

Master 2 Dynamique des Fluides et Energétique  
2020-2021

# Techniques Expérimentales Avancées en Mécanique des Fluides



1<sup>er</sup> décembre 2020

F. Moisy



# Table des matières

<b>1</b>	<b>L'anémométrie à fil chaud</b>	<b>5</b>
1.1	Principe de base de l'anémométrie à fil chaud . . . . .	5
1.1.1	Introduction . . . . .	5
1.1.2	Bilan de puissance . . . . .	6
1.2	Relation fondamentale de l'anémométrie : la Loi de King . . . . .	8
1.2.1	Transfert de chaleur : la loi $Nu = f(Re)$ . . . . .	8
1.2.2	Dépendance $R_w = f(T_w)$ . . . . .	9
1.2.3	Autres dépendances du nombres de Nusselt . . . . .	10
1.2.4	Limitation par convection naturelle . . . . .	11
1.3	Électronique d'asservissement . . . . .	12
1.3.1	Anémométrie à Courant Constant (CCA) . . . . .	12
1.3.2	Anémométrie à Température Constante (CTA) . . . . .	13
1.3.3	Coefficient de surchauffe . . . . .	14
1.3.4	Calibration empirique . . . . .	14
1.3.5	Réponse en fréquence . . . . .	16
1.4	Effets de longueur finie, sensibilité angulaire . . . . .	16
1.4.1	Uniformité du profil de température le long du fil . . . . .	16
1.4.2	Sensibilité angulaire . . . . .	19
1.5	Mesures des fluctuations turbulentes . . . . .	20
1.5.1	Sélection de la composante longitudinale de la vitesse . . . . .	20
1.5.2	L'hypothèse de Taylor . . . . .	21
1.6	Autres types d'anémomètres . . . . .	22
1.7	Ce qu'il faut retenir, en 5 formules . . . . .	24
1.8	Annexes . . . . .	24



# Chapitre 1

## L'anémométrie à fil chaud

### 1.1 Principe de base de l'anémométrie à fil chaud

#### 1.1.1 Introduction

L'anémométrie à fil chaud est une technique classique de mesure de la vitesse d'un fluide en un point, faiblement intrusive, de mise en œuvre relativement légère et assez bon marché. Son point fort est son excellente résolution spatiale et temporelle, qui en font la technique de choix pour l'étude des fluctuations turbulentes. Ses points faibles sont sa fragilité et (dans la configuration la plus simple), la limitation de la mesure à une seule composante de la vitesse en un seul point de mesure.

Les anémomètres à fils chauds usuels sont constitués d'un fin fil d'environ 1 mm de long, de 1 à 10  $\mu\text{m}$  de diamètre, tendu entre deux broches (figure 1.1). Les mesures sont effectuées le plus souvent dans des souffleries (écoulement d'air de l'ordre de 0,1 m/s à plusieurs centaines de m/s), mais aussi dans des veines d'essai hydrauliques (écoulement d'eau de l'ordre de 0,01 m/s à quelques m/s). Divers compromis entre résistivité, conductivité thermique et robustesse mécanique conduisent à privilégier pour le fil des matériaux comme le tungstène, le platine ou certains alliages.

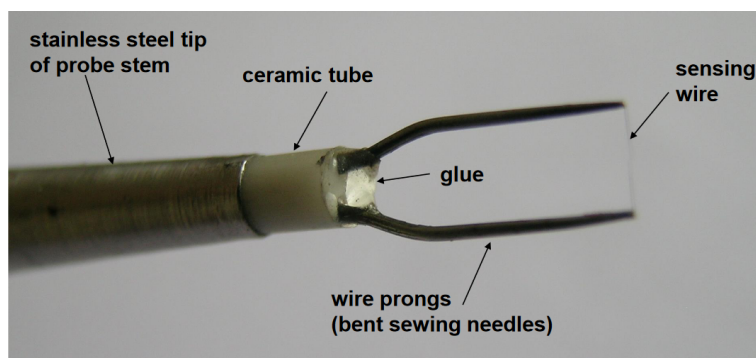


FIGURE 1.1 – Photo d'un anémomètre à fil chaud (document von Karman Institute).

Le principe de l'anémométrie à fil chaud est celui du "refroidissement éolien", indication subjective de la température ressentie, parfois donnée dans les bulletins météo. La température ressentie est la puissance dissipée par le corps (c'est-à-dire transférée du corps vers l'extérieur) et le vent, en favorisant ce transfert de chaleur, donne ainsi l'impression d'une température

plus basse que la température réelle. Ainsi, le principe de l'anémométrie à fil chaud consiste à mesurer la puissance transférée depuis un fil fin chauffé par effet Joule et refroidi par le passage du fluide. La puissance emportée par le fluide donne donc une mesure indirecte de la vitesse de l'écoulement – mais pas de sa direction.

### 1.1.2 Bilan de puissance

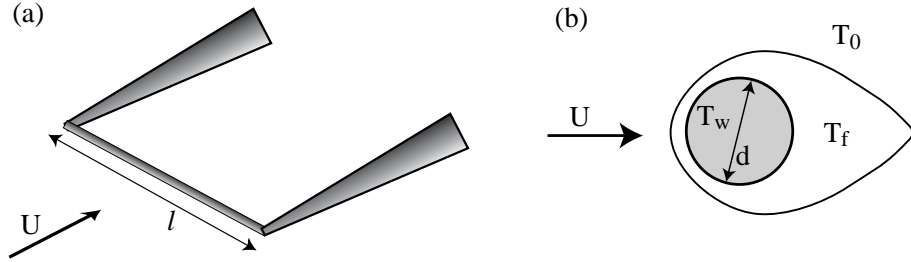


FIGURE 1.2 – (a) : Fil monté sur ses broches, perpendiculaire à la vitesse. (b) : Allure de la couche limite thermique autour du fil;  $T_f = (T_w + T_0)/2$  est la température du film fluide chaud.

On considère un fil de longueur  $l$  et de diamètre  $d$  (fig. 1.2), tel que le rapport d'aspect  $l/d$  soit très grand (typiquement  $l/d \simeq 200$ ). On fait circuler dans ce fil de résistance  $R_w$  ( $w$  pour *wire*) un courant d'intensité  $I$ . En notant  $E$  l'énergie stockée sous forme de chaleur dans le fil, on peut écrire le bilan de puissance :

$$\frac{dE}{dt} = \dot{W} - \dot{Q}, \quad (1.1)$$

où  $\dot{W} = R_w I^2 > 0$  est la puissance apportée par effet Joule et  $\dot{Q} > 0$  la chaleur transférée depuis le fil vers l'extérieur (fig. 1.3). Le fil sera ainsi porté à une température  $T_w$ , supérieure (d'environ  $100^\circ\text{C}$ ) à la température du fluide environnant  $T_0$  (supposée constante).

Plusieurs effets contribuent à la dissipation de cette chaleur :

- **Conduction vers le fluide**, due à la diffusion moléculaire de la chaleur dans le fluide.
- **Convection vers le fluide**, où la chaleur est transportée par le mouvement du fluide environnant<sup>1</sup>.
- **Conduction vers les supports**, due à la diffusion de la chaleur le long du fil,  $\sim k_w(T_w - T_0)$ , où  $k_w$  est la conductivité thermique du fil.
- **Rayonnement thermique** : puissance transférée sous forme de rayonnement électromagnétique (c'est le principe de fonctionnement d'une ampoule électrique), qui peut s'écrire  $\sim \sigma \mathcal{A}(T_w^4 - T_0^4)$ , où  $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$  est la constante de Stefan.

Nous négligerons dans un premier temps la conduction vers les supports, en prenant un rapport d'aspect  $l/d \gg 1$ . Nous admettrons également dans toute la suite que la puissance rayonnée est négligeable.

Reste à modéliser les 2 premiers effets : conduction et convection vers le fluide. La puissance dissipée par le fil est le flux de chaleur  $\vec{j}_Q = -k_f \vec{\nabla} T$  (loi de Fourier) intégré sur la surface  $\mathcal{A} = \pi dl$  du fil, où  $k_f$  est la conductivité thermique du fluide environnant. Cette conductivité

1. Il s'agit bien entendu ici de *convection forcée* : la chaleur est transportée par l'écoulement sans rétroagir sur celui-ci. Nous verrons au paragraphe 1.2.4 les problèmes liés à la *convection naturelle*.

