

Introduction à la théorie des ondes élastiques

marc François

16 décembre 2009

Table des matières

1	Rappels unidimensionnels	3
1.1	Équation de propagation	3
1.2	Onde progressive	3
1.3	Onde sinusoïdale	4
1.4	Réflexion	4
1.5	Incidence oblique, loi de Snell-Descartes	8
2	Propagation des ondes élastiques planes en milieu anisotrope	10
2.1	Rappels : calcul indiciel et élasticité linéaire en 3D	10
2.2	Équations de propagation	11
2.3	L'onde plane progressive	11
2.4	Équation et tenseur de Christoffel	13
2.5	Conséquences de cette équation	13
2.6	Polarisations	14
2.7	Réflexion et réfraction	15
2.8	Principe de la mesure ultrasonore	16
3	Milieu isotrope	17
3.1	Le tenseur acoustique	17
3.2	Type et célérité des ondes	18

Introduction

Ce cours présente la théorie des ondes élastiques dans les solides. Celles-ci sont présentes en Génie Civil, pour les études sismiques d'une part et pour le contrôle non destructif par ultrasons d'autre part. Ce deuxième point sera abordé au niveau pratique dans la suite du cours. La théorie est tout d'abord établie en 1D, pour rappeler le phénomène, puis en 3D anisotrope, puis en 3D isotrope, plus simple et courant d'un point de vue pratique.

Informations sur l'auteur

Marc François, Maître de Conférences au Laboratoire FAST, Université Paris Sud XI, Orsay
mél. : marc.francois@u-psud.fr
page web (contenant les fichiers .pdf des cours) : <http://www.fast.u-psud.fr/~francois>

1 Rappels unidimensionnels

1.1 Équation de propagation

On considère un milieu unidimensionnel : une poutre droite (Figure 1). Les variables sont l'abscisse x et le temps t . Le champ de déplacement est $u(x, t)$, le champ de déformation $\varepsilon(x, t) = \partial u / \partial x$ et le champ de contraintes $\sigma(x, t)$. La loi de Hooke s'écrit :

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (1)$$

L'équation d'équilibre $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \vec{f} = \rho\vec{\gamma}$ (en 3D), en l'absence de forces de masse \vec{f} , se réduit à :

$$\sigma' = \rho\ddot{u} \quad (2)$$

où $\sigma' = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$ et $\ddot{u} = \partial^2 u / \partial t^2$. L'ensemble des deux donne l'équation de propagation :

$$Eu'' = \rho\ddot{u} \quad (3)$$

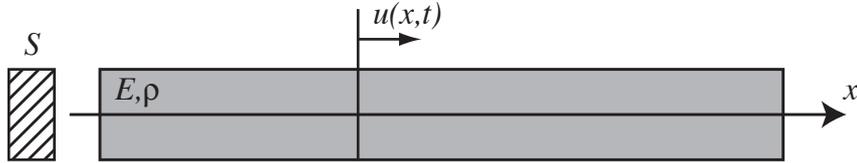


FIGURE 1 – poutre droite, onde de compression.

1.2 Onde progressive

On injecte dans cette équation différentielle une forme de solution qui suppose que le même état se retrouvera au temps $t + \Delta t$ à l'abscisse $x + C\Delta t$. Il s'agit d'une onde progressive (figure 2).

$$u = af\left(t - \frac{x}{C}\right) \quad (4)$$

On en tire l'expression des déformations et contraintes associées :

$$\varepsilon(x, t) = -\frac{a}{C}f'\left(t - \frac{x}{C}\right) \quad (5)$$

$$\sigma(x, t) = -\frac{aE}{C}f'\left(t - \frac{x}{C}\right) \quad (6)$$

On injecte cette solution dans (3) et on obtient alors :

$$\frac{aE}{C^2}f''\left(t - \frac{x}{C}\right) = \rho af''\left(t - \frac{x}{C}\right) \quad (7)$$

or f'' n'est pas identiquement nul car sinon $f' = A$ (cste) et $f = Ax + B$ est une fonction monotone qui ne correspond pas à une onde. De plus l'amplitude $a \neq 0$. D'où :

$$E = \rho C^2 \quad (8)$$

qui donne la dépendance entre la célérité de l'onde C , le module d'Young E et la masse volumique ρ . Cette célérité est indépendante de la forme du signal, c'est à dire la fonction $f(t)$.

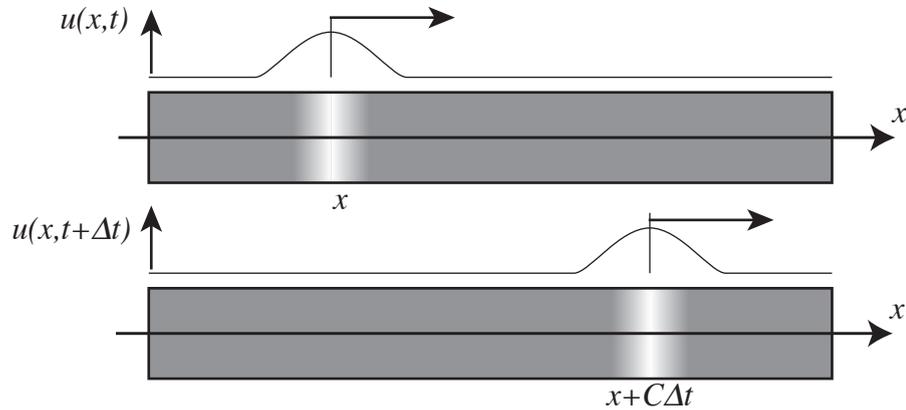


FIGURE 2 – poutre droite, onde de compression progressive. L'état de compression est représenté par le niveau de gris.

