MÉCANIQUE I

Georges GAUTHIER
Laboratoire FAST
georges.gauthier@u-psud.fr

PHYS 101

Déroulement et Évaluation

- Cours et TD
  - 11 Séances de cours
  - 12 Séances de TD
- Contrôle Continu
  - 2 Devoirs à la maison
  - 4 Séances de Tutorial

- 1 Examen Partiel
- 1 Examen final

Note finale : Nf = 0.4 Ex + 3.3 Pa + 0.3 CC

Georges GAUTHIER
Laboratoire FAST,
georges.gauthier@u-psud.fr

PHYS 101

MÉCANIQUE I

Plan du cours :

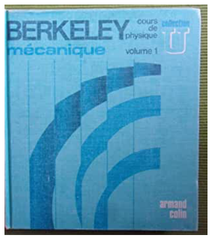
I. Introduction (Dimensions)
II. Cinématique (Vecteurs, Dérivation)
III. Dynamique (Équations Différentielles)
IV. Énergie (Intégrations)
V. Systèmes à 2 corps

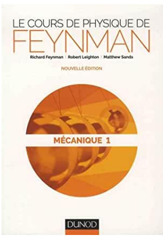
PHYS 101

MÉCANIQUE I

Bibliographie

- Cours de physique de Berkeley "Mécanique"
- Les manuels visuels pour la licence Physique, Phy. Ed. Fluorescience
- L'univers mécanique de Luc Valentin
- Les cours de physique de R. Feynman "Mécanique I"



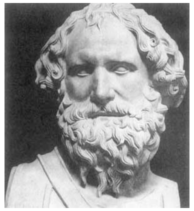


PHYS 101

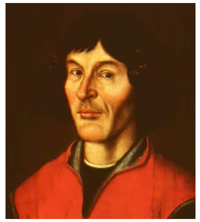
MÉCANIQUE I

I. Introduction

LA MÉCANIQUE NEWTONIENNE


Archimède
287-212 Av JC

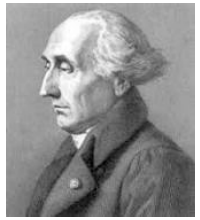

Ptolémé
90-168


Copernic
1473-1543


Kepler
1571-1630

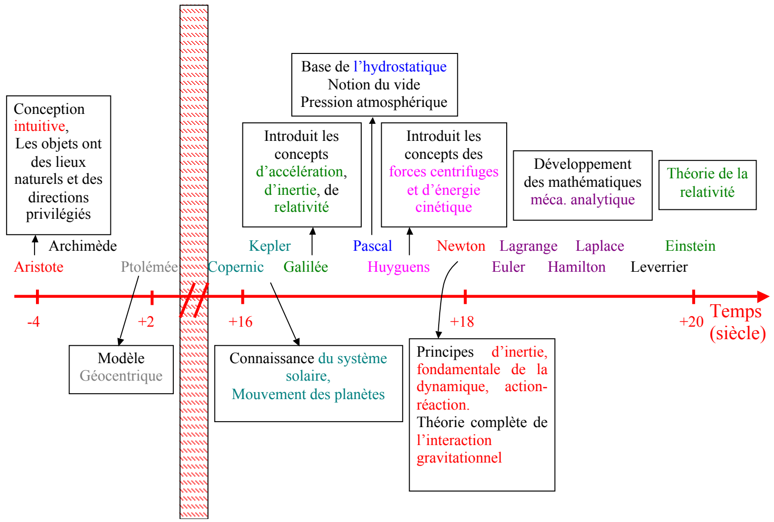

Galilée
1564-1642


Euler
1707-1783

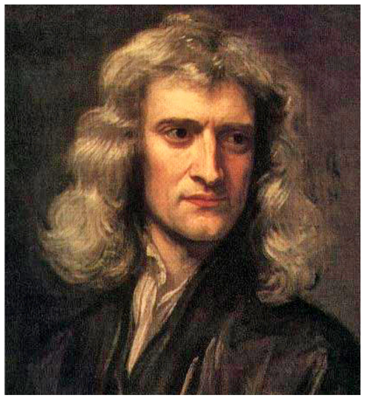

Lagrange
1736-1813


Leverrier
1811-1877

LA MÉCANIQUE NEWTONIENNE



LA MÉCANIQUE NEWTONIENNE


Isaac Newton (1642-1727)

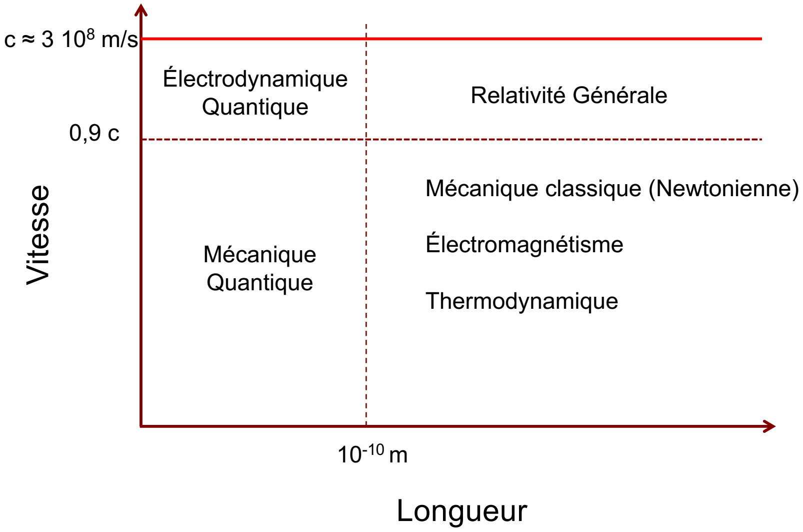
Principes Mathématiques de la philosophie naturelle (1687)

- Principe d'inertie
- Proportionnalité forces accélérations
- Théorie de l'attraction universelle
- Égalité action réaction
- Loi des collisions
- Mécanique des fluides (parfaits)

Décrit assez bien le mouvement des corps bien plus grands que l'atome et bien moins rapide que la lumière

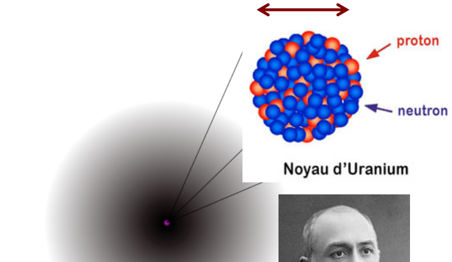
1 atome ~1Angstrom = 10^{-10}m
c ≈ 3 10^8 m/s (vitesse de la lumière dans le vide)

LA MÉCANIQUE NEWTONIENNE



QUELQUES ORDRES DE GRANDEURS

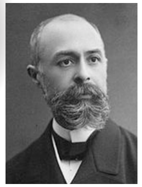
L'atome et le noyau



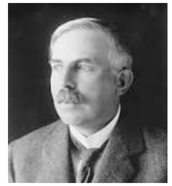
$1\ \text{fm} = 10^{-15}$ m

Interaction faible (désintégration Beta)

Interaction forte (QCD) Quarks

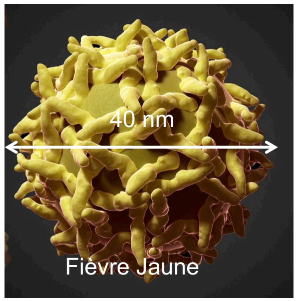

Becquerel (1852-1908)


Fermi (1901-1954)


Rutherford (1871-1937)

QUELQUES ORDRES DE GRANDEURS

Virus

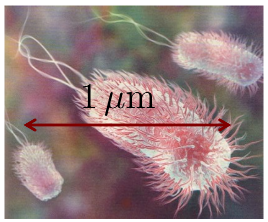


$$1\,\text{nm} = 10^{-9}\,\text{m}$$

$$1\,\mu\text{m} = 10^{-6}\,\text{m}$$

Lumière visible

E. Coli



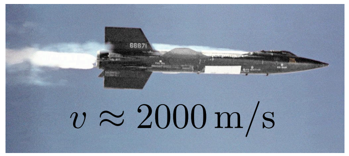
QUELQUES ORDRES DE GRANDEURS

Vitesses :

Bactérie $1\mu\text{m/s}$

Son dans l'air $340\,\text{m/s}$

l'eau $1500\,\text{m/s}$



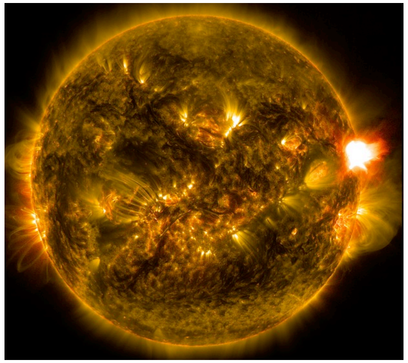
Terre autour Du soleil $v_{\text{T}} = 29,8 \cdot 10^6\,\text{m/s}$