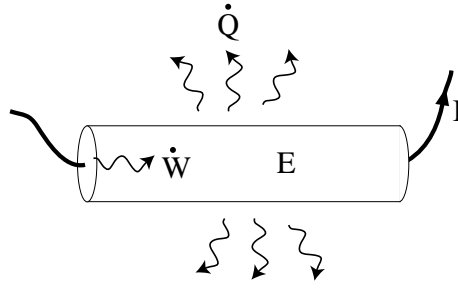


FIGURE 1.3 – Bilan de puissance sur le fil chaud.

thermique pouvant dépendre elle-même de la température, on la choisit par convention à la “température du film<sup>2</sup>” (fig. 1.2b)  $T_f$ , définie par convention comme la moyenne

$$T_f = (T_w + T_0)/2.$$

Cette puissance ne devra dépendre après intégration que de la différence caractéristique de température,  $T_w - T_0$ . En introduisant le coefficient de transfert  $h$  (en  $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ), on peut écrire cette puissance par unité de surface

$$\frac{\dot{Q}}{\mathcal{A}} = h(T_w - T_0). \quad (1.2)$$

$h$  représente la puissance par unité de surface transférée pour une différence de température donnée. On adimensionne ce coefficient de transfert en introduisant le nombre de Nusselt  $\text{Nu}$  :

$$\text{Nu} = hd/k_f$$

(où on a utilisé  $d$  et non  $l$  comme longueur caractéristique, car dans la limite  $l/d \gg 1$  le problème est bidimensionnel et  $l$  ne doit plus intervenir). En remplaçant les expressions de  $\text{Nu}$  et  $\mathcal{A}$  dans (1.2), on obtient finalement :

$$\dot{Q} = \pi l k_f (T_w - T_0) \text{Nu}. \quad (1.3)$$

Le nombre de Nusselt exprime l’efficacité du transfert par convection, c’est-à-dire le rapport entre puissance transférée totale et puissance transférée par conduction uniquement.  $\text{Nu}$  est d’autant plus élevé que la vitesse du fluide  $U$  est élevée. Par construction, on a  $\text{Nu} > \text{Nu}_0$  en présence de convection, et  $\text{Nu} = \text{Nu}_0 \simeq 1$  ( $h \simeq k_f/d$ ) pour  $U = 0$  (conduction pure).

Le bilan de puissance (1.1) s’écrit ainsi

$$\frac{dE}{dt} = R_w I^2 - \pi l k_f (T_w - T_0) \text{Nu}. \quad (1.4)$$

L’énergie  $E$  stockée dans le fil peut s’écrire en fonction de la température  $T_w$  du fil :

$$dE = mc dT_w,$$

où  $m$  est la masse du fil et  $c$  sa capacité calorifique. La température du fil peut varier, cependant nous supposons dans la suite  $T_w$  comme indépendant du temps, soit  $dE/dt = 0$ .

2. A ne pas confondre avec l’anémométrie à film chaud, qui est un autre dispositif – voir le paragraphe 1.6.

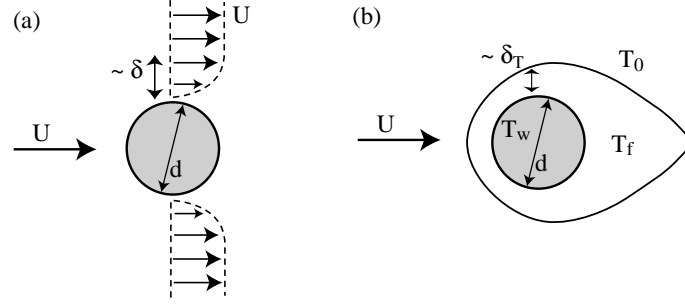


FIGURE 1.4 – (a) : Couche limite de vitesse, (b) : couche limite thermique.

Cette hypothèse sera discutée plus en détail au paragraphe 1.3.5. Notre bilan de puissance devient alors

$$R_w I^2 = \pi l k_f (T_w - T_0) \text{Nu}. \quad (1.5)$$

Remarquons à ce point que nous n'avons pas beaucoup avancé : toute la difficulté du problème, c'est-à-dire la dépendance en la vitesse  $U$ , se trouve "cachée" dans le nombre de Nusselt, qui décrit toute la physique du système.

Calculons l'ordre de grandeur de chacun des termes de l'équation (1.5). En fonctionnement usuel dans l'air, on a  $R_w \simeq 100 \Omega$ ,  $I \simeq 0,05 \text{ A}$ , soit une tension aux bornes du fil de  $R_w I \simeq 5 \text{ V}$  et une puissance dissipée  $R_w I^2 \simeq 0,25 \text{ W}$ . Avec  $l \simeq 1 \text{ mm}$ ,  $k_f = 0,02 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$  (air à température ambiante) et  $T_w - T_0 \simeq 200^\circ\text{C}$ , on obtient  $\text{Nu} \simeq 10$  : le transfert par convection est environ 10 fois plus efficace que par conduction pure.

## 1.2 Relation fondamentale de l'anémométrie : la Loi de King

### 1.2.1 Transfert de chaleur : la loi $\text{Nu} = f(\text{Re})$

Tout le problème de l'anémométrie à fil chaud est maintenant de déterminer la loi de transfert de chaleur  $\text{Nu}$  en fonction de la vitesse  $U$ , c'est-à-dire du nombre de Reynolds  $\text{Re}_w$  basé sur le fil :

$$\text{Re}_w = \frac{Ud}{\nu_f},$$

où, faute de mieux, on choisit ici encore la viscosité cinématique  $\nu_f$  à la température du film  $T_f$ .  $U$  est ici la "vitesse à l'infini", c'est-à-dire la vitesse suffisamment loin (quelques diamètres) en amont du fil.

Dans notre problème,  $\text{Nu}$  est fonction de  $\text{Re}_w$  uniquement. Nous verrons plus loin (paragraphe 1.4) qu'une résolution plus complète suppose également une dépendance en bien d'autres paramètres (nombre de Prandtl, de Mach, rapport d'aspect  $l/d$ ...). A vrai dire, même dans l'hypothèse la plus simple  $\text{Nu} = f(\text{Re}_w)$ , il n'existe pas de solution exacte.

La résolution du problème doit tenir compte de la couche limite de vitesse (épaisseur  $\delta$  sur laquelle la vitesse passe de  $U$  "à l'infini" à 0 à la surface du fil, fig. 1.4a) ainsi que de la couche limite thermique (épaisseur  $\delta_T$  de fluide sur laquelle la température passe de  $T_w$  à essentiellement  $T_0$ , fig. 1.4b).

Dans le cas d'un fluide à nombre de Prandtl  $\text{Pr} = \nu/\kappa \simeq 1$  (cas des gaz, où diffusion visqueuse = diffusion thermique), on sait que ces deux couches limites sont d'épaisseur comparable,  $\delta \simeq \delta_T$ . Avec les hypothèses supplémentaires d'un écoulement 2D potentiel (tel que



$l/d \gg 1$ ) et stationnaire, King (1914) propose la loi :

$$\text{Nu} = 1 + \sqrt{2\pi\text{Re}_w}. \quad (1.6)$$

L'hypothèse de stationnarité signifie que le temps caractéristique des fluctuations de vitesse doit être grand comparé au temps  $d/U$  d'advection du fluide sur une distance égale au diamètre.

Le résultat remarquable de (1.6) est la variation en  $\text{Re}_w^{1/2}$ , propre aux transferts de chaleur en écoulement **laminaire** (cette variation provient de la croissance de l'épaisseur des couches limites laminares, en  $\delta \sim x^{1/2}$ ). En effet, dans le cas d'un fil de diamètre  $d = 5 \mu\text{m}$ , avec  $U = 10 \text{ m/s}$  dans l'air ( $\nu_f = 15.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ), le nombre de Reynolds est de  $\text{Re}_w \simeq 3$  : l'écoulement autour du fil peut bel et bien être considéré comme **laminaire** (l'écoulement lui-même peut évidemment être turbulent à plus grande échelle, mais le fil est si petit qu'à l'échelle de son diamètre l'écoulement est bien laminaire). C'est toujours dans cette situation que l'on travaillera en pratique. Par ailleurs, l'hypothèse de stationnarité suppose un temps caractéristique des fluctuations turbulentes  $\tau$  petit devant  $d/U = 0.5 \mu\text{s}$  (soit 2 MHz), ce qui est amplement vérifié en pratique.

Il existe bien d'autres lois que (1.6), avec des hypothèses moins restrictives. Une des lois les plus utilisées est la loi de Kramers, qui fait intervenir le nombre de Prandtl :

$$\text{Nu} = 0,42 \text{Pr}^{1/5} + 0,57 \sqrt{\text{Re}_w} \text{Pr}^{1/3} \quad (1.7)$$

(rappelons que  $\text{Pr} \simeq 0,7$  pour l'air et  $\text{Pr} \simeq 6$  pour l'eau). On retrouve la dépendance en  $\text{Re}_w^{1/2}$  déjà présente dans (1.6), ainsi qu'une dépendance en  $\text{Pr}^{1/3}$  propre aux transferts thermiques en couche limite laminaire dans le cas d'un  $\text{Pr}$  de l'ordre ou supérieur à 1 (Ref. [5], § 9.7). D'une manière générale, nous pourrions écrire notre loi de transfert sous la forme

$$\text{Nu} = a_0 + b_0 \sqrt{\text{Re}_w}, \quad (1.8)$$

où les coefficients sans dimension  $a_0$  et  $b_0$  peuvent dépendre de tout (Prandtl, Mach,  $l/d \dots$ ), sauf évidemment de la vitesse  $U$ .