1.3 Onde sinusoïdale

On parle d'onde quand f est à moyenne nulle et de puissance finie. On peut appliquer les théories de traitement du signal à ces fonctions, et donc les représenter en série de Fourier. On pourra donc toujours se ramener à l'onde sinusoïdale d'équation :

$$f(x, t) = a \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{C}\right)\right) \quad (9)$$

avec les relations classiques entre pulsation ω (rd/s), fréquence f (Hz) et période T (seconde) :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (10)$$

La période T correspond au temps au bout duquel le signal revient identique à lui-même. La longueur d'onde λ correspond à la distance parcouru par l'onde pendant ce temps :

$$\lambda = CT = \frac{C}{f} \quad (11)$$

On utilise aussi le nombre d'onde $k = \omega/C$, qui simplifie l'écriture en :

$$f(x, t) = a \cos(\omega t - kx) \quad (12)$$

1.4 Réflexion

sur un bord encastré

À l'arrivée sur une surface encastrée (paroi totalement réfléchissante, miroir) en $x = 0$, l'onde u_i repart en sens inverse (onde u_r de vitesse $-C$). La somme des deux signaux est nulle en $x = 0, \forall t$ donc :

$$u_i(0, t) + u_r(0, t) = 0 \quad (13)$$

$$u_i = af\left(t - \frac{x}{C}\right) \quad (14)$$

$$u_r = -af\left(t + \frac{x}{C}\right) \quad (15)$$

Une onde de compression revient alors en onde de tension. Tout se passe comme si un signal inverse venait de l'autre côté du miroir.

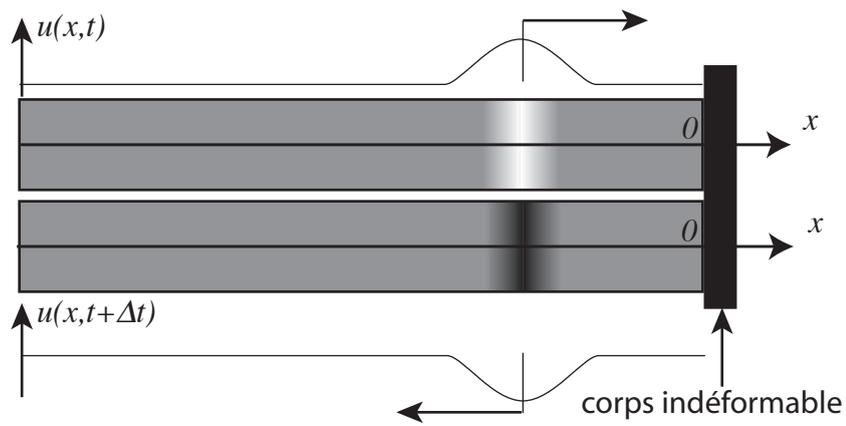


FIGURE 3 – Réflexion d'une onde sur un bord encastré.

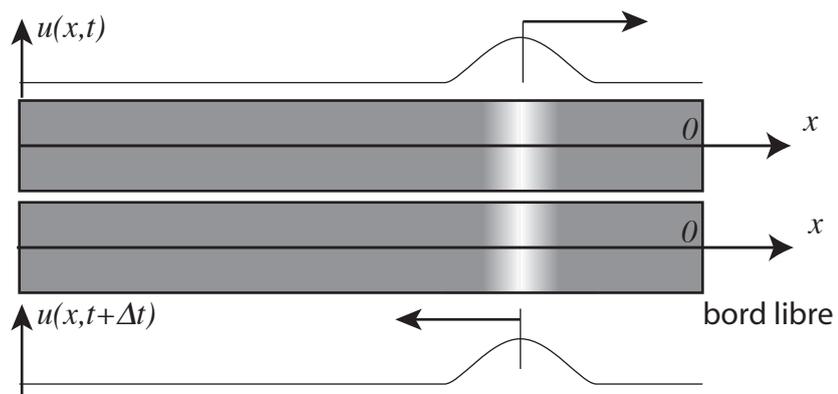


FIGURE 4 – Réflexion d'une onde sur un bord libre.

sur un bord libre

Le bord libre impose une contrainte nulle, somme des contraintes des ondes émises et réfléchies. Nous avons alors, depuis (6) :

$$\sigma_i(0, t) + \sigma_r(0, t) = 0 \quad (16)$$

$$\sigma_i = -\frac{aE}{C} f' \left(t - \frac{x}{C} \right) \quad (17)$$

$$\sigma_r = \frac{aE}{C} f' \left(t + \frac{x}{C} \right) \quad (18)$$

La déformation vaut respectivement σ_i/E et σ_r/E et les déplacements s'obtiennent par intégration par rapport à x . Il n'y a pas de constante car les déplacements sont à moyenne nulle, comme f .

$$u_i = af \left(t - \frac{x}{C} \right) \quad (19)$$

$$u_r = af \left(t + \frac{x}{C} \right) \quad (20)$$

Le bord libre renvoie donc une onde de même signe que l'onde émise, au contraire du bord encastéré.

réflexion et transmission entre deux solides et impédance acoustique

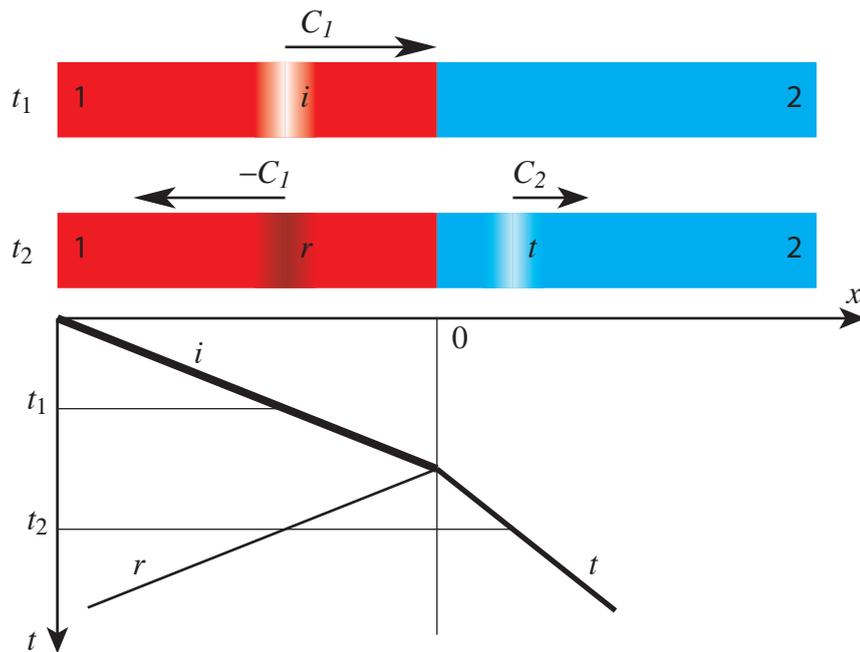


FIGURE 5 – Transmission et réflexion au passage d'une onde entre deux solides et graphe espace-temps. L'épaisseur du trait suggère les amplitudes.

