Université de Paris Sud XI - M1 PAM

TD de Méthodes Numériques n^o3: Intégration et dérivation

On n'intègre pas qu'en écoles d'ingénieurs.

Autres rappels sur l'intégration

Le but est d'évaluer la valeur d'une intégrale $I(f) = \int_a^b \mu(x)f(x)dx$ sous forme de somme discrète, appelée *formule de quadrature*, du type: $I_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k^n f(x_k)$. $f(x)$ est la fonction à intégrer, éventuellement pondérée par une fonction μ connue. $f(x)$ n'est pas connue, on n'a sa valeur qu'en certains points x_k. Eventuellement, la connaissance des valeurs de ses dérivées peut être utilisée (voir l'exercice 2).

Erreur commise et exactitude de la quadrature:
On définit l'erreur tout bêtement par $R(f) = I(f) - I_n(f)$, et on nomme $I_n(f)$ une quadrature exacte sur un ensemble V si pour tout $f \in V$, $R(f) = 0$. En générale, nous considérerons les espaces vectoriels P_n des polynômes de degré au plus n. Une quadrature a un degré de précision n si elle est exacte sur P_n mais non exacte sur P_{n+1}. Pour l'étude du degré de précision, il est nécessaire de se définir une base de P_n, par exemple (ce n'est pas la seule) la base canonique $(1, x, x^2 ... x^n)$.

Stabilité d'une formule de quadrature:
Une formule de quadrature est dite stable si pour tout ensemble de réels $(\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n)$, il existe une constante M *indépendante de* n telle que $\| \sum_{k=0}^{n} A_n^k \epsilon_k \| \leq M max_k \|\epsilon_k\|$. Les paramètres ϵ_i sont les erreurs éventuellement commises lors de l'évaluation des $f(x_k)$. Une quadrature instable va propager fortement ces erreurs.
Convergence de la quadrature:
Une quadrature converge sur l'ensemble V si pour tout $f \in V$, on a $lim_{n->\infty} [\sum_{k=0}^{n} A_k^n f(x_k)] = \int_a^b \mu(x)f(x)dx$.

Formules de type interpolation:
On utilise comme moyen d'écrire la quadrature la formule $\int_a^b P_f(x)\mu(x)dx$, avec $P_f(x)$ le polynôme d'interpolation de $f(x)$, $P_f(x) = \sum_{j=0}^{n} l_j(x)f(x_j)$. L'obtention de la formule de quadrature est directe. Il en découle que les formules d'interpolation à $(n+1)$ points sont exactes sur l'espace P_n. L'erreur de l'intégration peut se déduire de l'erreur d'interpolation (voir TD précédent).
Formules de Newton-Cotes: on interpole sur des subdivisions régulières de l'intervalle d'intégration. *Ces formules sont instables.* Une quadrature de type interpolation prenant en compte les valeurs de f aux bords du domaine d'intégration s'appelle une quadrature fermée, sinon elle est dite ouverte.

Méthodes composites:
On applique à des sous-intervalles du domaine d'intégration une formule de Newton-Cotes de degré q petit fixé. En gros, on réduit le nombre de points de l'interpolation pour ne pas trop ressentir l'effet de l'instabilité des formules de quadrature *toujours dans le cas de subdivisions régulières*

du domaine d'intégration. Il en découle la méthode des trapèzes traditionnelle pour $q = 1$ et la méthode de Simpson $q = 2$. On a, avec une subdivision de (a, b) en $n + 1$ points avec un pas d'espace $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + \frac{i\Delta x}{n}$ pour $i = 1, n-1$:
Trapèzes:$\int_a^b f(x)dx = \Delta x \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$
Simpson:$\int_a^b f(x)dx = \frac{Deltax}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{J=1,J \ impair}^{n-1} f(x_J) + 2\sum_{J=2,J \ pair}^{n-2} f(x_J)\right]$, il faut n pair.