### 1.2.2 Dépendance $R_w = f(T_w)$

Reprenons notre bilan de puissance (1.5) avec la loi de transfert (1.8) :

$$R_w I^2 = \pi l k_f (T_w - T_0) (a_0 + b_0 \sqrt{\text{Re}_w}). \quad (1.9)$$

L'expérimentateur a accès à la tension aux bornes du fil,  $e = R_w I$ . Mais que mesure-t-il ? Si  $U$  augmente,  $\text{Re}_w$  augmente, et si le courant  $I$  reste constant, la tension mesurée  $e = R_w I$  reste *a priori* également constante, et l'augmentation de  $\text{Nu}$  n'implique qu'une diminution de  $T_w \dots$  Bref, à moins de mesurer indépendamment  $T_w$ , aucun signal électrique ne traduit *a priori* la variation de  $U$  : on ne mesure rien. Heureusement, tout le "truc" de l'anémométrie à fil chaud réside dans la dépendance de la résistance  $R_w$  en la température  $T_w$ , permettant ainsi d'accéder à la température  $T_w$  du fil.

Pour les matériaux généralement utilisés, on peut écrire une dépendance linéaire de la résistance avec la température :

$$R_w(T_w) = R_0(1 + \alpha(T_w - T_0)),$$

où le paramètre  $\alpha$

$$\alpha = \frac{1}{R_w} \frac{\partial R_w}{\partial T}$$

(exprimé en  $\text{K}^{-1}$ ) est constant sur une gamme raisonnable de température. Pour les matériaux usuels (tungstène, platine et alliages), on a

$$\alpha \simeq 5.10^{-3} \text{ K}^{-1},$$

c'est-à-dire qu'une augmentation de 20 à 40°C fait passer une résistance de 100  $\Omega$  à  $100(1 + 20\alpha) = 110 \Omega$ . Les paramètres  $R_0$  et  $T_0$  sont des références arbitraires, mais il est évidemment judicieux de choisir  $T_0$  comme la température du fluide et  $R_0 = R_w(T_0)$  la résistance correspondante en l'absence de chauffage.

En reportant  $T_w - T_0 = (R_w - R_0)/\alpha R_0$  dans (1.9), on obtient la **relation fondamentale de l'anémométrie**, ou **loi de King**<sup>3</sup> :

$$\frac{R_w I^2}{R_w - R_0} = a + b\sqrt{U}, \quad (1.10)$$

avec

$$a = \frac{\pi l k}{\alpha R_0} a_0 \quad \text{et} \quad b = \frac{\pi l k}{\alpha R_0} b_0 \sqrt{d/\nu_f}.$$

Cette fois-ci, nous avons bien un lien entre le membre de droite  $a + b\sqrt{U}$  et la tension mesurée  $e = R_w I$  ! Deux stratégies s'offrent maintenant à nous :

- Garder le courant  $I$  constant et mesurer  $U$  à travers les fluctuations de  $R_w$  uniquement : c'est l'**Anémométrie à Courant Constant (CCA)** — obsolète aujourd'hui.
- Garder la résistance  $R_w$  constante, et donc la température du fil  $T_w$  constante, et mesurer  $U$  à travers les fluctuations de  $I$  : c'est l'**Anémométrie à Température Constante (CTA)**.

Nous allons dans le paragraphe suivant décrire brièvement les deux circuits électroniques correspondant à chacune de ces deux stratégies, en insistant sur la seconde (CTA) qui est la plus répandue.

### 1.2.3 Autres dépendances du nombres de Nusselt

En toute généralité, le nombre de Nusselt, caractérisant l'efficacité du transfert convectif de chaleur, est fonction des paramètres suivants :

$$\text{Nu} = f(\text{Re}_w, \text{Pr}, \text{Ma}, \text{Kn}, l/d, a).$$

Comme nous l'avons dit, il n'existe pas d'expression générale de Nu en fonction de tous ces paramètres. On peut se contenter de certaines expressions empiriques de Nu en fonction du type de mesures que l'on souhaite effectuer<sup>4</sup>.

L'influence du nombre de Prandtl a déjà été discutée plus haut. Dans notre analyse, nous avons effectué les hypothèses suivantes :

- Nombre de Mach  $\text{Ma} \ll 1$ . Dans le cas contraires (écoulements compressibles, voire supersoniques), bien que l'écoulement puisse être très différent au voisinage du fil, on trouve toujours expérimentalement une loi en  $\text{Nu} \propto \text{Re}_w^{1/2}$ .

3. bien que cette loi n'utilise pas nécessairement les valeurs des paramètres  $a$  et  $b$  de l'équation (1.6).

4. Plus de 2500 publications sont parues sur ce sujet depuis le travail de King (1914) !

- Nombre de Knudsen  $\text{Kn} = \lambda/d \ll 1$ , qui compare le libre parcours moyen des atomes ou molécules constituant le fluide au diamètre du fil. L'hypothèse du milieu continu est valable pour  $\text{Kn} \ll 1$ . Dans le cas contraire ( $\text{Kn} \simeq 1$ , gaz raréfiés), les transferts de chaleurs sont diminués.
- Rapport d'aspect  $l/d \gg 1$ . Lorsque ce rapport n'est pas suffisamment grand, divers effets interviennent : perturbation des supports du fil, contribution de la composante axiale de la vitesse, et non uniformité de la température du fil. Nous examinerons le deuxième et le troisième effet dans la section suivante.
- Coefficient de surchauffe  $a = R_w/R_0$  proche de 1. Nous avons déjà discuté l'influence de  $a$  sur les contraintes liées à certains fluides (1.3.3). Nous examinerons maintenant le problème de la convection naturelle.

### 1.2.4 Limitation par convection naturelle

Un fil chauffé dans un fluide au repos peut provoquer un courant de *convection naturelle* : le fluide chauffé, plus léger, subit une force ascendante (poussée d'Archimède), emportant ainsi la chaleur du fil même dans un fluide initialement au repos (Ref. [5], § 10.1). Cet effet parasite risque de modifier la loi de transfert de chaleur établie précédemment, basée uniquement sur la *convection forcée* de la chaleur par le fluide en mouvement. Il en résultera un nombre de Nusselt mesuré supérieur au nombre de Nusselt attendu, pouvant conduire à sur-estimer la vitesse réelle de l'écoulement. Pour cette raison, il est important d'estimer la vitesse minimale d'utilisation  $U$ , en-dessous de laquelle un tel effet risque d'intervenir.

Pour cela, nous allons estimer la poussée d'Archimède subie par le film fluide au voisinage du fil et la comparer aux forces de frottement visqueux. Afin de simplifier la géométrie, tout en gardant la symétrie du problème, on va considérer un élément de fluide cylindrique, de longueur  $l$  et de diamètre  $d$ , porté à la température du fil  $T_w$ . Cet élément de fluide moins dense subit la poussée d'Archimède (ascendante) et est freiné par la force de frottement visqueux (descendante).

La force de flottaison (résultante poids – poussée d'Archimède) exercée sur un cylindre de fluide de volume  $\sim ld^2$  s'écrit  $F_A = \Delta\rho ld^2 g$ , où  $g$  est l'accélération de la pesanteur et  $\Delta\rho$  la différence de densité due à la différence de température  $\Delta T = T_w - T_0$  entre l'élément de fluide considéré et le fluide environnant. En écrivant le coefficient de dilatation thermique

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} > 0$$

(exprimé en  $\text{K}^{-1}$ , positif car augmenter la température diminue la densité), on obtient  $\Delta\rho = -\beta\rho_0 \Delta T_0$  (où  $\rho_0$  est la densité du fluide à la température  $T_0$ ) et cette force devient

$$F_A = \beta\rho_0 \Delta T ld^2 g.$$

Dans le cas d'un gaz parfait, l'équation d'état  $p \sim \rho T$  permet d'écrire  $\beta = 1/T_0 \simeq 1/300 \text{ K}^{-1}$ . Cette force ascendante va mettre l'élément de fluide en mouvement vers le haut.