Au niveau du contact entre les solides 1 et 2 en $x = 0$ les équations de continuité des poutres en compression s'écrivent en terme de saut :

$$u(0^+, t) = u(0^-, t), \forall t \quad (21)$$

$$\sigma(0^+, t) = \sigma(0^-, t) \forall t \quad (22)$$

où le terme de saut représente la valeur en x^+ moins la valeur en x^- . Nous avons en outre une onde incidente i , une onde réfléchie r et une onde transmise t . Soit :

$$u_t(0, t) = u_i(0, t) + u_r(0, t) \quad (23)$$

$$\sigma_t(0, t) = \sigma_i(0, t) + \sigma_r(0, t) \quad (24)$$

avec :

$$u_i = a_i f\left(t - \frac{x}{C_1}\right) \quad (25)$$

$$u_r = a_r f\left(t + \frac{x}{C_1}\right) \quad (26)$$

$$u_t = a_t f\left(t - \frac{x}{C_2}\right) \quad (27)$$

La condition (23) donne directement

$$a_t = a_i + a_r \quad (28)$$

La condition (24) s'écrit, compte tenu de (6) :

$$\frac{a_i E_1}{C_1} = \frac{a_r E_1}{C_1} + \frac{a_t E_2}{C_2} \quad (29)$$

En introduisant l'impédance acoustique, que l'on peut réécrire à l'aide de (8) :

$$Z = \frac{E}{C} \quad (30)$$

$$Z = \rho C \quad (31)$$

$$Z = \sqrt{\rho E} \quad (32)$$

nous avons :

$$Z_2 a_t = Z_1 (a_i - a_r) \quad (33)$$

En combinant (28, 33) il vient l'expression des coefficients de réflexion et de transmission :

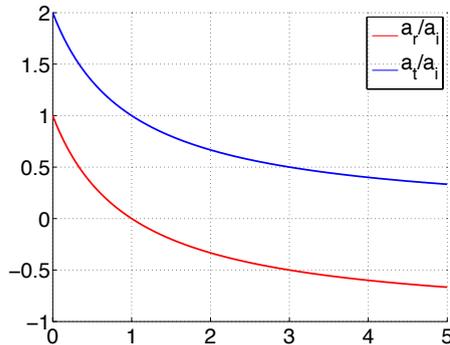


FIGURE 6 – Intensité des ondes transmises et réfléchies en fonction du rapport d'impédance Z_2/Z_1

$$\frac{a_r}{a_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (34)$$

$$\frac{a_t}{a_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (35)$$

- si $Z_2 = \infty$, $a_r = -a_i$ et $a_t = 0$ l'onde est intégralement réfléchie, on retrouve le cas du bord encastré (l'amplitude a_r négative obtenue indique que le signal est inversé).
- si $Z_2 = 0$, $a_r = a_i$ l'onde est réfléchie et de même signe, on retrouve le cas du bord libre ; le résultat sur a_t n'a pas de sens car il n'y a pas de matière ($Z_2 = 0 \Rightarrow \rho_2 = 0$ ou $E_2 = 0$).

cas des ondes sinusoïdales, onde stationnaire

On suppose qu'une onde sinusoïdale rencontre un bord encastré en $x = 0$. Les équations (14, 15) donnent, dans ce cas :

$$u = u_i + u_r = a \left(\cos \left(\omega t - \frac{\omega x}{C} \right) - \cos \left(\omega t + \frac{\omega x}{C} \right) \right) \quad (36)$$

$$= 2a \sin(\omega t) \sin \frac{\omega x}{C} \quad (37)$$

La vibration est le produit d'un terme en espace et d'un terme en temps découplés. Tout aspect de propagation disparaît, l'onde est stationnaire. Les noeuds de vibration (aucun déplacement) sont donnés par :

$$\frac{\omega x}{C} = n\pi \quad (38)$$

Entre deux noeuds on a un ventre d'amplitude maximale. Le problème du résonateur consiste à se donner deux parois fixes, une en $x = -L$ et l'autre en $x = 0$. Les ondes stationnaires qui pourront exister doivent avoir les noeuds en ces points, on en déduit la gamme de fréquences possibles pour le résonateur :

$$\frac{\omega L}{C} = n\pi \quad (39)$$

$$\omega = \frac{n\pi C}{L} \quad (40)$$

$$f = \frac{nC}{2L} \quad (41)$$

$$\lambda = \frac{C}{f} = \frac{2L}{n} \quad (42)$$

$$\Rightarrow L = n \frac{\lambda}{2} \quad (43)$$

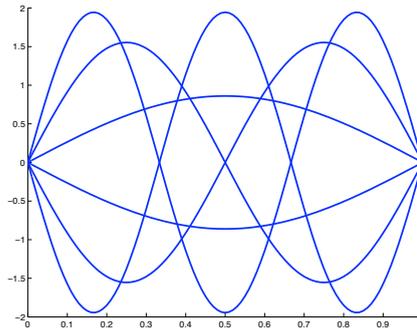


FIGURE 7 – résonateur : les trois premiers modes d'ordres $N \in \{1, 2, 3\}$

1.5 Incidence oblique, loi de Snell-Descartes

Par un calcul 2D ou 3D analogue au précédent, on démontre que les angles incidents θ_i , réfléchis θ_r et transmis θ_t obéissent à la loi de Snell-Descartes :

$$\frac{\sin(\theta_i)}{C_i} = \frac{\sin(\theta_r)}{C_r} = \frac{\sin(\theta_t)}{C_t} \quad (44)$$

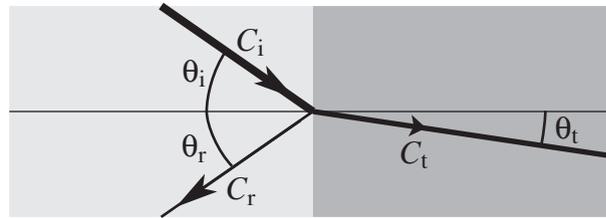


FIGURE 8 – Réflexion et transmission en incidence oblique, loi de Descartes.