Lumière $c \approx 3 \cdot 10^8\,\text{m/s}$

QUELQUES ORDRES DE GRANDEURS

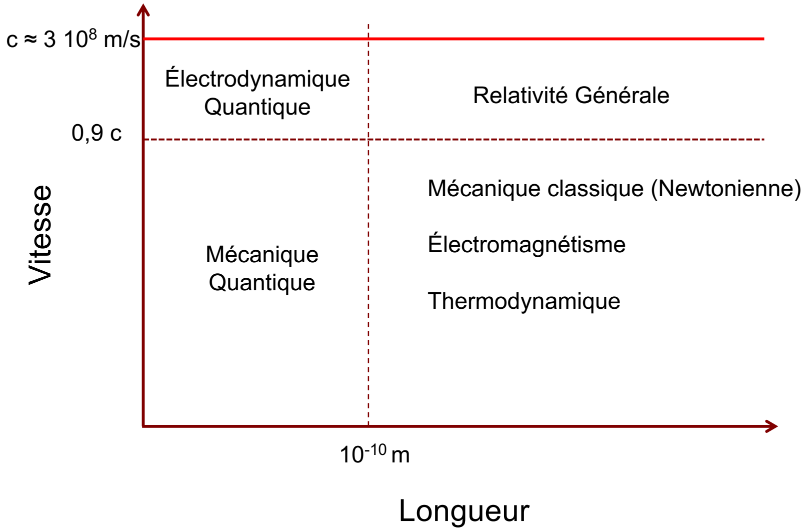
Terre et Système Solaire

$$R_T = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$$
$$M_T = 5,97\, 10^{24}\ kg$$



$$R_S = 1,4 \cdot 10^9 \text{ m}$$
$$M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

LA MÉCANIQUE NEWTONIENNE



PLAN DU COURS

- **Introduction- Dimensions**
- **Cinématique (Dérivée)** **(2 Séances)**
- **Dynamique (Forces, Équation différentielles)** **(2.5 séances)**
- **Énergie (Intégration)** **(3.5 Séances)**
- **Systèmes à 2 corps** **(3 Séances)**

CHAPITRE I- DIMENSIONS

I – Les grandeurs physiques

Exemple : longueur, temps

ζ **: grandeur physique**

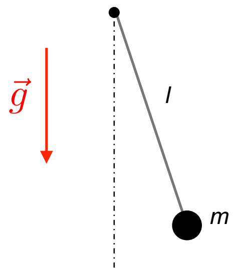
On note $[\zeta]$ **sa dimension**

$$\zeta = \xi + \gamma$$
$$\Longrightarrow [\zeta] = [\xi] = [\gamma]$$

$$\cancel{[temps] = [longueur] + [masse]}$$

I- DIMENSIONS

Pendule pesant



Période $\tau = ?$

Dimensions

$[temps] : T$

$[masse] : M$

$[longueur] : L$

$[g] = L \times T^{-2}$

$$T = L^a \times \left(\frac{L}{T^2}\right)^b$$

$[\tau] = [m], [l], [g]$

$$[\tau] = \sqrt{\frac{[l]}{[g]}}$$

7 GRANDEURS PRINCIPALES

5 grandeurs dimensionnées:

Longueur : L

Temps : T

Masse : M

Température : Θ

Courant : I

2 grandeurs sans dimensions:

Angle : 1 (correspond à la longueur de l'arc de cercle de rayon unité)

Molle : 1 (correspond à un nombre d'objets)

ANALYSE DIMENSIONNELLE

$[\boldsymbol{Q}] = \boldsymbol{L}^{\alpha} * \boldsymbol{T}^{\beta} * \boldsymbol{M}^{\gamma} * \boldsymbol{\Theta}^{\delta} * \boldsymbol{I}^{\epsilon}$

Théorème de Vaschy-Buckingham

Exemple la vitesse :

Vitesse : $\frac{\Delta\, Distance}{\Delta\, temps} \Longrightarrow [v] = \frac{L}{T}$

Une fonction et son argument n'ont pas de dimension

$[\cos(\theta)] = 1; [\theta] = 1$

$exemple : \cos(\omega t) : [\omega] = 1/T$

$[e^A] = 1; [A] = 1$

$exemple : e^{t/\tau} : [\tau] = T$

GRANDEURS DÉRIVÉES

Vitesse : $\frac{\Delta\, Distance}{\Delta\, temps} \Longrightarrow [v] = \frac{L}{T}$

Accélération : $\frac{\Delta\, vitesse}{\Delta\, temps} \Longrightarrow [a] = \frac{L}{T^2}$

Aire : $[s] = L^2$

Volume : $[V] = L^3$

Fréquences : $[\nu] = \frac{1}{T}$

Forces : $[F] = M * L * T^{-2}$

Énergie : $[E] = M * L^2 * T^{-2}$

Puissance : $\frac{\Delta Energie}{\Delta temps}$ $[P] = M * L^2 * T^{-3}$

II- Unités

Unités du système International (SI)

Longueur : mètre (m)
Temps : seconde (s)
Masse : kilogramme (kg)
Température : Kelvin (°K)
Courant : Ampère (A)

Angle : 1 (correspond à la longueur de l'arc de cercle de rayon 1m)
Molle : 1 (correspond à 6,023 10^{23} objets)

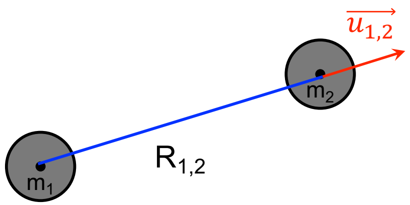
Vitesse : (m/s)
Fréquence : (Hz) Hertz = 1 s^{-1}
Force : (N) Newton
Energie : (J) Joule
Puissance : (W) Watt

III Les constantes fondamentales

c : vitesse de la lumière dans le vide	$c \approx 3 * 10^{8}\ m\ s^{-1}$
h : constante de Planck	$\mathrm{h} = 6.62\ * 10^{-34}\ kg\ m^{2}\ s^{-1}$
k_B : constante de Boltzman	$k_B \approx 1{,}38 * 10^{-23}\ J\ K^{-1}$
G : constante de gravitation	$G \approx 6{,}67 * 10^{-11}\ m^{3} kg^{-1} s^{-2}$
ϵ_0 : Permitivité diélectrique du vide	$\epsilon_0 \approx 8{,}85 * 10^{-12}\ F\ m^{-1}$

IV Les Interactions fondamentales

IV-2 Interaction gravitationnelle



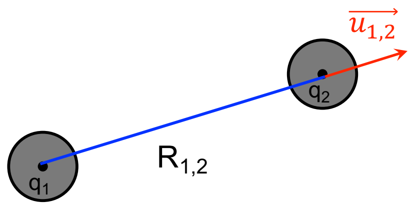
$$\overrightarrow{F_{1,2}} = -G\,\frac{m_1 * m_2}{{R_{1,2}}^{2}}\,\overrightarrow{u_{1,2}}$$

Exemple :

$G \approx 6{,}67 * 10^{-11}\ m^{3} kg^{-1} s^{-2}$

IV Les Interactions fondamentales

IV-1 Interaction électrostatique



$$\overrightarrow{F_{1,2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 * q_2}{{R_{1,2}}^{2}}\,\overrightarrow{u_{1,2}}$$

Exemple :

$\epsilon_0 \approx 8{,}85 * 10^{-12}\ F\ m^{-1}$

CHAPITRE II
CINÉMATIQUE

La cinématique est l'ensemble des outils mathématique permettant de décrire le mouvement.

CHAPITRE II
CINÉMATIQUE

La cinématique est l'ensemble des outils mathématique permettant de décrire le mouvement.

CHAPITRE II
CINÉMATIQUE

La cinématique est l'ensemble des outils mathématique permettant de décrire le mouvement.

Exemple : le 100 m, Usain BOLT

CHAPITRE II
CINÉMATIQUE

CHAPITRE II
CINÉMATIQUE

Trajectoire : Ensemble des positions occupées par le système

Trajectoire de C. Thovex

CHAPITRE II
CINÉMATIQUE

Trajectoire : Ensemble des positions occupées par le système

Trajectoire d'un train

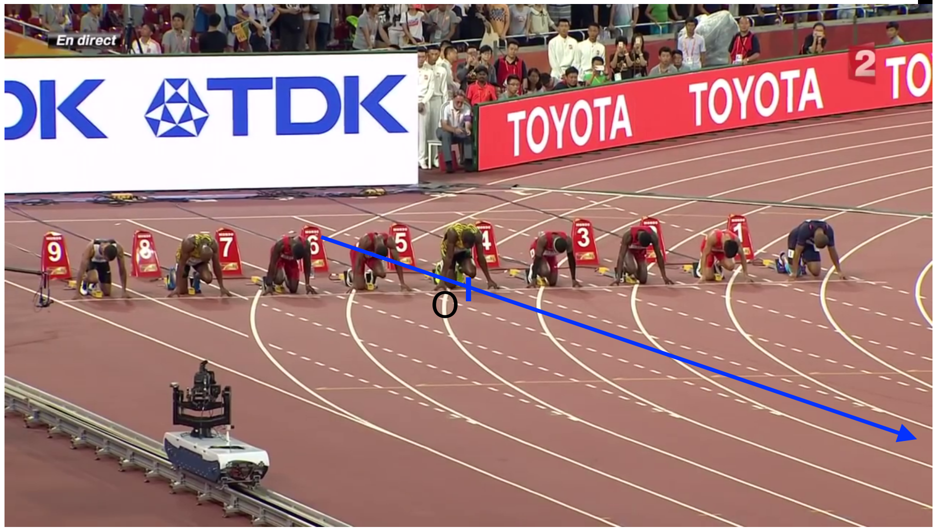
CHAPITRE II
CINÉMATIQUE

Le mouvement à un caractère relatif : "En mouvement par rapport à quoi?"