Cette force va être compensée par une force de frottement visqueux  $F_v \simeq \mathcal{A}\tau_v$ , avec  $\mathcal{A} \simeq ld$  la surface du cylindre de fluide et  $\tau_v \simeq -\eta v/d$  la contrainte visqueuse (dirigée vers le bas), soit

$$F_v = -\eta vl,$$

(force de Stokes), où  $v$  est la vitesse ascendante du fluide. On a considéré ici que le gradient de vitesse était concentré sur une épaisseur de l'ordre de  $d$ . Pour une faible température,  $F_v$

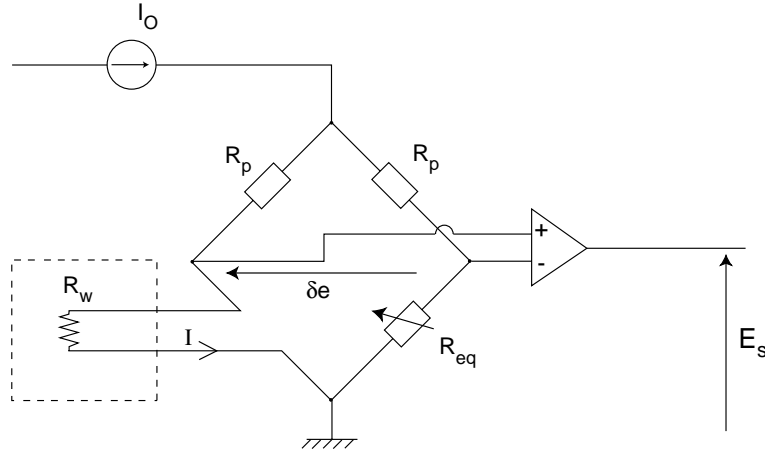


FIGURE 1.5 – Circuit électronique utilisé en anémométrie à courant constant.

compense  $F_A$  et le fluide reste stable. En revanche à température plus élevée, après un temps d'accélération, l'élément de fluide atteint une vitesse limite de convection  $v_{conv}$  donnée par l'équilibre des forces  $F_v + F_A = 0$ , soit :

$$v_{conv} \simeq \frac{\Delta T}{T_0} \frac{gd^2}{\nu}.$$

Pour un fil de diamètre de l'ordre de  $10 \mu\text{m}$ , on obtient  $v_{conv} \simeq 10 \mu\text{/s}$ , ce qui est très faible comparé aux vitesses que l'on souhaite généralement mesurer : la convection thermique n'est donc pas un problème en pratique. En revanche, pour des anémomètres de plus grande taille  $d$  (comme celui montré en figure 1.14f), on peut avoir  $v_{conv}$  beaucoup plus élevé, ce qui peut modifier les transferts thermiques et donc perturber les mesures.

## 1.3 Électronique d'asservissement

### 1.3.1 Anémométrie à Courant Constant (CCA)

La première stratégie, la plus simple, consiste à mesurer les fluctuations de  $R_w$  à  $I$  constant. Les fluctuations temporelles de vitesse induisent des fluctuations de la résistance de fil, que l'on peut écrire sous la forme

$$R_w(t) = \bar{R}_w + \delta R_w(t).$$

Afin d'obtenir une mesure précise des fluctuations  $\delta R_w(t)$ , il est judicieux de retrancher la valeur moyenne  $\bar{R}_w$ . Ceci s'effectue au moyen d'un montage électronique, le pont de Wheatstone, représenté en fig. 1.5. Dans ce circuit, les deux branches sont équilibrées en moyenne (on règle la résistance d'équilibre  $R_{eq} = \bar{R}_w$ ), et reçoivent donc chacune un courant  $I = I_0/2$ , où  $I_0 = cste$  est le courant d'alimentation du pont ; la tension mesurée  $\delta e$  est donc nulle.

Les fluctuations de résistance  $\delta R_w(t)$  vont induire un léger déséquilibre du pont, mesurable par la fluctuation de tension

$$\delta e(t) = I(R_w(t) - R_{eq}) = I \delta R_w(t).$$

L'avantage de cette méthode est que  $\delta e$  est nul en moyenne, et peut donc être amplifié ( $E_s = G \delta e$ , où  $G \simeq 10^3$  est le gain de l'amplificateur) afin d'optimiser le rapport signal/bruit.

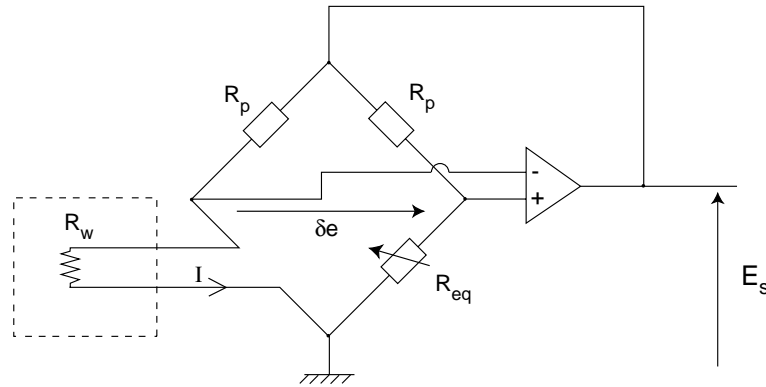


FIGURE 1.6 – Circuit électronique avec boucle de rétroaction utilisé en anémométrie à température constante.

Cette méthode a été très employée jusque dans les années 1960, où elle a été supplantée par l'anémométrie à température constante, de réalisation plus compliquée mais de principe plus naturel.

Le principal défaut de la CCA tient dans le fait que la température du fil  $T_w$  fluctue. Or, le bilan de puissance du paragraphe 1 a été obtenu avec l'hypothèse de stationnarité  $T_w = cste$ , qui n'est donc pas respectée ici ! Ce bilan peut toutefois rester valide à condition que le temps caractéristique de mise à l'équilibre de la température (inertie thermique  $\propto mc$ ) soit petit comparé au temps typique des fluctuations turbulentes. En pratique, ce temps n'est pas négligeable, et ne permet des mesures qu'à fréquence modérée, limitée typiquement à 700 Hz. Au-delà, le fil chaud agira comme un filtre passe-bas, éventuellement compensable électroniquement.

Un autre problème rend les fluctuations de  $T_w$  peu satisfaisantes : la conductivité thermique  $k$  et la viscosité cinématique  $\nu$  sont choisies à la température du film,  $k_f = k(T_f) = k((T_w + T_0)/2)$  et  $\nu_f = \nu(T_f)$ . Bien que cette définition ne soit pas justifiée rigoureusement, il est souhaitable que cette température reste constante afin de ne pas multiplier les raisons possibles de fluctuations de transfert de chaleur.

Notons enfin que, dans la limite d'un courant  $I$  très faible, on a  $T_w \simeq T_0$ , et la mesure de  $e = R_w I$  donne donc une mesure de la température du fluide  $T_0$  : c'est le principe du thermomètre à fil froid.

### 1.3.2 Anémométrie à Température Constante (CTA)

Les défauts de la CCA (inertie thermique et propriétés physiques du film variables) seront corrigés si l'on trouve le moyen de garder la température du fil  $T_w$ , et donc la résistance  $R_w$ , constante : c'est le principe de la CTA.

Dans cette seconde stratégie, c'est le courant  $I$  qui fluctue, et que l'on mesure à travers les fluctuations de la tension  $e(t) = R_w I(t)$ . Ainsi, l'équation fondamentale de l'anémométrie (1.10) devient  $e = R_w I = \sqrt{R_w(R_w - R_0)(a + b\sqrt{U})}$ , soit une tension de sortie

$$E_s = \sqrt{A + B\sqrt{U}}. \quad (1.11)$$

Les constantes  $A$  et  $B$  peuvent dépendre des nombres sans dimension mentionnés précédemment (Prandtl, Mach,  $l/d...$ ).

Comment réaliser cette condition  $T_w = cste$  ?

Supposons une augmentation brusque de la vitesse  $U$ , conduisant à une diminution de  $T_w$  et donc de  $R_w$ . La tension  $e = R_w I$  diminue. Il faut trouver un moyen d'augmenter  $I$  afin de chauffer la sonde, et ainsi rétablir  $R_w$  et  $T_w$  à leur valeur initiale. Pour cela, il faut introduire une rétroaction (*feedback*) négative entre  $e$  et  $I$  : cette rétroaction est effectuée en bouclant la mesure du pont  $-\delta e = -I(R_w - R_0)$  sur l'alimentation du pont lui-même (voir le schéma électronique, fig. 1.6). Ainsi, la diminution de  $\delta e$  va conduire à une augmentation de  $I$ , et  $R_w$  va retrouver sa valeur initiale. La mesure de la rétroaction  $E_s = G \delta e$  (où  $G$  est le gain de l'amplificateur) fournit donc le signal recherché.

Contrairement au circuit CCA, ici le pont n'est jamais à l'équilibre : la tension  $E_s$  mesure justement le déséquilibre du pont, maintenu grâce à la rétroaction. L'amplitude moyenne de ce déséquilibre est réglée au moyen de la résistance  $R_{eq}$  ( $\neq \bar{R}_w$  dans ce cas), permettant ainsi de choisir la température d'asservissement  $T_w$  (voir le paragraphe 1.3.3).

Ces étapes de compensation sont réalisées quasi instantanément par le circuit électronique : le temps caractéristique d'équilibre du pont avec rétroaction n'est limité que par la rapidité de l'électronique, et est donc très petit devant le temps caractéristique d'équilibre thermique de la sonde. Une telle boucle d'asservissement permet de mesurer des fluctuations pouvant atteindre le MHz, amplement suffisantes pour des mesures en écoulement turbulent.

L'étude détaillée du circuit CTA dépasse amplement le cadre de ces notes de cours. D'un point de vue pratique, nous verrons que le temps de réponse d'un tel circuit peut être estimé simplement (paragraphe 1.3.5).

### 1.3.3 Coefficient de surchauffe

Disposant d'un anémomètre à fil chaud en fonctionnement CTA, le seul paramètre sur lequel on peut jouer est la résistance d'équilibre  $R_{eq}$  du pont, ou de façon équivalente le *coefficient de surchauffe* :

$$a = R_w/R_0 > 1$$

(on ne confondra pas ce coefficient  $a$  avec celui intervenant dans l'équation 1.10). C'est ce paramètre qui permet en pratique de choisir la température  $T_w$  de fonctionnement :  $T_w = T_0 + (a - 1)/\alpha$ . Afin d'optimiser le rapport signal/bruit, il est évidemment avantageux de choisir  $a$  suffisamment grand, tout en restant compatible avec la gamme d'amplification du circuit électronique. En pratique, un coefficient de l'ordre de 1,5 à 2 est utilisé (soit une surchauffe  $T_w - T_0$  de l'ordre de 100 à 200°C).