Dans l'hypothèse précédente où la célérité ne dépend pas de l'angle (milieu isotrope), les angles θ_i et θ_r sont égaux. L'angle le plus faible est dans le milieu où la célérité est la plus faible. On montre que cette loi est équivalente au choix du trajet le plus rapide pour l'onde. Les équations de continuité (23, 24) sont valables, la figure (8) illustre la conservation des amplitudes par l'épaisseur des traits. Les lois de Descartes sont valables en milieu anisotrope, mais plus difficiles à calculer car la célérité dépend alors de la direction (l'angle θ ou deux angles, en 3D).

2 Propagation des ondes élastiques planes en milieu anisotrope

2.1 Rappels : calcul indiciel et élasticité linéaire en 3D

La relation de comportement $\sigma = E\varepsilon$ en 1D se généralise en 3D : chaque composante σ_{ij} du tenseur σ dépend linéairement *de toutes* les composantes ε_{kl} du tenseur ε . Il y a donc autant de coefficients que de termes ε_{kl} . On a, tensoriellement :

$$\sigma = \mathbb{C} : \varepsilon \quad (45)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (46)$$

Dans cette expression, les indices k et l sont sommés. Les indices i et j ne sont pas sommés. On rappelle la règle de sommation d'Einstein :

Les indices répétés sont des indices muets, ils sont sommés.

Les indices non répétés sont des indices francs, ils ne sont pas sommés.

Une équation indicelle représente autant d'équation qu'il y a de combinaisons d'indices francs. Par exemple : $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ représente 9 équations ; $u_i = 0$ représente 3 équations. On en profite pour rappeler qu'un vecteur est un tenseur du premier ordre, et qu'un scalaire peut être assimilé à un tenseur d'ordre 0.

Le terme muet signifie que l'on peut nommer autrement ces indices, sans changer la valeur de l'expression. Par exemple :

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{ijpq}\varepsilon_{pq} \quad (47)$$

$$= C_{ijlk}\varepsilon_{lk} \dots \quad (48)$$

Ce n'est pas vrai pour les indices francs (les indices sont supposés sans relation entre eux) :

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \neq C_{pqkl}\varepsilon_{kl} \quad (49)$$

Si l'on fait le calcul du nombre de termes de C_{ijkl} cela fait $3^4 = 81$ constantes C_{ijkl} , qui est un *tenseur du quatrième ordre* dans un espace à trois dimensions. Le tenseur ε est symétrique, cela est dû à son calcul depuis les déformations :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{grad}(\vec{u}) + {}^t \mathbf{grad}(\vec{u})) \quad (50)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (51)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (52)$$

On en déduit aisément une relation de *symétrie indicelle* sur les coefficients de \mathbb{C} , la première petite symétrie :

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{ijkl}\varepsilon_{lk} \quad (53)$$

$$= C_{ijlk}\varepsilon_{kl} \quad (54)$$

$$\Rightarrow C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (55)$$

En considérant la symétrie indicelle de σ , on obtient la seconde petite symétrie de \mathbb{C} :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (56)$$

$$C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{jikl}\varepsilon_{kl} \quad (57)$$

$$\Rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl} \quad (58)$$

Si l'on fait le compte, en tenant compte de ces symétries indicelles, il reste 36 termes pour C_{ijkl} . On peut le comprendre en groupant par deux les permutations possibles des paires de premier et second indices : Grâce à cette convention de Voigt, on peut écrire σ et ε sous la forme d'un vecteur 6×1 et \mathbb{C} sous la forme d'une

(i,j)	11	22	33	23	31	12
I	1	2	3	4	5	6
(k,l)	11	22	33	23	31	12
J	1	2	3	4	5	6

matrice 6x6. Voir détails dans le cours d'analyse tensorielle. Enfin il existe la grande symétrie de C. Elle aussi est démontrée dans le poly de calcul tensoriel. Elle s'écrit :

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \quad (59)$$

et ramène le nombre de constantes de C de 36 à 21. En effet, on peut alors écrire C sous la forme d'une matrice 6x6 symétrique C_{IJ} qui possède alors $6+5+4+3+2+1 = 21$ termes.

2.2 Équations de propagation

Nous reprenons en 3D les travaux du chapitre 1.1. Le déplacement est maintenant un champ $\vec{u}(\vec{x}, t)$ où \vec{x} est le vecteur position. Nous rappelons les équations disponibles (en écriture intrinsèque tout d'abord) : l'équilibre (où nous supposons les forces à distance nulles $\vec{f} = \vec{0}$), la loi de comportement élastique isotrope et l'écriture du tenseur des déformations (en hypothèse de petites perturbations, satisfaisantes en général pour les ondes mécaniques élastiques).

$$\vec{\text{div}}(\boldsymbol{\sigma}) + \vec{f} = \rho \ddot{\vec{u}} \quad (60)$$

$$(61)$$

Reprenons ces équations en calcul indiciel :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho u_{i,tt} \quad (62)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (63)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ijkl} u_{k,l} + C_{ijlk} u_{l,k})$$

Les indices k et l sont muets :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ijkl} u_{k,l} + C_{ijlk} u_{k,l})$$

La petite symétrie de C s'applique :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ijkl} u_{k,l} + C_{ijlk} u_{k,l})$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{k,l} \quad (64)$$

L'équation d'équilibre (60) s'écrit et se transforme compte tenu de ce résultat :

$$C_{ijkl} u_{k,lj} = \rho u_{i,tt} \quad (65)$$

Cette dernière équation se nomme l'équation de propagation. Tout type d'onde lui obéit.

