équation de Korteweg-de Vries

On peut montrer que le système d'équations précédent peut se simplifier en éliminant la vitesse $\bar{u}$ et se réécrire, au premier ordre en les corrections non-linéaires (résultat admis)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0\left[\left(1 + \frac{3}{2H}\,\eta\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6}H^2\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3}\right] = 0 \tag{7}$$

avec η la déformation de la surface libre ($h = H + \eta$). Cette équation s'appelle équation de Korteweg-de Vries (KdV). C'est une équation qui possède des solutions appelées solitons KdV que l'on va chercher à caractériser par la suite.

12 – On cherche des solutions de l'équation (7) en translation uniforme à la vitesse c et localisée dans l'espace, c'est-à-dire telles que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \eta = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0.$$

Pour cela, on va chercher des solutions de la forme $\eta(x,t) = \eta(\xi)$, avec $\xi(x,t) = x - ct$. Montrer que l'équation (7) se réécrit, une fois intégrée selon la variable ξ,

$$(c_0 - c)\eta + \frac{3c_0}{4H}\eta^2 + \frac{c_0}{6}H^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}\eta = 0.$$

13 – Montrer qu'on est ramené à un problème de mécanique newtonienne, décrivant la dynamique d'une particule de masse M se déplaçant selon la coordonnée cartésienne η et soumise à un potentiel $W(\eta)$. On indiquera les expressions de M et de $W(\eta)$.

14 – Question hors barême (on pourra admettre le résultat et passer à la suite) En raisonnant par analogie avec le problème mécanique sur l'énergie totale du système, en déduire que l'équation de KdV admet pour solution le soliton d'équation :

$$\eta(x,t) = \frac{2\,\frac{c-c_0}{c_0} H}{\cosh^2\left[\sqrt{\frac{3}{2}\frac{c-c_0}{c_0}}\,\frac{x-ct}{H}\right]}. \tag{8}$$

On utilisera le fait que $\displaystyle\int_\eta^B \frac{\mathrm{d}\phi}{\phi\sqrt{B-\phi}} = \frac{2}{\sqrt{B}}\operatorname{arctanh}\sqrt{1-\frac{\eta}{B}}$, pour $B > 0$ et $0 < \eta \leq B$.

15 – Quelles sont la direction et la vitesse de déplacement du soliton ? Comparer cette dernière à la vitesse des ondes de gravité.

16 – Quelle est l'amplitude du soliton ? sa largeur typique ? Tracer l'allure de cette solution pour c proche de c_0, et pour c grand devant c_0.