Exemple : Usain BOLT

Repérer l'objet → Repère

CHAPITRE II
CINÉMATIQUE



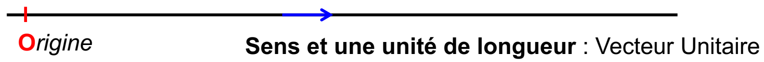
CHAPITRE II
CINÉMATIQUE

La cinématique est l'ensemble des outils mathématique permettant de décrire le mouvement.

Exemple : Usain BOLT

Repérer la trajectoire → **Repère**

Trajectoire rectiligne : Une droite orientée



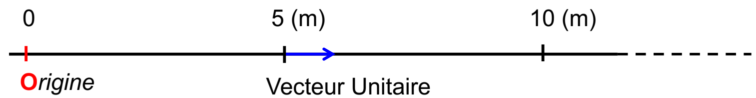
CHAPITRE II
CINÉMATIQUE

La cinématique est l'ensemble des outils mathématique permettant de décrire le mouvement.

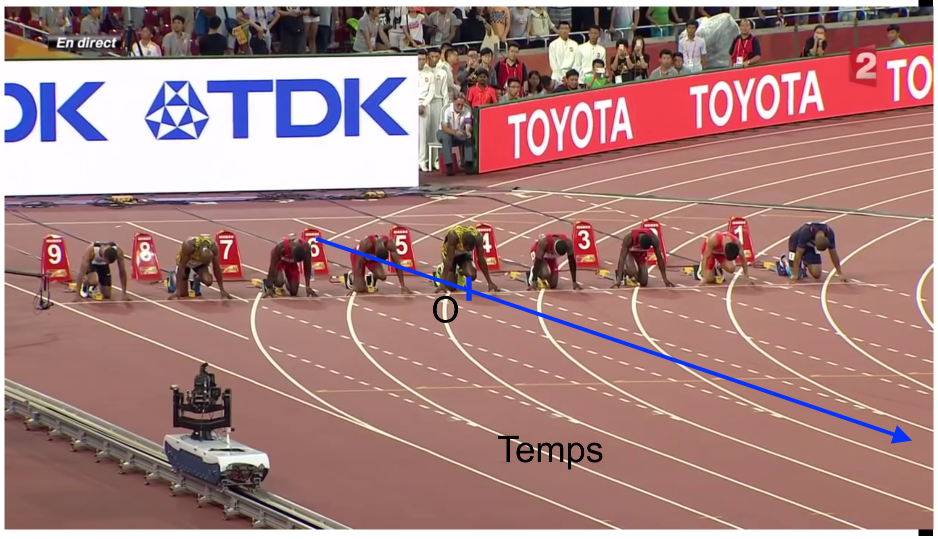
Exemple : Usain BOLT

Repérer la trajectoire → **Repère**

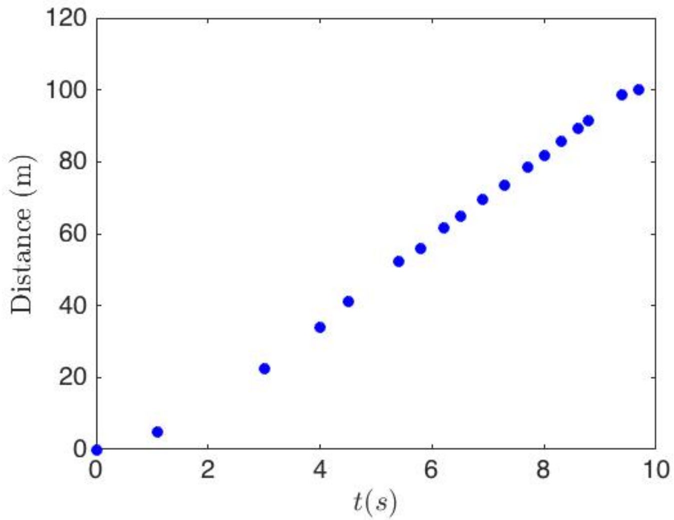
Trajectoire rectiligne : Une droite orientée



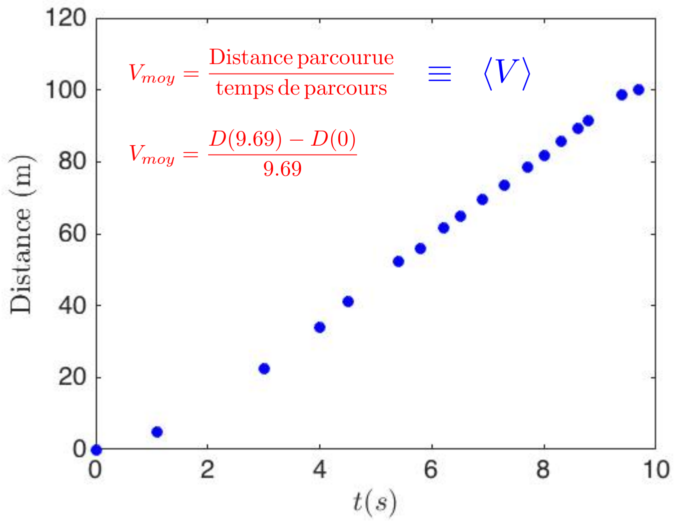
CHAPITRE II
CINÉMATIQUE

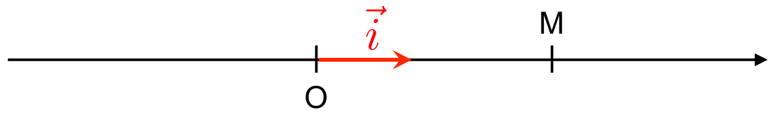


CHAPITRE II
CINÉMATIQUE



CHAPITRE II
CINÉMATIQUE



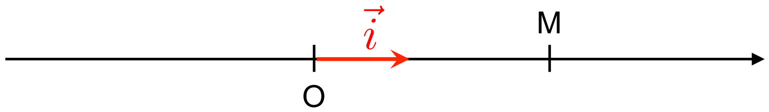


$$\vec{OM} = x\,\vec{i}$$

x est la composante de $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe (O*x*)

t le temps et donc besoin d'une origine des temps

L'ensemble
Repère spatial (O, $\vec{\imath}$)
et
Repère temporel (définition de l'origine des temps)
Constitue un **Référentiel**

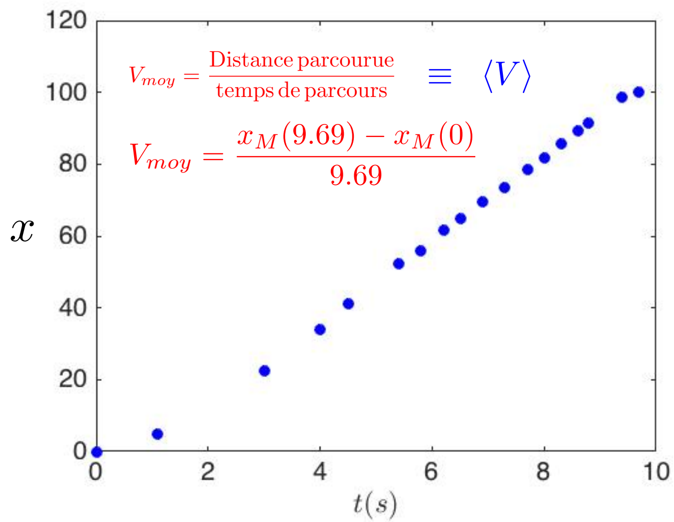


$$\vec{OM} = x\,\vec{i}$$

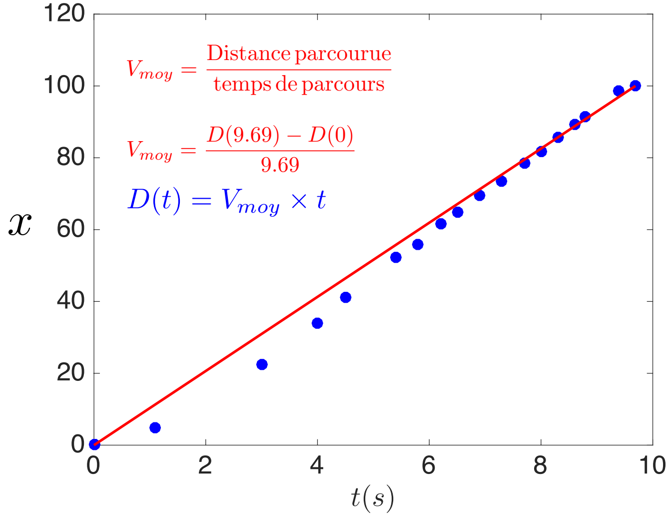
x est la composante de $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe (O*x*)