2.3 L'onde plane progressive

Le passage en 3D de l'équation unidimensionnelle (4) nécessite de redéfinir l'abscisse x . En 3D les points dans le même état (qui ont tous le même déplacement \vec{u}) sont ceux d'un plan d'onde, perpendiculaire à la direction de propagation \vec{n} . La distance à considérer est maintenant à mesurer suivant \vec{n} , d'où l'introduction du produit scalaire $\vec{n} \cdot \vec{x}$.

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{a} f \left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}}{C} \right) \quad (66)$$

dans laquelle \vec{a} représente la direction de vibration des particules (on la choisit normée).

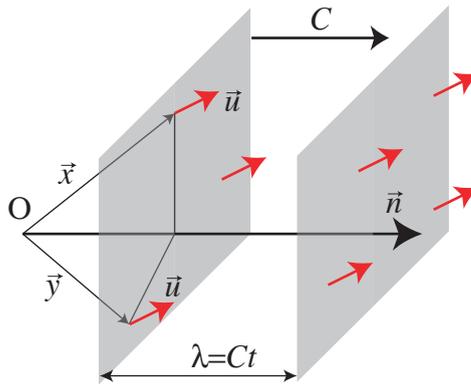


FIGURE 9 – Plans d'onde.



FIGURE 10 – Une ola, exemple d'onde en propagation (milieu 2D).

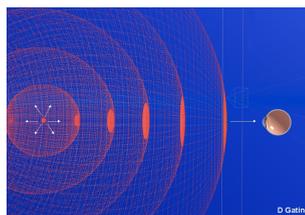


FIGURE 11 – La lumière, issue d'une source ponctuelle, est une onde électromagnétique sphérique.

2.4 Équation et tenseur de Christoffel

On injecte la forme de l'onde plane (66) dans l'équation de propagation (65). Et on s'accroche pour le calcul suivant. Notons que l'on suppose ici que \vec{a} ne dépends ni de x_p ni de t (conservation de l'énergie). Pour le premier membre :

$$u_k = a_k f\left(t - \frac{n_p x_p}{C}\right) \quad (67)$$

$$u_{k,l} = -a_k \frac{n_p \delta_{pl}}{C} f'\left(t - \frac{n_p x_p}{C}\right)$$

$$u_{k,l} = -a_k \frac{n_l}{C} f'\left(t - \frac{n_p x_p}{C}\right) \quad (68)$$

$$u_{k,lj} = a_k \frac{n_l}{C} \frac{n_p \delta_{pj}}{C} f''\left(t - \frac{n_p x_p}{C}\right)$$

$$u_{k,lj} = a_k \frac{n_j n_l}{C^2} f''\left(t - \frac{n_p x_p}{C}\right) \quad (69)$$

$$C_{ijkl} u_{k,lj} = C_{ijkl} a_k \frac{n_j n_l}{C^2} f''\left(t - \frac{n_p x_p}{C}\right) \quad (70)$$

$$(71)$$

Quand au second

$$u_{i,tt} = a_i f''\left(t - \frac{n_p x_p}{C}\right) \quad (72)$$

$$(73)$$

On peut alors égaliser et, pour une onde à accélération f'' non identiquement nulle, il vient :

$$C_{ijkl} a_k \frac{n_j n_l}{C^2} = \rho a_i$$

$$n_j C_{ijkl} n_l a_k = \rho C^2 a_i$$

$$n_j C_{jikl} n_l a_k = \rho C^2 a_i \quad (74)$$

Il suffit d'observer l'écriture intrinsèque de cette équation pour exhiber le tenseur acoustique (tenseur de Christoffel), du second ordre Γ . Et on se rend compte que la direction de vibration des particules \vec{a} n'est pas quelconque : c'est un vecteur propre de Γ .

$$\vec{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \vec{n} \cdot \vec{a} = \rho C^2 \vec{a} \quad (75)$$

Soit, pour bien voir les choses :

$$\Gamma = \vec{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \vec{n} \quad (76)$$

$$\Gamma \cdot \vec{a} = \rho C^2 \vec{a} \quad (77)$$

2.5 Conséquences de cette équation

Commençons par montrer que Γ est un tenseur symétrique. Commençons par inverser les indices muets i et l :

$$\Gamma_{jk} = n_i C_{ijkl} n_l$$

$$= n_l C_{ljki} n_i \quad (78)$$

Ensuite on exploite les grandes et petites symétries de \mathbb{C} :

$$\Gamma_{jk} = n_l C_{kilj} n_i$$

$$= n_i C_{ikjl} n_l$$

$$\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj}$$

Maintenant, montrons que Γ est défini positif. La démonstration commence par le fait que \mathbb{C} est défini positif.

$$\forall \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0 \quad (79)$$

Formons le produit suivant afin de montrer qu'il est positif :

$$\vec{a} \cdot \Gamma \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot (\vec{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{a} \quad (80)$$

$$= a_j n_i C_{ijkl} n_l a_k \quad (81)$$

Symétrisons cette expression en utilisant les petites symétries de \mathbb{C} pour la rapprocher de (79) :

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \Gamma \cdot \vec{a} &= \frac{1}{4} (a_i n_j C_{ijkl} a_k n_l + a_i n_j C_{ijlk} a_l n_k + a_j n_i C_{ijkl} a_k n_l + a_j n_i C_{ijlk} a_l n_k) \\ &= \frac{1}{4} (\vec{a} \otimes \vec{n} : \mathbb{C} (\vec{a} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{a}) + \vec{n} \otimes \vec{a} : \mathbb{C} (\vec{a} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{a})) \\ &= \left(\frac{\vec{a} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{a}}{2} \right) : \mathbb{C} : \left(\frac{\vec{a} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{a}}{2} \right) \end{aligned} \quad (82)$$

Hors cette expression est positive, selon (79), car $\vec{a} \otimes \vec{n} + \vec{n} \otimes \vec{a}$ est un tenseur symétrique, donc fait partie des $\boldsymbol{\varepsilon}$ « quelconques ».