Formules de Gauss:
On résoud le problème de l'instabilité de la quadrature par interpolation en choisissant le support de l'interpolation (les x_i) au mieux, et on retombe sur les racines des polynômes de Chebyshev. Cette quadrature s'appelle quadrature de Gauss, et ne fait intervenir que des points strictement intérieurs au domaine d'intégration. En prenant une extrémité, on arrive à la formule de Gauss-Radau et en prenant les deux à Gauss-Lobatto. Les formules de quadrature qui en découlent sont stables et convergentes.

Rappels sur la dérivation:

Cette fois-ci on cherche la dérivée d'une fonction, uniquement connue en un certain nombre de points. Là aussi, on peut faire intervenir le polynôme d'interpolation de la fonction et le dériver. Dans ce cas, les formules de dérivation sont instables pour un maillage à pas constant (au sens utilisé dans la partie intégration). On ne considèrera donc qu'un ensemble de points limités pour l'évaluation des dérivées, que l'on peut trouver suivant deux méthodes: dériver le polynôme d'interpolation local, ou déduire la dérivée de développements limités de la fonction en divers points (voir exercice 7).

Exercice 1. Trapèzes et Simpson
Calculer $\int_0^\pi sin(x)dx$ par la méthode des trapèzes, puis par la méthode de Simpson en prenant des points equirépartis de pas $\Delta x = \pi/4$ et $\Delta x = \pi/10$. Mis à part que plus il y a de points plus c'est long, qu'en déduisez-vous?

Exercice 2. Quadratures optimales sans pondération
Calculer les coefficients optimaux de la quadrature:

$$\int_0^1 f(x)dx = A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1) + R(f),$$

R est l'erreur, le fait de considèrer des points en dehors du domaine d'intégration n'en est pas une.

Même question, mais on a la chance de connaître les valeurs de la dérivée de f en -1 et1.

$$\int_0^1 f(x)dx = A_0 f(-1) + A_1 f(0) + A_2 f(1) + B_0 f'(-1) + B_2 f'(1) + R(f)$$

Exercice 3. Quadratures optimales avec pondération
Déterminer A,B,C sous forme de fractions pour que:

$$\int_0^h \sqrt{x} f(x)dx = Af(\frac{h}{4}) + Bf(\frac{A}{2}) + Cf(\frac{3h}{4})$$

soit exacte sur l'espace des polynômes dle plus grand possible.

Aurait-on le même résulat en calculant $f^*(x) = \sqrt{x} f(x)$ et en cherchant A,B,C tels que

$$\int_0^h f^*(x)dx = Af^*(\frac{h}{4}) + Bf^*(\frac{A}{2}) + Cf^*(\frac{3h}{4})?$$

Exercice 4. Quadrature avec optimisation des points du support
Trouver les 3 constantes a,b,k pour que

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = k(f(a) + f(b))$$

soit exacte sur l'espace vectoriel de degré le plus élevé possible.

Exercice 5. Plus difficile: avec pondération
Soit la formule $\int_o^\pi f(x)sin(2x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + E(f)$
- Déterminer A_1, A_2, x_1 et X_2 pour que la formule sois exacte sur P_3.
- Vérifier qu'elle est exacte sur P_4.

Exercice 6. Dérivation: différences divisées à pas constants
Une fonction $f(x)$ est donnée en x_i, $0 \leq i \leq 7$ par le tableau suivant:

x_i	0	2	4	6	8	10	12	14
$f(x_i)$	0	40	128	216	256	200	0	-392

1. Soit h le pas. Calculer $f'(8)$ et $f''(8)$ par
- les différences (régressives) à gauche à l'ordre 1 en h, puis à l'ordre 2 en h
- les différences (progresives) à droite à l'ordre 1 en h, puis à l'ordre 2 en h
- les différences centrées à l'ordre 2 en h puis à l'ordre 4 en h.

2. Déterminer le degré du polynôme passant par ces huit points.

3. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 7. Utilisation des polynômes de Lagrange
Une fonction $f(x)$ est donnée en x_j, $0 \leq j \leq 3$, tels que $x_j = x_0 + jh$ avec $h > 0$.

1. A l'aide du polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 3, calculer une expression approchée de $f''(x_3)$ en fonction des $f(x_j)$ et l'erreur de troncature associée.

2. Retrouver cette formule en utilisant les différences divisées régressives.