t le temps et donc besoin d'une origine des temps

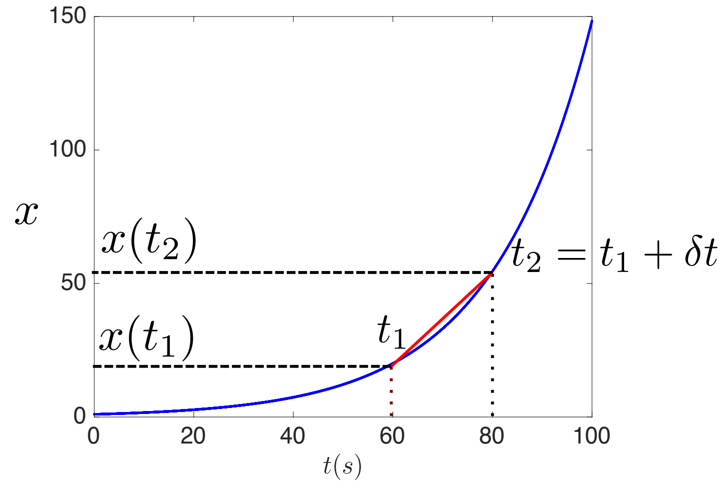
CHAPITRE II
CINÉMATIQUE



CHAPITRE II
CINÉMATIQUE

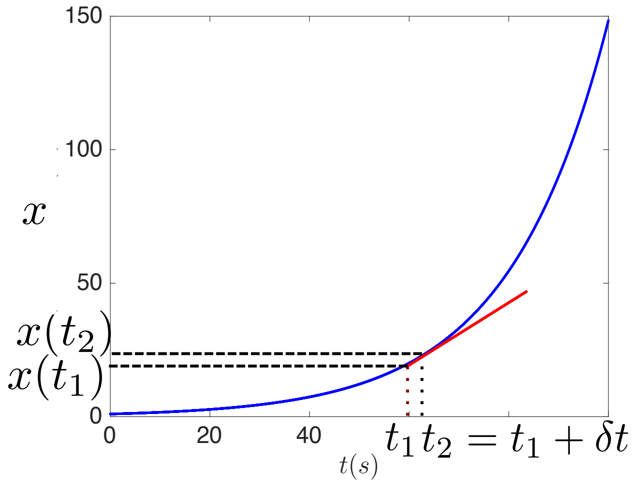


CAS QUELCONQUE : VITESSE INSTANTANÉE



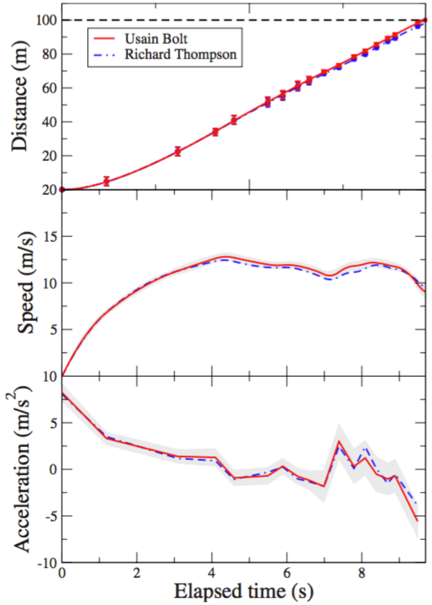
$$V(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t}$$

CAS QUELCONQUE : VITESSE INSTANTANÉE



$$V(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t}$$

RETOUR À USAIN BOLT



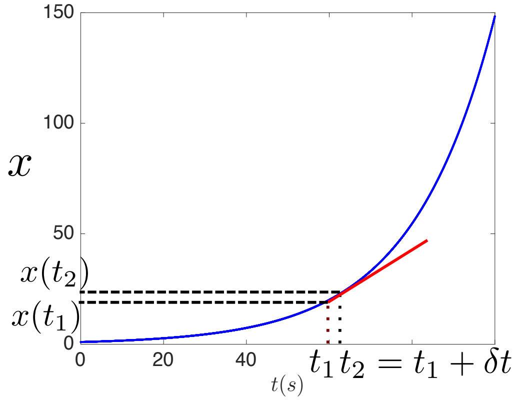
$$V(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{D(t+\delta t) - D(t)}{\delta t} \quad (\mathrm{m/s})$$

$$a(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{V(t+\delta t) - V(t)}{\delta t} \quad (\mathrm{m/s^2})$$

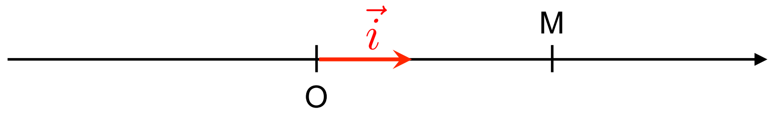
CHAPITRE II
CINÉMATIQUE

Géométriquement :

La **dérivée** par rapport a x d'une fonction f(x)
est
La **tangente** à la courbe y = f(x) dans le repère (O,x,y)



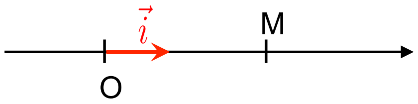
L'ensemble
Repère spatial (O, $\vec{i}$)
et
Repère temporel (définition de l'origine des temps)
Constitue un **Référentiel**



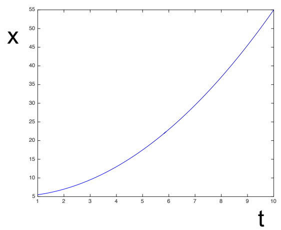
$$\vec{OM} = x\,\vec{i}$$

x est la composante de $\vec{OM}$ sur l'axe (Ox)

t le temps et donc besoin d'une origine des temps

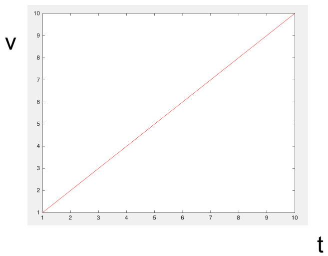


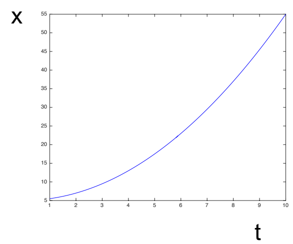
$$\vec{OM} = x\,\vec{i}$$

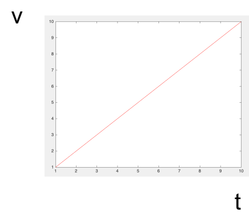


Vitesse : variation de la position au cours du temps

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}$$ Dérivée de la position, x(t), par rapport au temps

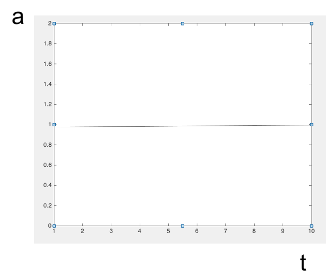






$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$ Dérivée de la vitesse, v(t), par rapport au temps

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i}$$

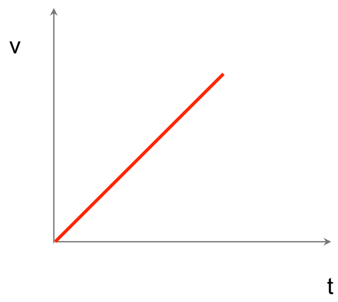


Quelques dérivées

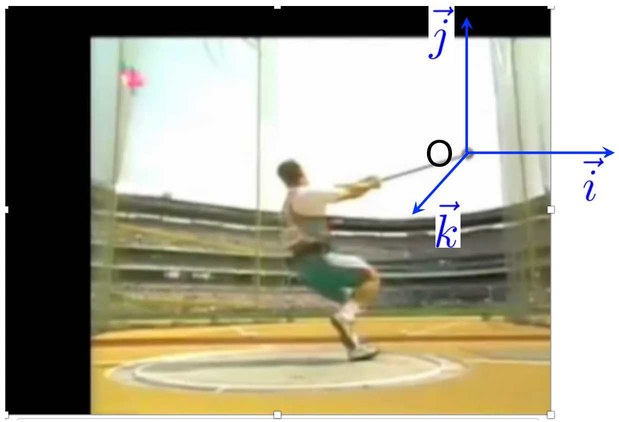
$$f = a \times \ln(x^3) \times t^2$$

$$\dot{f} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = a \times \ln(x^3) \times 2t$$

Donner des exemples vitesse variant linéairement en traçant et en montrant la pente

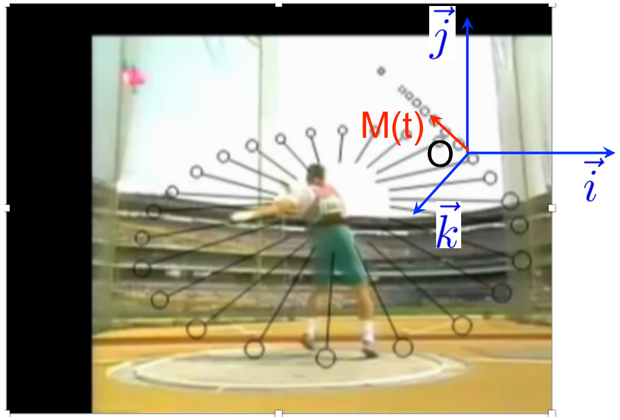


II- TRAJECTOIRE 3D



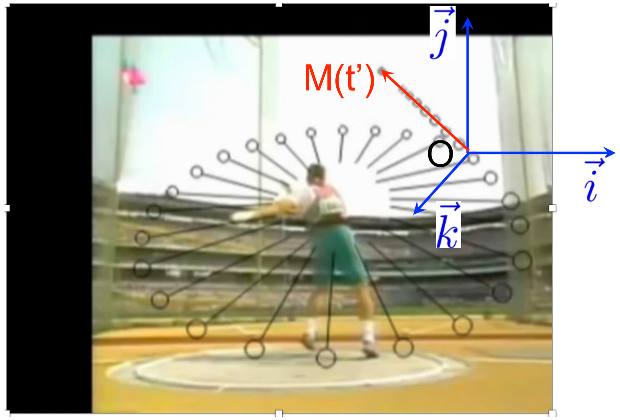
$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$



$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$$

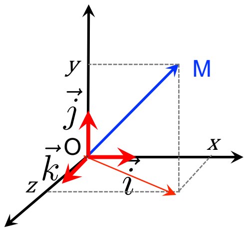
$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$