En conséquence, le tenseur Γ est symétrique et défini positif. Ces valeurs propres ρC_i^2 (i varie de 1 à 3) sont positives et ses vecteurs propres \vec{a}_i sont orthogonaux; ils forment donc la bases propre de Γ .

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \rho C_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho C_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho C_3^2 \end{bmatrix}_{\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}} \quad (83)$$

2.6 Polarisation

Nous exploitons les résultats précédents. La direction de vibration \vec{a}_1 est choisi comme celle qui est la plus proche de la direction de propagation; c'est la quasi-longitudinale. Les deux autres sont nommées les quasi-transversales. Chaque polarisation possède sa célérité C_i associée. Pour comprendre la différence entre direc-

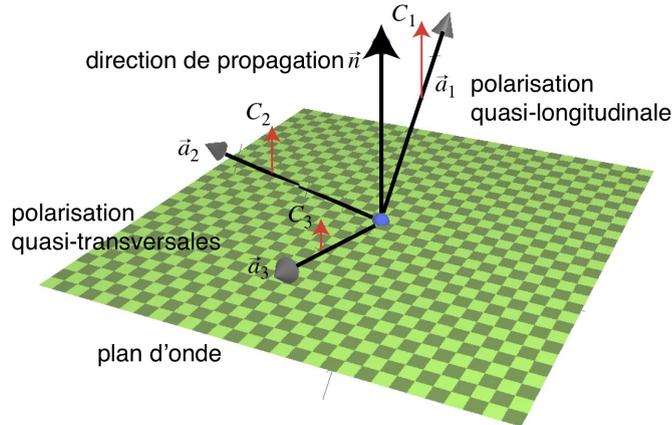


FIGURE 12 – Ondes plane, cas général du milieu anisotrope : les trois polarisations.

tion de vibration et direction de propagation, revenons à la ola : la direction de vibration est verticale (bras des gens) et celle de polarisation est horizontale (les rangées de spectateurs). Cette onde est transversale. Notons de plus que la condition Γ défini positif entraîne $\rho C_i^2 \geq 0$ donc les célérités C_i sont réelles.

2.7 Réflexion et réfraction

Les équations rappelées pour le milieu 1D demeurent valables. À ceci près que les indices C_1 et C_2 ne sont plus définis de manière unique (sauf dans le cas isotrope ci-après), mais dépendent de la direction de propagation par le fait que ρC^2 est (une des trois) valeur(s) propre(s) de $\Gamma = \vec{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{n}$. On représente des courbes de lenteurs (inverse des célérités) en fonction de la direction \vec{n} (voir le livre de Dieulesaint et Royer). Le passage

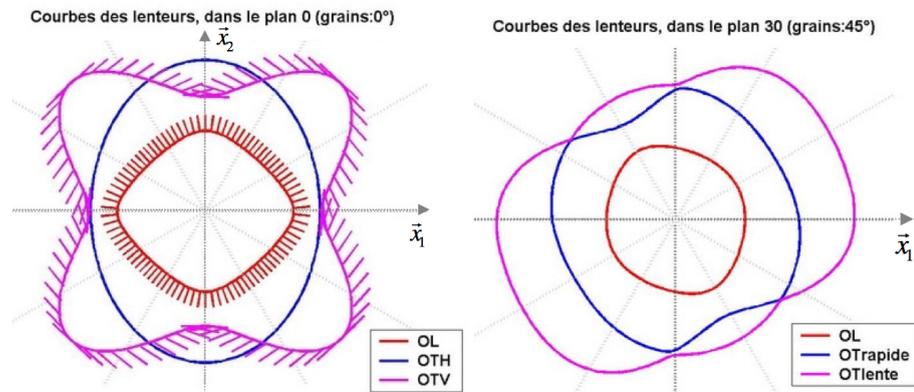


FIGURE 13 – Exemples de courbes de lenteur dans des monocristaux (Marie-Aude PLOIX, INSA, Lyon)

d'une onde à une interface s'accompagne en général de réflexion, réfraction et de changements de modes : une Q.L. peut se transformer en un bouquet Q.L., Q.T.1, Q.T.2 au niveau des ondes transmises. On peut aussi exciter des ondes de surfaces (Rayleigh, Lamb, Love).

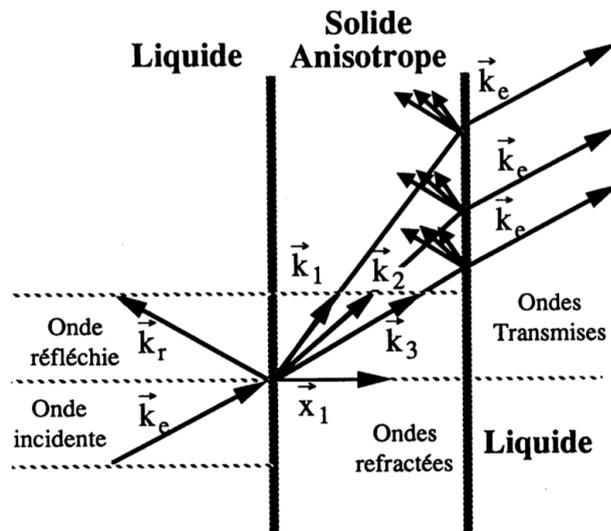


Fig. 1. — Génération de trois modes à l'interface liquide/solide.