Certaines applications particulières nécessitent cependant des précautions liées aux propriétés du fluide. Pour des mesures dans l'eau par exemple, on prendra soin de ne pas avoir  $T_w > 100^\circ\text{C}$  pour éviter la cavitation sur le fil (nucléation de bulles de vapeur), qui affecterait grandement les transferts de chaleur.

### 1.3.4 Calibration empirique

Puisqu'il est difficile de contrôler tous les paramètres intervenant dans la loi de transfert de chaleur, on procède à une calibration empirique : en fonctionnement CTA, on effectue une série de mesures de la tension de sortie  $E_s$  pour différentes vitesses imposées  $U$  (voir la figure 1.7), et on ajuste les coefficients  $A$  et  $B$  de la loi de King (1.11). Il suffit ensuite

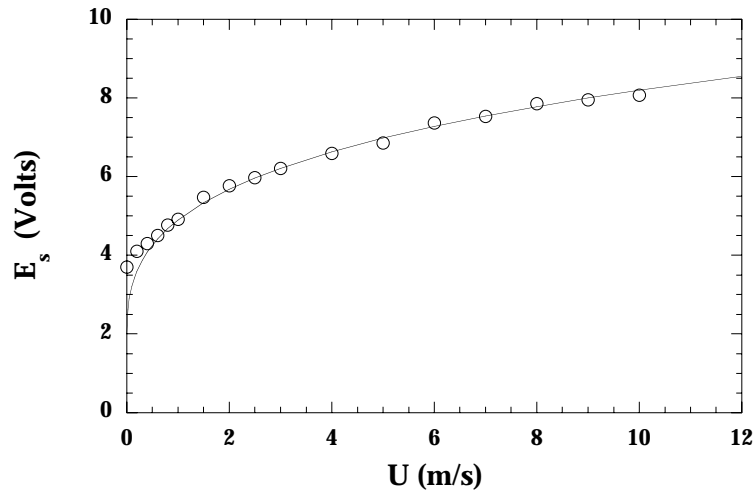


FIGURE 1.7 – Exemple de calibration expérimentale avec ajustement par la loi de King (1.11).

d'inverser (électroniquement ou informatiquement) la loi de calibration pour en déduire  $U(t)$  à partir du  $E_s(t)$  mesuré.

Remarquons que la non-linéarité de cette loi de King (1.11) (c'est-à-dire que  $\Delta E_s$  n'est pas proportionnel à  $\Delta U$ ) est la principale difficulté de l'utilisation de l'anémométrie à fil chaud : Une petite erreur sur la mesure de  $E_s$  peut conduire à une erreur importante sur  $U$ . Il convient donc de procéder à la calibration de l'anémomètre avec un grand soin, et de restreindre son utilisation à la plage de valeur où celui-ci a été étalonné. Ce problème de non-linéarité ne se pose pas avec l'anémométrie Laser Doppler, qui présente une réponse linéaire aux fluctuations de vitesse, et donc une moins grande sensibilité aux incertitudes de calibration.

Expérimentalement, on observe qu'une loi de King modifiée,

$$E_s^2 = A + BU^n$$

(avec  $n$  entre 0.4 et 0.6), ajuste souvent mieux les données. Afin de déterminer les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $n$ , on mesure à vitesse nulle<sup>5</sup>  $A = E_s^2$ , puis on trace en coordonnées logarithmiques

$$\log(E_s^2 - A) = \log B + n \log U.$$

On obtient l'exposant  $n$  en mesurant la pente de la droite  $\log(E_s^2 - A)$  en fonction de  $\log U$ , et  $B$  grâce à l'ordonnée à l'origine.

Une relation empirique de ce type souvent utilisée est la relation de Collis et Williams (1959), qui donne

$$\begin{aligned} n &= 0,45 & \text{pour} & & 0,02 < \text{Re}_w < 44, \\ n &= 0,51 & \text{pour} & & 44 < \text{Re}_w < 140. \end{aligned}$$

La tendance de  $n$  avec  $\text{Re}_w$  se comprend bien physiquement : en deçà de  $\text{Re}_w \simeq 44$ , l'écoulement en aval du cylindre est stationnaire (et composé de deux zones de recirculation symétriques pour  $\text{Re}_w > 5$ ). Au-delà de  $\text{Re}_w \simeq 44$ , l'écoulement devient asymétrique et instationnaire, et

5. en se méfiant des effets de convection naturelle, voir paragraphe 1.2.4.

des tourbillons se détachent périodiquement du cylindre<sup>6</sup>. On comprend bien que ces tourbillons vont emporter du fluide chaud, favorisant ainsi le transfert de chaleur, conduisant à un exposant  $n$  plus grand. Pour  $Re_w > 140$ , l'écoulement devient désordonné, le transfert de chaleur est encore meilleur, mais cette situation n'est pas rencontrée en pratique pour les anémomètres usuels.

### 1.3.5 Réponse en fréquence

Il est fondamental de pouvoir caractériser précisément la fréquence maximale des variations de vitesse que l'anémomètre sera capable de mesurer, spécialement si l'on s'intéresse aux fluctuations turbulentes. Ce problème est assez délicat, car intervient un grand nombre de paramètres, liés aux propriétés du fil chaud lui-même ainsi que de l'électronique d'asservissement. On préférera une approche pratique, qui consiste à mesurer le temps de relaxation du signal de sortie en réponse à une perturbation extérieure bien contrôlée. Cependant, il est clair qu'imposer une fluctuation de vitesse de durée et d'amplitude bien calibrées est une tâche quasiment impossible. On emploie alors la méthode dite du *square wave test* (test du créneau), consistant à imposer un saut instantané de tension aux bornes de l'anémomètre et d'en observer la conséquence sur  $E_s(t)$ .

Cette méthode repose sur l'idée qu'une fluctuation de vitesse  $U$  conduit à une fluctuation de température  $T_w$ , qui revient à l'équilibre soit au bout d'un temps lié à l'inertie thermique (CCA), soit lié au temps de compensation de la rétroaction (CTA). Dans tous les cas, le *square wave test* simule un tel saut de vitesse en imposant un saut de température par effet Joule<sup>7</sup>. Le signal de sortie  $E_s(t)$  consiste alors en un saut, qui relaxe approximativement de façon exponentielle  $\sim e^{-t/t_0}$ , permettant une mesure pratique du temps de réponse  $t_0$ . Ce temps peut dépendre de nombreux facteurs, notamment du coefficient de surchauffe  $a$  et du gain de la boucle de rétroaction  $G$ .

Ce temps de réponse  $t_0$  intègre tous les temps de réponse présents dans le système : inertie thermique, effets capacitifs dans les câblages, réponse de l'électronique... Pour les anémomètres usuels en fonctionnement CCA, on obtient une fréquence de coupure  $f_c \sim 1/t_0$  de l'ordre de 700 Hz, tandis qu'en fonctionnement CTA cette fréquence peut atteindre le MHz. Notons que, dans ce dernier cas, un autre effet lié à la résolution spatiale (de l'ordre de  $l$ , voir paragraphe 1.4.2) limite en fait la résolution temporelle à  $f_c \sim U/l \simeq 10 - 100$  kHz.

## 1.4 Effets de longueur finie, sensibilité angulaire

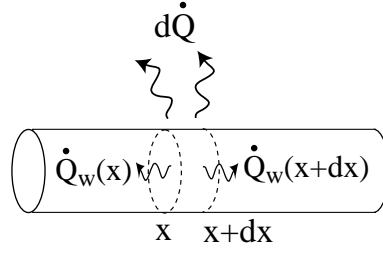
### 1.4.1 Uniformité du profil de température le long du fil

Afin d'établir la relation fondamentale (1.10), nous avons supposé que la température du fil  $T_w$  était indépendante du temps (ce qui est possible grâce au montage CTA) et uniforme le long du fil, ce qui suppose  $l/d \gg 1$ . En pratique, il est important de savoir en quoi la longueur finie du fil influe sur les transferts de chaleur. Nous allons donc chercher à établir le

6. Cette situation présente l'inconvénient d'induire une haute fréquence parasite dans le signal  $\sim d/5U$ , surtout si le détachement tourbillonnaire se trouve à la fréquence de résonance du fil tendu.

7. Notons ici le défaut de cette méthode : alors que la fluctuation de vitesse induit un changement *superficiel* de température (*via* le transfert thermique en *surface*), le *square wave test* impose un chauffage en *volume* par effet Joule.



FIGURE 1.8 – Bilan de puissance sur une petite tranche d'épaisseur  $dx$  du fil.

profil de température  $T_w(x)$ , en supposant pour simplifier le problème en régime permanent ( $U = cste$ ,  $\partial T_w / \partial t = 0$ ).