II- Position, vitesse et accélération

M position du système étudié à l'instant *t*

Référentiel : Repère + Temps



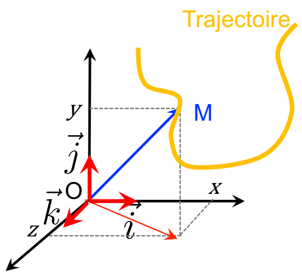
$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

- Référentiel Terrestre (fixe /Terre)
- Référentiel Géocentrique
  - Origine centre de la Terre
  - Axes pointants vers 3 étoiles éloignées
- Référentiel Heliocentrique
  - Origine centre du Soleil
  - Axes pointants vers 3 étoiles éloignées
- Référentiel de Copernic
  - Origine centre de la Galaxie
  - Axes pointants vers 3 étoiles fixes

Pour Galilée : le temps s'écoule de la même manière dans tous les référentiels

II- Position, vitesse et accélération

M position du système étudié à l'instant *t*



$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

Position

$$\begin{cases} x = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i} \\ y = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} \\ z = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} \end{cases}$$

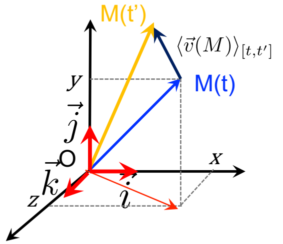
Trajectoire : Ensembles des positions occupées par le point au cours de son mouvement

Équation horaire : la donnée de la position à chaque instant t mesurée dans un référentiel donné

II- Position, vitesse et accélération

M(t) position du système étudié à l'instant *t*

M(t') position du système étudié à l'instant *t'*



$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OM(t')} = x(t')\,\vec{\imath} + y(t')\,\vec{\jmath} + z(t')\,\vec{k}$$

Remarque :

$$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})\ fixe \implies \frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$

Vitesse moyenne

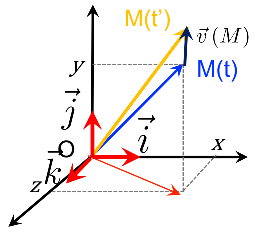
Variation de la position entre 2 instants *t* et *t'*

$$\langle\vec{v}(M)\rangle_{[t,t']} = \frac{\overrightarrow{OM}(t') - \overrightarrow{OM}(t)}{t' - t}$$

II- Position, vitesse et accélération

M(t) position du système étudié à l'instant *t*

M(t') position du système étudié à l'instant *t'*



$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OM(t')} = x(t')\,\vec{\imath} + y(t')\,\vec{\jmath} + z(t')\,\vec{k}$$

Remarque :

$$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})\ fixe \implies \frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$

Vitesse instantanée

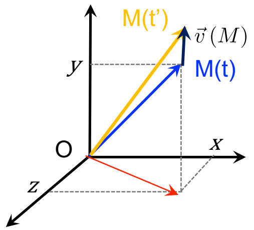
Variation à chaque instant t de la position

$\vec{v}(M)$ est la dérivée du vecteur position par rapport au temps

II- Position, vitesse et accélération

M(t) position du système étudié à l'instant *t*

M(t') position du système étudié à l'instant *t'*



$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OM(t')} = x(t')\,\vec{\imath} + y(t')\,\vec{\jmath} + z(t')\,\vec{k}$$

Remarque :

$$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})\ fixe \implies \frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$

Vitesse instantanée

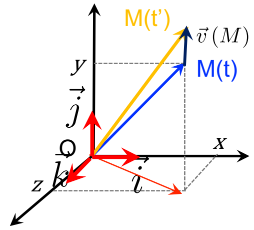
Variation à chaque instant t de la position

$$\vec{v}(M(t)) = \lim_{t'\to t} \frac{\overrightarrow{OM}(t') - \overrightarrow{OM}(t)}{t' - t}$$

II- Position, vitesse et accélération

M(t) position du système étudié à l'instant *t*

M(t') position du système étudié à l'instant *t'*



$$\overrightarrow{OM(t)} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$
$$\overrightarrow{OM(t')} = x(t')\,\vec{\imath} + y(t')\,\vec{\jmath} + z(t')\,\vec{k}$$

Remarque :

$$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})\ fixe \implies \frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$

Vitesse instantanée

$$\vec{v}(M(t)) = \lim_{t'\to t} \frac{\overrightarrow{OM}(t') - \overrightarrow{OM}(t)}{t' - t}$$

$$\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{cases} v_x = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dot{z} = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

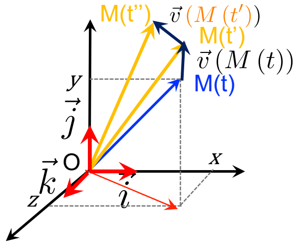
$$\vec{v}(M) = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x = \vec{v}\cdot\vec{i} \\ \dot{y} = v_y = \vec{v}\cdot\vec{j} \\ \dot{z} = v_z = \vec{v}\cdot\vec{k} \end{cases}$$

II- Position, vitesse et accélération

M(t) position du système étudié à l'instant *t*

M(t') position du système étudié à l'instant *t'*



$\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath} + z(t)\,\vec{k}$

Accélération

Variation de la vitesse au cours du temps

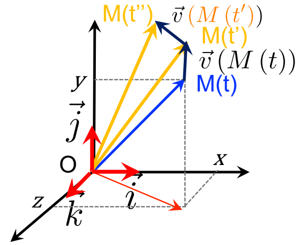
$\vec{a}(M)$ est la dérivée de la vitesse par rapport au temps

Remarque : $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})\ fixe \implies \frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$

II- Position, vitesse et accélération

M(t) position du système étudié à l'instant *t*

M(t') position du système étudié à l'instant *t'*



$\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath} + z(t)\,\vec{k}$

Accélération

Variation de la vitesse au cours du temps

$$\vec{a}\,(M\,(t)) = \lim_{t' \to t} \frac{\overrightarrow{v(M)}(t') - \overrightarrow{v(M)}(t)}{t' - t}$$

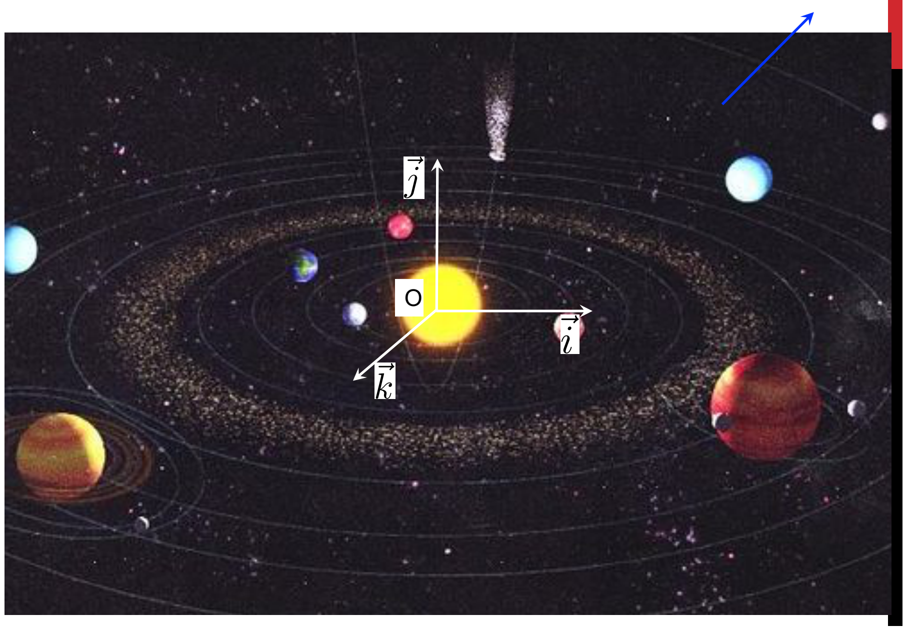
$$\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \begin{cases} \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

$$\vec{a}(M) = \ddot{x}\,\vec{\imath} + \ddot{y}\,\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

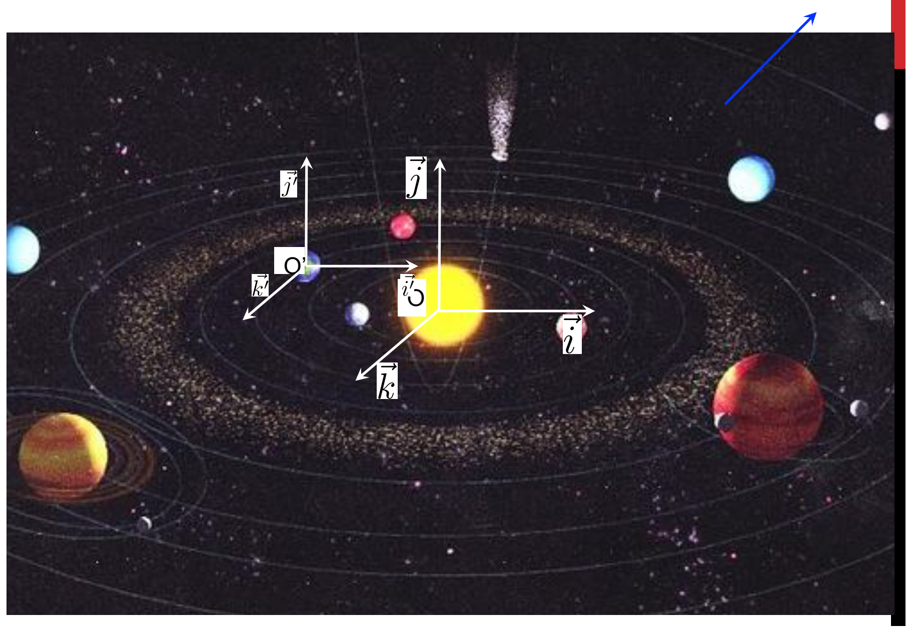
$$\begin{cases} \ddot{x} = a_x = \vec{a} \cdot \vec{i} \\ \ddot{y} = a_y = \vec{a} \cdot \vec{j} \\ \ddot{z} = a_z = \vec{a} \cdot \vec{k} \end{cases}$$