FIGURE 14 – S. Baste et B. Hosten. *Evaluation de la matrice d'élasticité des composites orthotropes par propagation ultrasonore en dehors des plans principaux de symétrie*. Revue Phys. Appl. 25 (1990)

2.8 Principe de la mesure ultrasonore

Un transducteur (figure 15) émet une vibration dans une direction connue \vec{e} , sur toute sa surface plane de normale \vec{n} . Celle-ci est en général soit longitudinale si $\vec{e} = \vec{n}$ soit transversale si $\vec{e} \cdot \vec{n} = 0$. Le plan, mis en vibration uniforme est donc un plan d'onde et sa normale \vec{n} devient la direction de propagation de l'onde. L'émetteur est

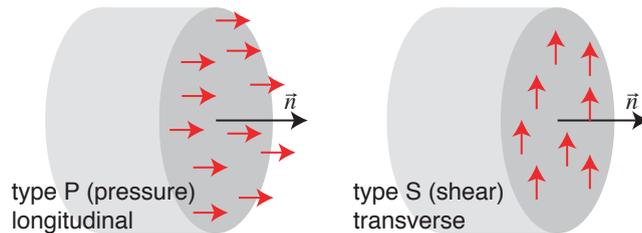


FIGURE 15 – Emetteurs P et S.

mis en contact avec le solide étudié. L'onde émise se projette sur le trièdre \vec{a}_i des vibrations possibles pour la direction de propagation \vec{n} .

$$\vec{e} = (\vec{e} \cdot \vec{a}_1) \vec{a}_1 + (\vec{e} \cdot \vec{a}_2) \vec{a}_2 + (\vec{e} \cdot \vec{a}_3) \vec{a}_3 \quad (84)$$

Chaque onde se déplace dans la direction \vec{n} avec une célérité *a priori* différente (figure 16). Le transducteur récepteur fonctionne de même. La direction \vec{r} est sa direction de sensibilité. Supposons que, comme c'est sou-

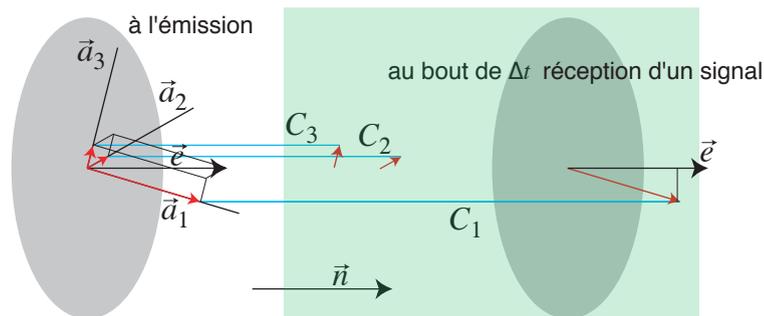


FIGURE 16 – Décomposition de la vibration à l'émission et projection à la réception

vent le cas ; $\vec{r} = \vec{e}$. L'intensité I_i du signal reçu est proportionnel à la projection de la polarisation i sur cette direction :

$$I_i = (\vec{e} \cdot \vec{a}_i)^2 \quad (85)$$

Dans le cas général, ce type d'essai peut alors montrer, à la réception, les trois signaux distincts (figure 17)

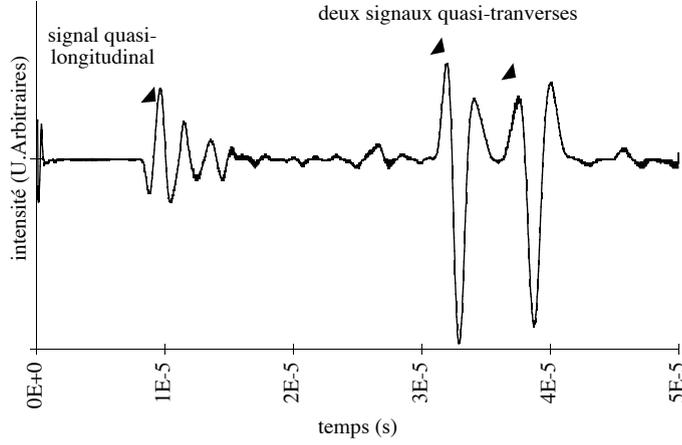


FIGURE 17 – Mesure ultrasonore sur du bois montrant les trois signaux (auteur). L'émetteur est du type transversal.

3 Milieu isotrope

3.1 Le tenseur acoustique

Rappelons l'expression du tenseur d'élasticité isotrope : on identifie les composantes C_{ijkl} de \mathbb{C} depuis l'expression de Lamé :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (86)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\text{trace}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} \quad (87)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{pp}\delta_{ij} \quad (88)$$

$$= 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl}\varepsilon_{kl} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon_{kl} \quad (89)$$

Cette forme est exacte mais n'impose pas la symétrie de \mathbb{C} (en kl). On l'obtient par l'expression équivalente suivante :

$$\sigma_{ij} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\varepsilon_{kl} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon_{kl} \quad (90)$$

Celle-ci permet d'identifier les coefficients C_{ijkl} .

$$C_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (91)$$

On calcule maintenant le tenseur acoustique avec cette expression :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \vec{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \vec{n}$$

$$\Gamma_{jk} = n_i C_{ijkl} n_l$$

$$= \mu(n_i \delta_{ik} \delta_{jl} n_l + n_i \delta_{il} \delta_{jk} n_l) + \lambda n_i \delta_{ij} \delta_{kl} n_l$$

$$= \mu(n_k n_j + n_i n_i \delta_{jk}) + \lambda n_j n_k$$

$$\Gamma_{jk} = (\lambda + \mu)n_j n_k + \mu\delta_{jk} \quad (92)$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mu\mathbf{I} + (\lambda + \mu)\vec{n} \otimes \vec{n} \quad (93)$$

On se place dans une base orthonormée contenant \vec{n} pour l'écriture en matrice :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}_{\{\vec{n}, \bullet, \bullet\}} \quad (94)$$

3.2 Type et célérité des ondes

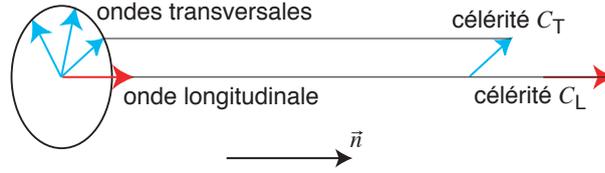


FIGURE 18 – Propagation des ondes dans le milieu isotrope.