Supposons un fil de longueur  $l$  dont les extrémités, en  $x = -l/2$  et  $x = l/2$  sont reliées aux supports (broches) à température  $T_0$  égale à celle du fluide. Nous allons devoir tenir compte du terme de conduction du fil vers le support  $\sim k_w(T_w - T_0)$  (où cette fois  $k_w$  est la conductivité thermique du fil, typiquement  $100 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$  pour le tungstène) mentionné au premier paragraphe.

Considérons une tranche de fil de longueur infinitésimale  $dx$  et de section  $S = \pi d^2/4$  (voir la figure 1.8), et écrivons un bilan de puissance sur cette petite tranche :

- La puissance apportée par effet Joule est  $d\dot{W} = (R_w dx/l)I^2$ , où  $(R_w dx/l)$  est la résistance de la petite tranche.
- La puissance transférée au fluide s'exprime sous la forme  $d\dot{Q} = \pi dx k_f(T_w(x) - T_0)\text{Nu}$ , où l'on a repris l'expression de  $\dot{Q}$  (1.3) en remplaçant  $l$  par  $dx$ , avec  $T_w$  dépendant de  $x$  cette fois-ci.
- Enfin, deux termes de transfert conductifs, l'un vers la gauche (en  $x$ ) et l'autre vers la droite (en  $x + dx$ ), dont le bilan peut s'écrire

$$d\dot{Q}_w = \dot{Q}_w(x + dx) - \dot{Q}_w(x) = S k_w \left( \frac{\partial T_w}{\partial x} \right)_{x+dx} - S k_w \left( \frac{\partial T_w}{\partial x} \right)_x = S k_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} dx$$

(où l'on néglige la variation de  $k_w$  avec la température).

Tenant compte de ce terme supplémentaire, le bilan de puissance  $d\dot{Q}_w + d\dot{W} = d\dot{Q}$  s'écrit pour la tranche infinitésimale (en divisant l'équation par  $dx/l$ ) :

$$\frac{\pi d^2}{4} l k_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + R_w I^2 = \pi l k_f (T_w(x) - T_0) \text{Nu}.$$

En posant  $\theta(x) = T_w(x) - T_0$ , et en reprenant l'expression  $R_w = R_0(1 + \alpha\theta)$ , on obtient :

$$\frac{\pi d^2}{4} l k_w \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + R_0(1 + \alpha\theta) I^2 = \pi l k_f \theta \text{Nu},$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + K_1 \theta = K_2, \quad (1.12)$$

où l'on a posé :

$$K_1 = \frac{4\alpha R_0 I^2}{\pi d^2 l k_w} - \frac{4k_f \text{Nu}}{k_w d^2} \quad \text{et} \quad K_2 = -\frac{4R_0 I^2}{\pi d^2 l k_w}. \quad (1.13)$$

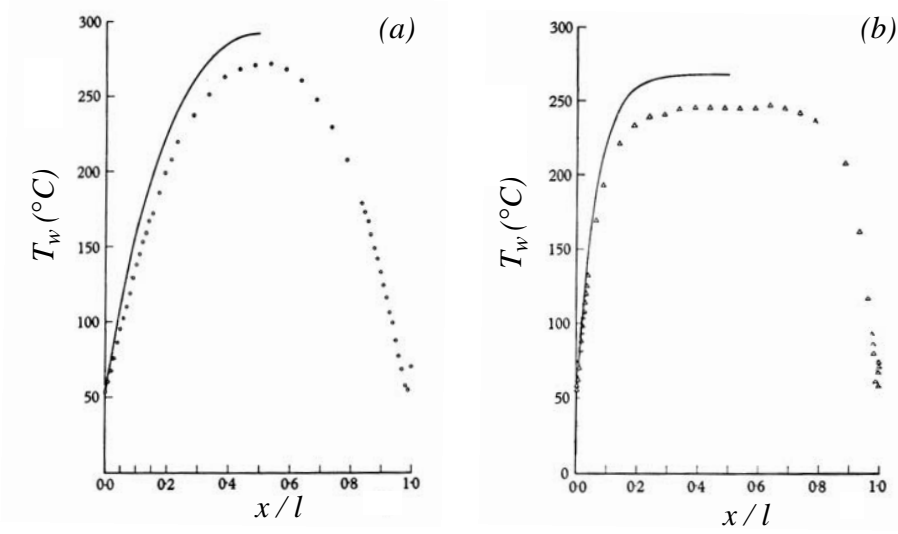


FIGURE 1.9 – Profil de température le long du fil. (a) :  $l/d \simeq 100$ . (b) :  $l/d \simeq 400$ . Le trait plein est la prédiction (1.14) pour  $x < l/2$ . D’après Champagne *et al* (1967), reproduit de Lomas (1986) [4].

La solution de l’équation différentielle (1.12) dépend du signe de  $K_1$  : Oscillations pour  $K_1 > 0$  (cf. l’équation  $m\ddot{x} + kx = 0$ ) ou relaxation exponentielle pour  $K_1 < 0$ . Physiquement, on s’attend évidemment à une solution de type exponentielle, ce que l’on peut vérifier en montrant que  $K_1$  est toujours négatif en pratique : en écrivant  $K_1 = p - q$ , on peut former le rapport

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha R_0 I^2}{\text{Nu} \pi l k_f} \simeq \alpha (T_w - T_0)$$

(car, en ordre de grandeur, on a toujours  $R_0 I^2 \sim \pi l k_f (T_w - T_0) \text{Nu}$ .) Avec les valeurs données précédemment,  $\alpha \simeq 5.10^{-3} \text{ K}^{-1}$ , on voit que  $p/q < 1$ , soit  $K_1 < 0$ . La solution de l’équation différentielle est donc bien du type exponentielle,

$$\theta(x) = c_0 + c_1 e^{-x/l_c} + c_2 e^{x/l_c},$$

où l’on a introduit la “longueur de refroidissement” (“cooling length”)  $l_c = 1/\sqrt{|K_1|}$ , soit (en négligeant la première contribution du terme  $K_1$ , eq. (1.13)) :

$$l_c \simeq \frac{d}{2} \sqrt{\frac{k_w}{k_f \text{Nu}}}.$$

En utilisant les conditions aux limites, on obtient finalement le profil de température dans le fil  $T_w(x) = c_{ste} + c_{ste}' \cosh(x/l_c)$ , qui est maximal au centre et vaut  $T_0$  en  $x = \pm l/2$ , permettant d’identifier les constantes :

$$T_w(x) = T_{max} + (T_0 - T_{max}) \frac{\cosh(x/l_c) - 1}{\cosh(l/2l_c) - 1}. \quad (1.14)$$

On a donc  $T_w(x) \simeq T_{max}$  dans la région centrale, raccordé aux extrémités  $T_w(\pm l/2) = T_0$  sur une distance caractéristique  $l_c \simeq d(k_w/4k_f \text{Nu})^{1/2}$ .

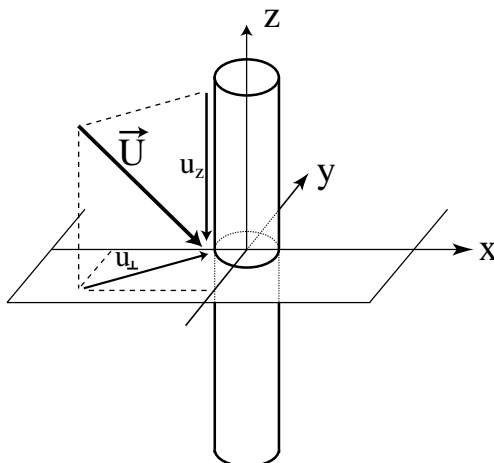


FIGURE 1.10 – Décomposition de la vitesse incidente  $\vec{U}$  en une composante axiale  $u_z$  et une composante normale  $u_{\perp} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$  dans le plan  $(x, y)$ .

Avec les ordres de grandeurs pour les conductivités thermiques  $k_w$  et  $k_f$ , et  $\text{Nu} \simeq 10$ , on a  $l_c \simeq 30d$ . Puisqu'on veut une température du fil la plus uniforme possible, on va chercher à avoir  $l_c \ll l$ , et donc à minimiser le diamètre du fil  $d$ . Avec les valeurs numériques déjà mentionnées, on peut calculer par exemple  $l_c \simeq 0.4l$  pour  $l/d = 100$  et  $l_c \simeq 0.1l$  pour  $l/d = 400$  (fig. 1.9). Dans ces conditions, environ 20 % à 80 % de la région centrale est à température  $T_w \simeq T_{max} = \text{cste}$ . On voit qu'il est donc très important de chercher à minimiser la conductivité thermique  $k_w$  et à maximiser le rapport d'aspect  $l/d$ , tout en gardant  $l$  d'une taille raisonnable. En pratique,  $l \simeq 1 \text{ mm}$  et  $d \simeq 5 \mu\text{m}$  ( $l/d \simeq 200$ ) sont un bon compromis.

## 1.4.2 Sensibilité angulaire

Jusqu'à présent nous nous sommes contentés d'examiner l'influence de la vitesse sur le transfert de chaleur, mais nous n'avons pas examiné l'influence de la *direction* de la vitesse.