Remarque : $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})\ fixe \implies \frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$

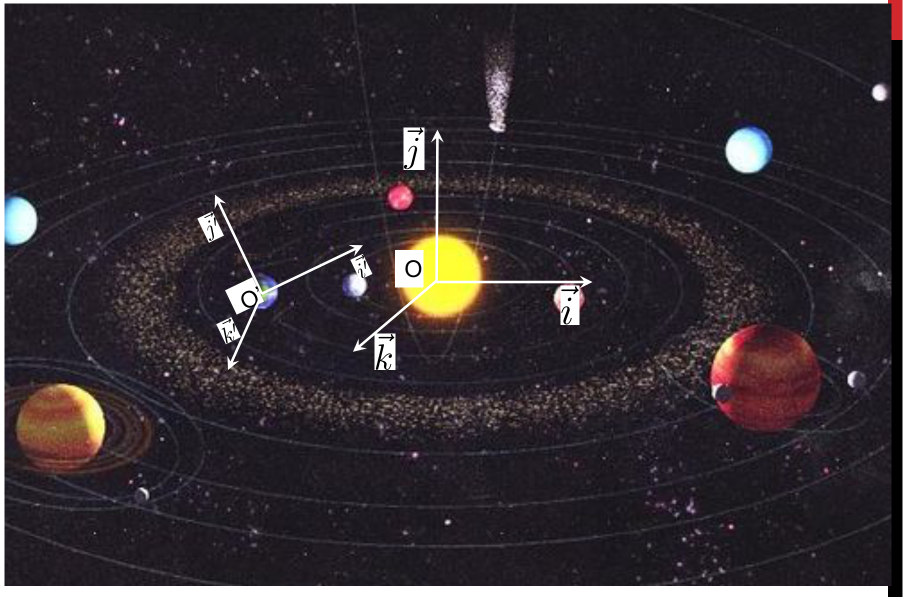
III- Changement de référentiel



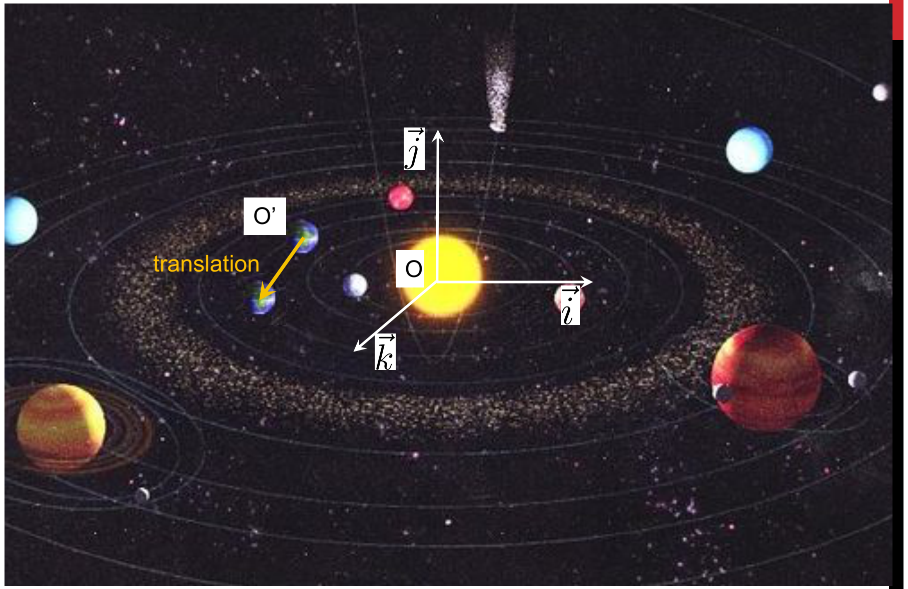
III- Changement de référentiel



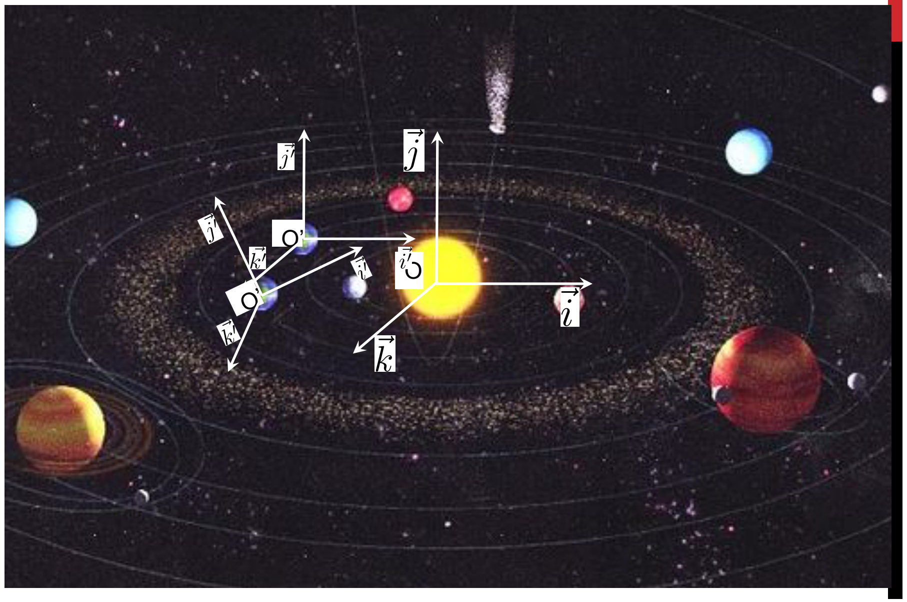
III- Changement de référentiel



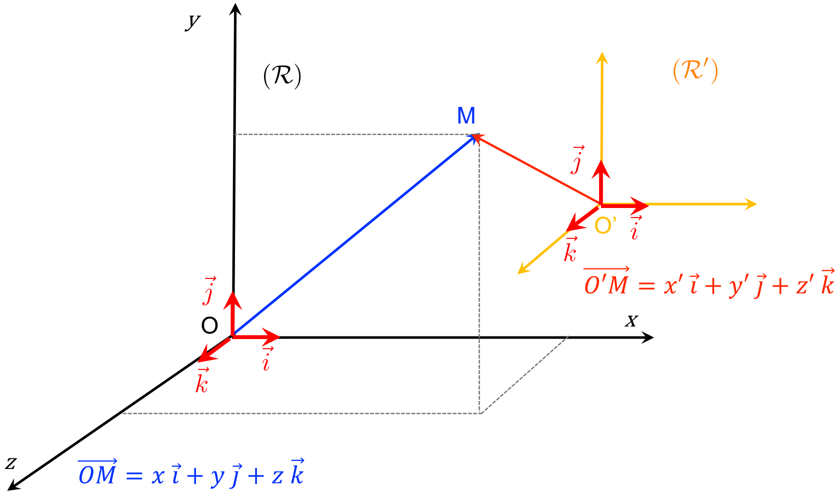
III- Changement de référentiel



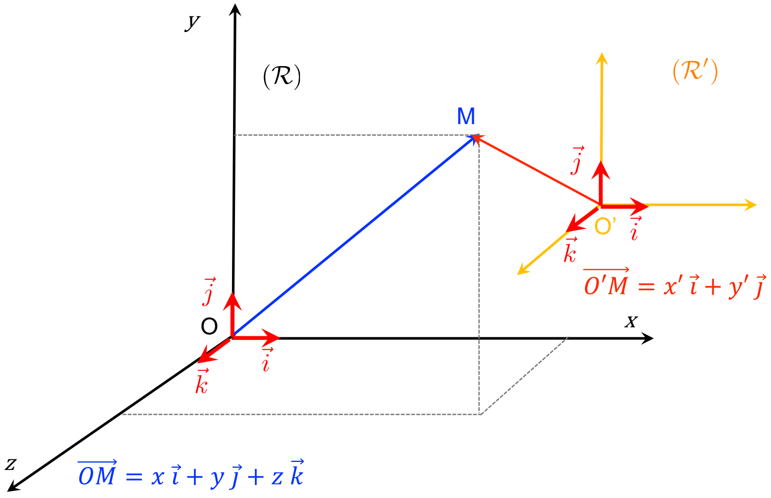
III- Changement de référentiel



III- Changement de référentiel



III- Changement de référentiel

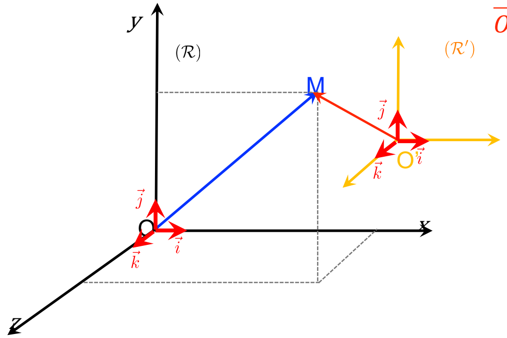


$\overrightarrow{O'M} = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k}$

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

Relation de Chasles: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

III- Changement de référentiel



$\overrightarrow{O'M} = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath} + z'\,\vec{k}$