La forme (94) ci-dessus montre un espace propre de dimension 1, de valeur propre $\lambda + \mu$ et de vecteur propre \vec{n} . En identifiant avec 83, on en déduit, en renommant $\vec{a}_1 = \vec{a}_L$ ("L" pour longitudinal) que :

$$\vec{a}_L = \vec{n} \quad (95)$$

$$\rho C_L^2 = \lambda + 2\mu \quad (96)$$

De même (94) montre que l'on a un sous-espace propre de dimension 2 constitué d'un plan orthogonal à \vec{n} associé à la valeur propre μ . On nomme \vec{a}_T un vecteur normé de ce plan :

$$\vec{a}_T \cdot \vec{n} = 0 \quad (97)$$

$$\rho C_T^2 = \mu \quad (98)$$

D'un point de vue physique deux ondes peuvent se propager dans le milieu isotrope :

- une onde longitudinale de direction de vibration \vec{n} et de célérité $C_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$
- une onde transversale (ou de cisaillement) de direction de vibration $\perp \vec{n}$ et de célérité $C_T = \sqrt{\mu/\rho}$

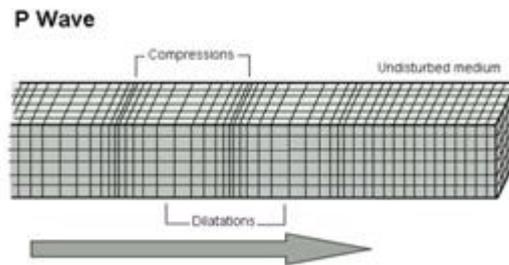


FIGURE 19 – onde p (de pression, longitudinale)

Célérité des polarisations longitudinales et transversales

Beaucoup d'ouvrages (même l'excellent livre de [Die74]) supposent $\lambda > 0$ et en déduisent ceci :

$$\begin{aligned} \lambda + 2\mu &> 2\mu \\ \rho C_L^2 &> 2\rho C_T^2 \\ C_L &> \sqrt{2}C_T \end{aligned} \quad (99)$$

Généralement vraie, cette relation n'est toutefois pas exacte... Ce n'est pas λ qui doit être positif pour que C soit défini positif, c'est le module de compressibilité K et la relation n'est pas identique :

$$\lambda + 2\mu = \frac{3K - 2\mu}{3} + 2\mu \quad (100)$$

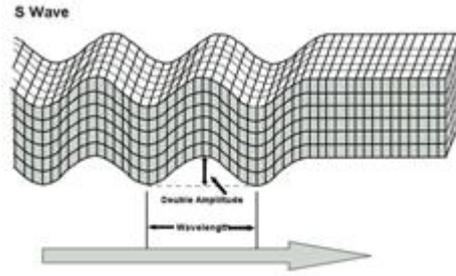


FIGURE 20 – onde s (de cisaillement, transversale)

$$= K + \frac{4}{3}\mu \quad (101)$$

$$K > 0 \Rightarrow K + \frac{4}{3}\mu > \frac{4}{3}\mu \quad (102)$$

$$\rho C_L^2 > \frac{4}{3}\rho C_T^2$$

$$C_L > \frac{2}{\sqrt{3}}C_T \quad (103)$$

Cette équation est plus restrictive car le coefficient est seulement de 1,1547 au lieu de 1,414. Toutefois la limite en $\sqrt{2}$ s'applique pour les matériaux à $\lambda > 0$ qui sont aussi ceux à coefficient de Poisson $\nu > 0$ qui sont quand même l'immense majorité... Les ondes longitudinales sont en tous cas plus rapides que les ondes transversales. Ceci est exploité en prévision sismique : l'onde longitudinale, moins destructrice, est un précurseur de l'arrivée de l'onde de cisaillement et permet (à condition d'être rapide!) d'évacuer la zone (en fait, l'anisotropie du sol et les directions de propagations différentes pour ces deux modes rendent cette méthode malheureusement presque inutilisable). En fonction des constantes ingénieur E et ν , nous avons :

$$\rho C_L^2 = E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (104)$$

$$\rho C_T^2 = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (105)$$

Notons qu'au chapitre (1) nous avons une célérité $\rho C_L^2 = E$; la raison est que l'onde se déplace en 3D avec un déplacement latéral nul, contrairement au calcul barre qui suppose une déformation transversale du type $\varepsilon_T = -\nu\varepsilon_L$. Les relations inverses, qui nous serviront en TP, sont :

$$E = \rho C_T^2 \frac{3C_L^2 - 4C_T^2}{C_L^2 - C_T^2} \quad (106)$$

$$\nu = \frac{C_L^2 - 2C_T^2}{2(C_L^2 - C_T^2)} \quad (107)$$

Les fluides ont un module de cisaillement $\mu = 0$. La relation (98) montre qu'il n'y a pas d'onde de cisaillement et la relation (96) donne, en fonction du module de compressibilité (de Kelvin) $K (= \lambda$ dans ce cas) :

$$\rho C^2 = K \quad (108)$$

Donnons maintenant quelques célérités pour les matériaux courants :

TABLE 1 – quelques célérités

matériau	ρ (gk/m ³)	E (GPa)	ν	C_L (m/s)	C_T (m/s)
acier	7800	200	0,33	5800	3100
béton	2000	30	0,2	4080	2500
bois L	1000	20	0,2	4700	2886
air	1,2	K=0,141 MPa	-	340	-
eau	1000	K=2.25 GPa	-	1500	-

Références

- B. A. AULD, 1973. *Acoustic fields and waves in solids*. John Wiley and Sons
 J. KRAUTKRAMER ET H. KRAUTKRAMER, 1977. *Ultrasonic testing of materials*. Springer verlag
 J. L. ROSE, 1999. *Ultrasonic waves in solid media*. Cambridge University press
 A. ZAREMBOWITCH. *Les Ultrasons*. Que sais-je?