Supposons le fil selon  $z$ , et soit  $(x, y)$  le plan normal au fil (fig. 1.10). La norme de la vitesse  $U$  peut se décomposer :

$$U = \sqrt{u_{\perp}^2 + u_z^2}, \quad \text{avec} \quad u_{\perp}^2 = u_x^2 + u_y^2.$$

Dans le cas d'un fil infiniment long, il est clair que la composante  $u_z$  ne peut pas participer au transfert de la chaleur fil  $\rightarrow$  fluide. L'anémomètre ne sera sensible qu'à la composante normale  $u_{\perp}$ . Toutefois, dans le cas plus réaliste d'un fil de longueur finie, la composante  $u_z$  pourra intervenir *via* un transfert de chaleur au niveau des extrémités du fil, et l'anémomètre "sentira" une vitesse effective

$$U_{eff} = \sqrt{u_{\perp}^2 + k^2 u_z^2},$$

où le coefficient  $k$  dépend du rapport d'aspect  $l/d$ , et doit tendre vers 0 pour  $l/d \rightarrow \infty$ . La figure 1.11 montre qu'à partir de  $l/d > 400$  environ, le fil chaud mesure bien  $u_{\perp}$  à mieux que 10 %. Le cas  $l/d \simeq 1$  doit conduire à  $k \simeq 1$ , c'est la situation d'un anémomètre isotrope. Cependant, nous avons vu (paragraphe 1.4.1) que ce cas n'est pas compatible avec une température  $T_w(x)$  uniforme le long du fil.

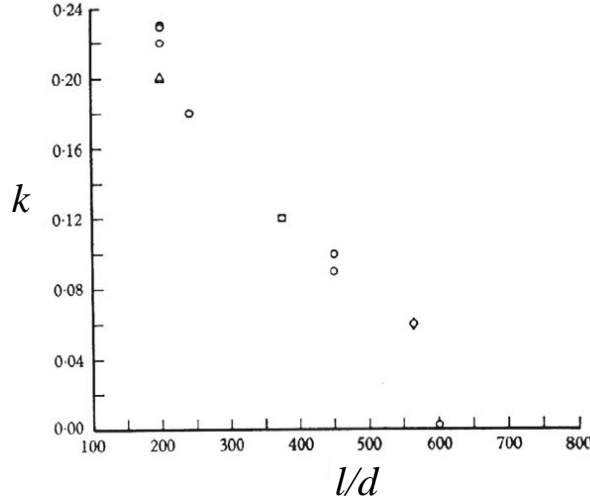


FIGURE 1.11 – Coefficient  $k$  de sensibilité à la composante axiale de la vitesse en fonction du rapport d'aspect  $l/d$ . D'après Champagne *et al* (1967), reproduit de Lomas (1986) [4].

Par ailleurs, nous verrons au paragraphe 1.5.1 que dans le cas de mesure de fluctuations turbulentes à grande vitesse d'advection, l'anémomètre ne sera sensible essentiellement qu'à la composante  $u_x$  de la vitesse (dans la direction de  $\bar{u}$ ).

Notons ici que, dans le cas où le champ de vitesse présente des variations sur des distances inférieures à  $l$ , le fil ne sera sensible qu'au transfert moyen de chaleur, c'est-à-dire à la norme  $u_{\perp}$  moyennée selon  $z$  : la résolution spatiale du fil chaud est donc limitée à  $l$ , et non à  $d$  comme on pourrait s'y attendre. Comme vu au paragraphe (1.3.5) il en découle une résolution temporelle de l'ordre de  $f_c \sim U/l \sim 10 - 100$  kHz.

## 1.5 Mesures des fluctuations turbulentes

### 1.5.1 Sélection de la composante longitudinale de la vitesse

Idéalement, l'anémomètre à fil chaud n'est sensible qu'à la composante de la vitesse dans le plan  $(x, y)$  normal au fil,  $u_{\perp} = \sqrt{u^2 + v^2}$  (paragraphe 1.4.2). Cependant, dans la plupart des cas, l'expérimentateur sera intéressé par la mesure d'une seule composante de la vitesse, par exemple  $u(t)$  selon  $x$ . Une telle mesure est toutefois possible dans certaines conditions.

Supposons un écoulement turbulent advecté à une vitesse moyenne  $\bar{u}$  dirigée selon  $x$ , orthogonale à l'axe  $z$  du fil. On suppose que la turbulence est isotrope, c'est-à-dire que les fluctuations quadratiques moyennes  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$  et  $\overline{w'^2}$  sont égales, et on note

$$\tau = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}}$$

le *taux de fluctuation*, supposé  $\ll 1$  (écoulement moyen très grand devant les fluctuations turbulentes). En décomposant la vitesse sous la forme *moyenne + fluctuation*  $u(t) = \bar{u} + u'(t)$ , la mesure instantanée de la vitesse  $u_{\perp}(t)$  peut s'écrire au premier ordre :

$$u_{\perp}(t) = \sqrt{(\bar{u} + u'(t))^2 + v'(t)^2} \simeq \bar{u} \sqrt{1 + 2\frac{u'(t)}{\bar{u}} + \frac{u'(t)^2}{\bar{u}^2} + \frac{v'(t)^2}{\bar{u}^2}} \simeq \bar{u} + u'(t) + o(\tau^2),$$

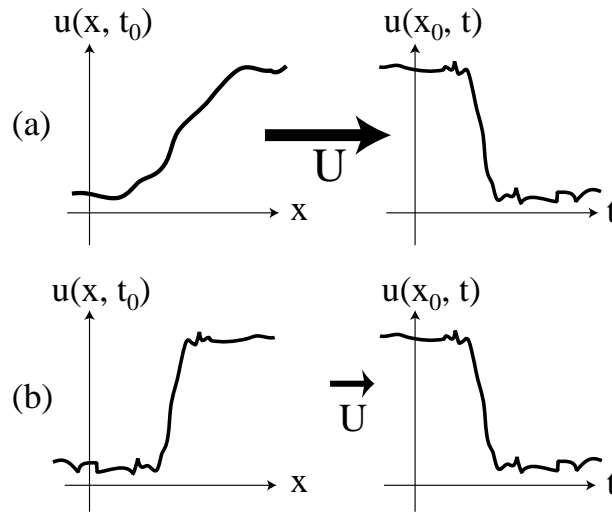


FIGURE 1.12 – A gauche, coupe selon  $x$  du champ de vitesse instantané; à droite, signal temporel mesuré en un point  $x_0$ . Une dérivée spatiale faible advectée à vitesse  $U$  forte (a) donnera le même signal temporel qu’une dérivée spatiale forte advectée à vitesse  $U$  faible (b).

c’est-à-dire que l’anémomètre est essentiellement sensible à la composante de la vitesse parallèle à l’écoulement moyen (selon  $x$ ). En moyennant cette équation, on obtient la vitesse moyenne apparente

$$\bar{u}_\perp \simeq \bar{u} (1 + \tau^2),$$

qui est bien égale à  $\bar{u}$  au premier ordre.

Si en revanche la condition de forte advection ( $\tau \ll 1$ ) n’est pas respectée, il est impossible de séparer les contributions  $u$  et  $v$  de la vitesse mesurée  $u_\perp$ ; en outre, la vitesse moyenne apparente  $\bar{u}_\perp$  ainsi que l’écart-type des fluctuations ne seront pas facilement liés aux vraies valeurs, conduisant à une sous-estimation du taux de fluctuation réel.

**Il faut donc veiller à toujours utiliser un anémomètre à fil chaud à faible taux de turbulence, typiquement  $\tau < 20\%$ .**

### 1.5.2 L’hypothèse de Taylor

La dérivée temporelle du signal mesuré en un point fixe,  $\partial u / \partial t$ , peut s’écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{Du}{Dt} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u,$$

où  $Du/Dt$  est la variation temporelle de la vitesse le long d’une trajectoire (accélération lagrangienne). Ainsi, mesurer une forte fluctuation temporelle  $\partial u / \partial t$  peut avoir plusieurs origines :

- soit il s’agit d’une “vraie” fluctuation temporelle  $Du/Dt$ , c’est-à-dire d’une accélération (ou décélération) importante le long d’une trajectoire (sous l’effet d’un gradient de pression),
- soit il s’agit d’une variation spatiale faible advectée rapidement ( $\vec{u}$  élevé  $\cdot \vec{\nabla}u$  faible) : fig. 1.12a,

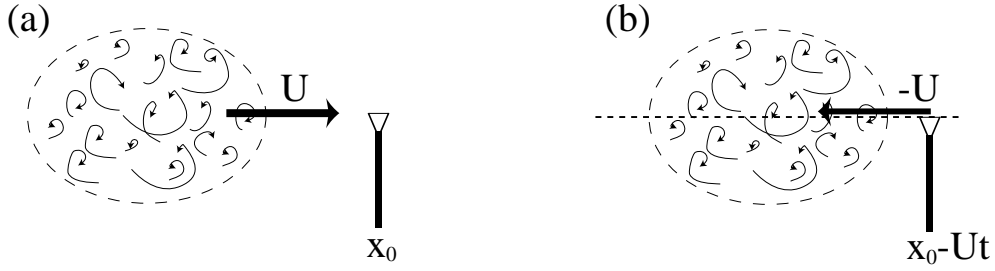


FIGURE 1.13 – L’hypothèse de Taylor : Si  $U$  est très élevé, (a) un champ de vitesse turbulent passant à vitesse  $U$  sur une sonde fixe en  $x_0$  est équivalent à (b) un champ de vitesse immobile traversé à vitesse  $-U$  par une sonde mobile.