$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$

Relation de Chasles: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ $\quad$ $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}$

$$\boxed{\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)}$$

II- Changement de référentiel
Invariance Galiléenne

CHAPITRE III
DYNAMIQUE

Force : « Élément » qui fait changer le mouvement

CHAPITRE III
DYNAMIQUE

Force : « Élément » qui fait changer le mouvement

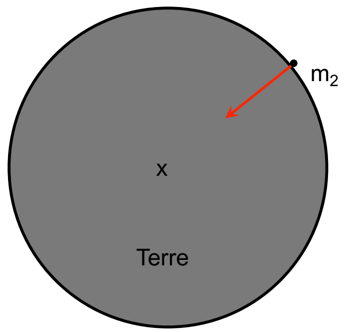
Alors il faut **QUANTIFIER** le mouvement

$\vec{p} = m\vec{v}$ Quantité de mouvement

Le debat Hooke/ Newton https://www.youtube.com/watch?v=NFSfiH6ndvo

L'INTERACTION GRAVITATIONNELLE

Bilan des forces



$R_{1,2}$

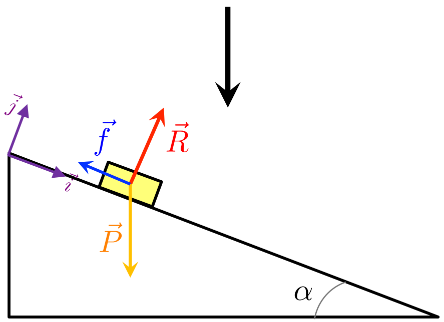
$$G \approx 6{,}67 * 10^{-11}\, m^3 kg^{-1} s^{-2}$$

$$\overrightarrow{F_{1,2}} = -G\,\frac{m_1 * m_2}{{R_{1,2}}^2}\,\overrightarrow{u_{1,2}}$$

FROTTEMENT SOLIDE

Candide Thovex

modèle



FROTTEMENT SOLIDE

2 type de frottements solide:

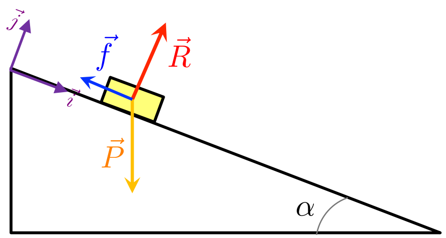
- **Frottement dynamique**
- **Frottements statique**

Bilan des forces

$\vec{f}$: frottement

$\vec{R}$: réation du support

$\vec{P}$: poids

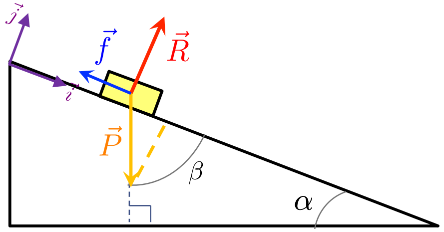


FROTTEMENT SOLIDE

- **Frottement dynamique**

$$\|\vec{f}\| = f = k_d \|\vec{R}\|$$

S'oppose au mouvement



Bilan des forces

$\vec{f}$: frottement
$\vec{R}$: réation du support
$\vec{P}$: poids

On projette

$$\begin{cases} -f + P\sin\alpha = m\ddot{x} \\ R - P\cos\alpha = m\ddot{y} \end{cases}$$

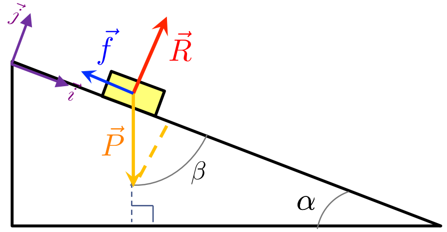
$$\pi = \beta + \alpha + \frac{\pi}{2} \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

FROTTEMENT SOLIDE

- **Frottement dynamique**

$$\|\vec{f}\| = f = k_d \|\vec{R}\|$$

S'oppose au mouvement



Bilan des forces

$\vec{f}$: frottement
$\vec{R}$: réation du support
$\vec{P}$: poids

On projette

$$\begin{cases} -f + P\sin\alpha = m\ddot{x} \\ R - P\cos\alpha = m\ddot{y} \end{cases}$$

PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$$\boxed{g(-k_d \cos\alpha + \sin\alpha) = \ddot{x}}$$

Le mobile reste en contact $\ddot{y} = 0$

$R = P\cos\alpha \Leftrightarrow R = mg\cos\alpha$

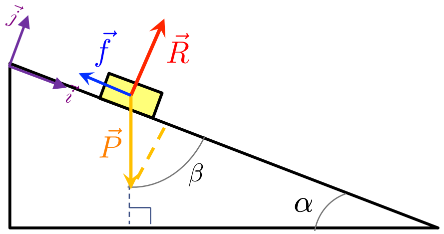
$f = k_d\, mg\cos\alpha$

FROTTEMENT SOLIDE

- **Frottement dynamique**

$$\|\vec{f}\| = f = k_d \|\vec{R}\|$$

S'oppose au mouvement



Bilan des forces

$\vec{f}$: frottement
$\vec{R}$: réation du support
$\vec{P}$: poids

On projette

$$\begin{cases} -f + P\sin\alpha = m\ddot{x} \\ R - P\cos\alpha = m\ddot{y} \end{cases}$$

PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$$\boxed{\ddot{y} = 0}$$

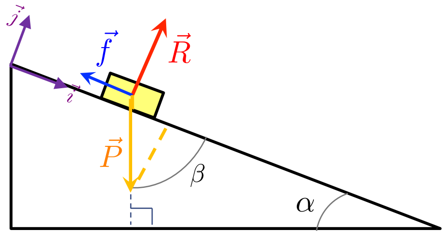
$$\boxed{g(-k_d \cos\alpha + \sin\alpha) = \ddot{x}}$$

FROTTEMENT SOLIDE

- **Frottement statique**

$$\|\vec{f}\| = f < k_s \|\vec{R}\|$$

S'oppose au mouvement



Bilan des forces

$\vec{f}$: frottement
$\vec{R}$: réation du support
$\vec{P}$: poids

On projette

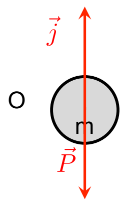
$$\begin{cases} -f + P\sin\alpha = 0 \\ R - P\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = mg\sin\alpha \\ R = mg\cos\alpha \end{cases}$$

$f_{max} = k_s mg\cos\alpha$

Perte d'équilibre si $mg\sin\alpha > f_{max}$ $\Rightarrow k_s = \tan\alpha$

FROTTEMENT VISQUEUX



$\vec{f_v} = -\lambda \vec{v}$

$\vec{v}$ Vitesse de la masse m

λ Coefficient de frottement visqueux

Problème : Bille soumise à son poids en chute dans un fluide visqueux

Bilan des forces

$\vec{P} = m\vec{g}$ poids

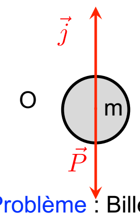
$\vec{f_v} = -\lambda \vec{v}$: frottement visqueux

Choix du repère : $(O, \vec{j})$ $P = -mg\vec{j}$ et $\vec{f_v} = -\lambda \dot{y}\vec{j}$

PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad \rightarrow \quad -mg - \lambda\dot{y} = m\ddot{y}$

$$\ddot{y} + \frac{\lambda}{m}\dot{y} = -g$$ Équation différentielle

FROTTEMENT VISQUEUX



$\vec{f_v} = -\lambda \vec{v}$

$\vec{v}$ Vitesse de la masse m

λ Coefficient de frottement visqueux

Problème : Bille soumise à son poids en chute dans un fluide visqueux

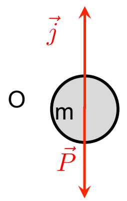
$$\ddot{y} + \frac{\lambda}{m}\dot{y} = -g$$ Équation différentielle

Remarque: $\left[\frac{\lambda}{m}\right] = \frac{[\lambda]}{[m]} = \frac{MT^{-1}}{M} = T^{-1}$

On pose : $\frac{1}{\tau} = \frac{\lambda}{m}$ et $u(t) = \dot{y}$

$$\ddot{y} + \frac{\lambda}{m}\dot{y} = -g \longrightarrow \boxed{\dot{u} + \frac{1}{\tau}u = -g}$$

FROTTEMENT VISQUEUX



$\vec{f_v} = -\lambda \vec{v}$

Problème :
Bille soumise à son poids en chute dans un fluide visqueux

$\dot{u} + \frac{1}{\tau}u = -g$ Équation différentielle ordinaire, avec second membre

$u = u_P + u_H$

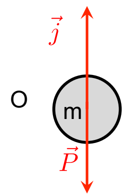
u_H : Solution de l'équation différentielle homogène $\dot{u}_H + \frac{1}{\tau}u_H = 0$

u_P : Solution particulière

On choisi u_P constante: $\dot{u_P} = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{\tau}u_p = -g$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_p = -g\tau}$$