— soit il s’agit d’une forte variation spatiale advectée lentement ( $\bar{u}$  faible  $\cdot \vec{\nabla}u$  élevé) : fig. 1.12b.

Le premier cas ne joue aucun rôle en pratique : le temps d’advection sur le diamètre de la sonde,  $d/\bar{u}$ , étant toujours très faible devant le temps typique des fluctuations turbulentes, il n’y a aucun espoir de mesurer de “vraies” fluctuations temporelles.

Dans le cas de la forte advection (taux de fluctuation  $\tau \ll 1$ ), c’est le second cas qui est le plus pertinent. Si on écrit  $\vec{u}(t) = \bar{u}\vec{e}_x + \vec{u}'(t)$ , avec  $\partial\bar{u}/\partial t = 0$  et  $\vec{\nabla}(\bar{u}\vec{e}_x) = \partial\bar{u}/\partial x \simeq 0$ , on mesure

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq -[\vec{u} \cdot \vec{\nabla}]u = -[(\bar{u}\vec{e}_x + \vec{u}'(t)) \cdot \vec{\nabla}](\bar{u} + u'(t)) \simeq -\bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x}.$$

La mesure de la dérivée temporelle en un point renseigne ainsi essentiellement sur la dérivée spatiale *longitudinale* (le long de  $\bar{u}\vec{e}_x$ ) de  $\vec{u}'(t)$ . Cette équation équivaut à écrire

$$u'(x_0, t_0 + t) \simeq u'(x_0 - \bar{u}t, t_0)$$

qui signifie : la vitesse mesurée à  $t_0 + t$  est la même que celle présente à  $t_0$  à une distance  $\bar{u}t$  **en amont** (car, pendant ce temps  $t$ , le champ de vitesse n’a pas eu le temps d’évoluer sensiblement).

Cette équivalence porte le nom d’**hypothèse de Taylor**, ou **hypothèse de la turbulence gelée**. En effet, on peut voir le signal temporel  $u'(t)$  mesuré à position  $x = x_0$  fixée comme une coupe spatiale  $u'(-x)$  à  $t = t_0$  fixé. On peut imaginer un champ de vitesse figé (*gelé*), traversé par la trajectoire d’une sonde infiniment rapide qui “verrait” une coupe  $u'(-x)$  instantanément (fig. 1.13).

De même que la sélection de la composante longitudinale (par. 1.5.1), l’hypothèse de Taylor n’est valable que dans la limite  $\tau \ll 1$ . Cette hypothèse est très bien vérifiée en soufflerie, turbulence de grille ( $\tau = 3$  à  $8$  %), mais peut être sujette à caution en turbulence de jet ( $\tau \sim 25$  %) et en turbulence atmosphérique (25 jusqu’à 35 %).

L’hypothèse de Taylor joue un rôle clef dans les analyses statistiques des fluctuations turbulentes. La dissipation d’énergie ou les structures tourbillonnaires, par exemple, sont liées aux fluctuations *spatiales* et non *temporelles* du champ de vitesse.

## 1.6 Autres types d’anémomètres

A partir du principe de base de l’anémométrie à fil chaud, de nombreuses variantes existent afin d’étendre ou d’affiner les mesures possibles :

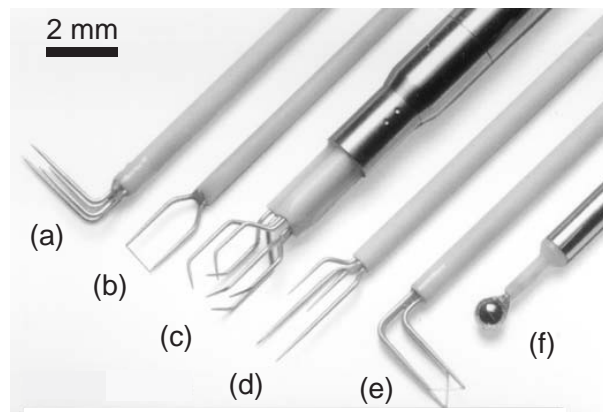


FIGURE 1.14 – Quelques anémomètres. (b) : Fil chaud simple, (a)-(e) : fils chauds doubles, (c) : fil chaud triple, (d) : fil chaud avec thermomètre à fil froid, (f) : film chaud sphérique. D'après document Dantec [1].

- Anémomètres en X : ensemble de deux (ou plus) anémomètres croisés afin de mesurer plusieurs composantes de la vitesse (fig. 1.14a,c,e), en d'en déduire par exemple une (ou plusieurs) composantes de la vorticité.
- Anémomètres avec correction de température : un petit thermomètre (*fil froid*) placé à proximité du fil chaud permet de compenser les fluctuations de température du fluide (fig. 1.14d). Nécessite une calibration des coefficients de la loi d'étalonnage à différentes valeurs de la température. Se méfier de possibles contaminations (le fil chaud chauffe le fil froid!). Permet en outre des mesures de corrélation vitesse – température.
- Anémomètres à films chauds, ou le fil est remplacé par petit dépôt de nickel sur un support de quartz, souvent conique ou biseauté, voire sphérique (pour mesures isotropes, cf. fig. 1.14f). Plus intrusifs et de résolution spatiale moindre, les anémomètres à films chauds sont utiles pour des mesures en présence d'impuretés qui pourraient endommager le fil (notamment dans l'eau non filtrée), voire dans des fluides corrosifs.

## 1.7 Ce qu'il faut retenir, en 5 formules

Le bilan de puissance sur un fil est donné par

$$R_w I^2 = \pi l k_f (T_w - T_0) \text{Nu},$$

où le nombre de Nusselt  $\text{Nu} = f(\text{Re}_w)$  mesure l'efficacité du transfert convectif. Ce nombre peut s'écrire  $\text{Nu} = a_0 + b_0 \sqrt{\text{Re}_w}$ , conduisant à la relation fondamentale de l'anémométrie

$$\frac{R_w I^2}{R_w - R_0} = a + b \sqrt{U}.$$

En utilisant dans le circuit à température constante (CTA), la relation précédente permet d'en déduire la tension en sortie  $E_s$  :

$$E_s = \sqrt{A + B \sqrt{U}}.$$

L'utilisation en CTA permet de s'affranchir de l'inertie thermique de la sonde, et permet ainsi d'atteindre une résolution temporelle de l'ordre de 100 kHz. En présence d'un écoulement moyen  $\bar{u}$  fort, la vitesse mesurée instantanée est essentiellement la composante selon  $U$  de la vitesse instantanée :

$$u_{\perp}(t) = \bar{u} + u'(t).$$

Cette mesure temporelle peut s'interpréter, *via* l'hypothèse de Taylor (forte advection moyenne), comme une mesure spatiale :

$$u'(x) \simeq u'(x_0 - \bar{u}t).$$

## 1.8 Annexes

Fluides à 20°C	Air	Eau
Densité	$\rho = 1,2 \text{ Kg/m}^3$	$\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$
Viscosité dynamique	$\eta = 18 \cdot 10^{-6} \text{ Kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$	$\eta = 10^{-3} \text{ Kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
Viscosité cinématique	$\nu = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
Nombre de Prandtl	$Pr = 0,7$	$Pr = 7$
Conductivité thermique	$k_f = 0,02 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$	$k_f = 0,6 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$
Chaleur massique	$c_p = 1000 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$c_p = 4200 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Fils à 200°C	Tungstène (W)	Platine (Pt)
Densité	$\rho = 19 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$	$\rho = 21 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$
Conductivité thermique	$k_w = 155 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$	$k_w = 70 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$
Chaleur massique	$c = 130 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$c = 130 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Coefficient	$\alpha = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$	$\alpha = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$
Résistivité ( $R = \rho_r l / S$ )	$\rho_r = 0,55 \cdot 10^{-7} \Omega.\text{m}$	$\rho_r = 10^{-7} \Omega.\text{m}$



# Bibliographie

- [1] Document Dantec “Streamline” (1999), n° 194-111-02.
- [2] R.J. GOLDSTEIN (1983) : Fluid Mechanics Measurements – chapitre 3.
- [3] J.O. HINZE (1975) : Turbulence, McGraw-Hill Book Cie, Inc – chapitre 2.
- [4] C.G. LOMAS (1986) : Fundamentals of hot wire anemometry, Cambridge Univ. Press.
- [5] E. GUYON, J.P. HULIN ET L. PETIT (2001) : Hydrodynamique physique, CNRS Ed.
- [6] J. DÉLERY (2017) : Aérodynamique expérimentale, souffleries et méthodes de mesure, Cépaduès Editions.