FROTTEMENT VISQUEUX



$\vec{f_v} = -\lambda \vec{v}$

Problème :
Bille soumise à son poids en chute dans un fluide visqueux

$\dot{u} + \frac{1}{\tau}u = -g \qquad u = u_P + u_H$

Solution particulière $u_p = -g\tau$

Solution de l'Equation différentielle homogène $\dot{u}_H + \frac{1}{\tau}u_H = 0$

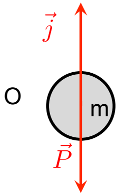
$$\Leftrightarrow \frac{\dot{u}_H}{u_H} = -\frac{1}{\tau} \quad \Rightarrow \ln(u_H) = -\frac{t}{\tau} + C_1$$

$\Rightarrow u_H = Ae^{-t/\tau}$ avec $A = e^{C_1}$

$\Rightarrow u = Ae^{-t/\tau} - g\tau$ A est déterminée par les conditions initiales

$\Leftrightarrow \boxed{\dot{y} = Ae^{-t/\tau} - g\tau}$ à $t = 0,\ \dot{y} = 0 \Rightarrow A = g\tau \quad \Rightarrow \dot{y} = g\tau\left(e^{-t/\tau} - 1\right)$

FROTTEMENT VISQUEUX

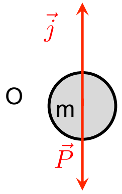


$\vec{f_v} = -\lambda \vec{v}$

Problème :
Bille soumise à son poids en chute dans un fluide visqueux

$$\dot{y} = g\tau \left(e^{-t/\tau} - 1\right)$$

FROTTEMENT VISQUEUX



$\vec{f_v} = -\lambda \vec{v}$

Problème :
Bille soumise à son poids en chute dans un fluide visqueux

$$\dot{y} = g\tau \left(e^{-t/\tau} - 1\right)$$

On intègre $\dot{y}$ par rapport au temps pour obtenir y

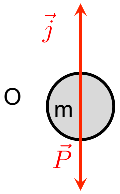
$$\Rightarrow y = g\tau \left(-\tau e^{-t/\tau} - t\right) + C_2$$

C_2 est déterminée à partir des conditions initiales

$$\text{à } t = 0,\ y = 0 \Rightarrow C_2 = g\tau^2$$

$$\boxed{y(t) = -g\tau^2 \left(e^{-t/\tau} + \frac{t}{\tau} - 1\right)}$$

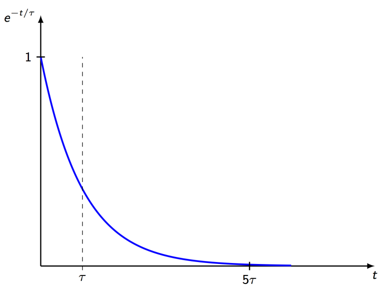
FROTTEMENT VISQUEUX

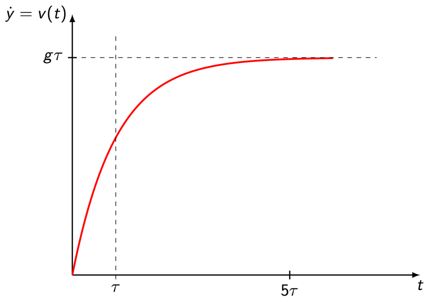


$\vec{f_v} = -\lambda \vec{v}$

Problème :
Bille soumise à son poids en chute dans un fluide visqueux

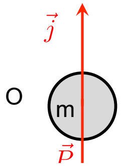
$$\dot{y} = g\tau \left(e^{-t/\tau} - 1\right)$$





$$v(t) = g\tau \Longleftrightarrow v(t) = \frac{mg}{\lambda} \qquad \vec{f_v} = -m\vec{g}$$

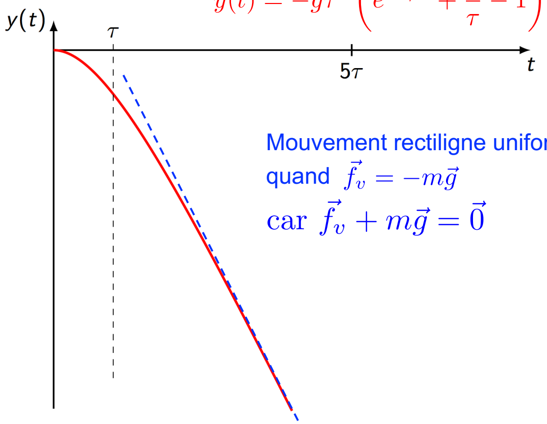
FROTTEMENT VISQUEUX



$\vec{f_v} = -\lambda \vec{v}$

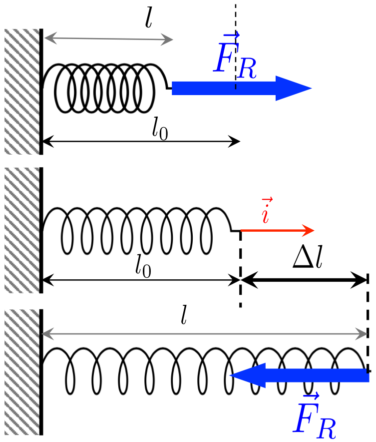
Problème :
Bille soumise à son poids en chute dans un fluide visqueux

$$y(t) = -g\tau^2 \left(e^{-t/\tau} + \frac{t}{\tau} - 1\right)$$



Mouvement rectiligne uniforme
quand $\vec{f_v} = -m\vec{g}$
car $\vec{f_v} + m\vec{g} = \vec{0}$

FORCE DE RAPPEL ÉLASTIQUE



l_0 longueur à vide du ressort

l longueur du ressort

$$\vec{F}_R = -k(l - l_0)\vec{i}$$

k : raideur du ressort

$\vec{i}$ Vecteur unitaire dans la direction et le sens de l'allongement

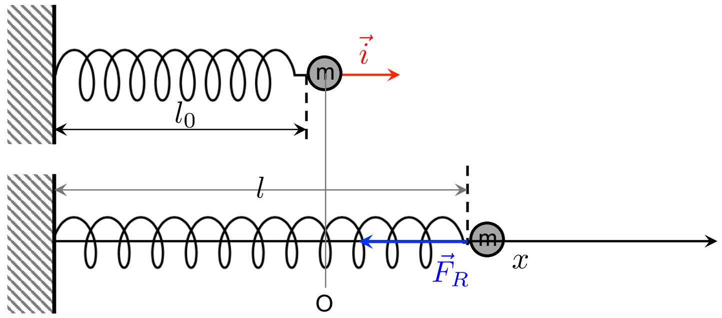
La force s'oppose à la déformation

$F_R = \vec{F}_R \cdot \vec{i}$

avec $\vec{i}$ dans le sens de l'allongement

$$\begin{cases} l > l_0 \ : \ F_R < 0 \\ l < l_0 \ : \ F_R > 0 \end{cases}$$

FORCE DE RAPPEL ÉLASTIQUE



Bilan des forces : Force de rappel du ressort

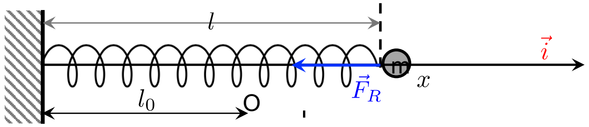
$\vec{F}_R = -k(l - l_0)\vec{i}$

Choix du référentiel $(O, \vec{i})$

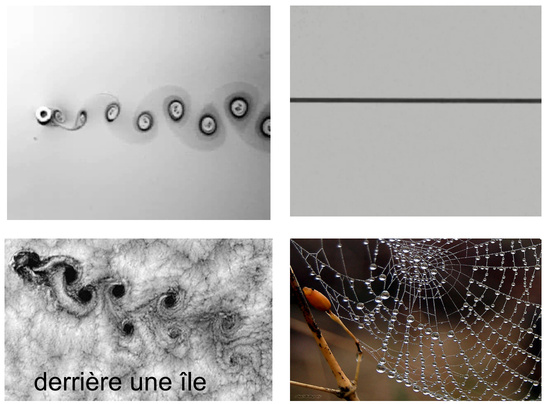
O position occupée par la masse m quand le ressort est au repos

$$\Rightarrow (l - l_0) = x \implies \quad \vec{F}_R = -kx\vec{i}$$

L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

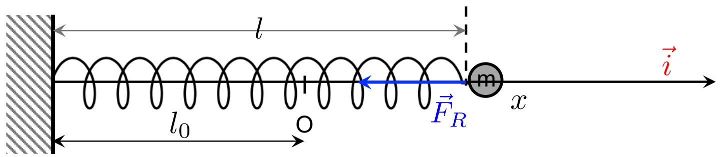


Brique de base pour la modélisation de nombreux phénomènes



Tremblement de terre

L'OSCILLATEUR HARMONIQUE



Bilan des forces : Force de rappel du ressort

$\vec{F}_R = -kx\vec{i}$

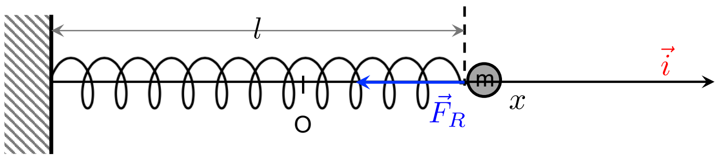
Principe Fondamental de la Dynamique $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$-kx = m\ddot{x}$ $\quad \boxed{\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$ Équation différentielle du 2ème ordre

On pose : $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\quad \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$[\omega] = T^{-1}$ $\quad \omega$: pulsation

L'OSCILLATEUR HARMONIQUE



$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Solution : $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

A et B constantes $\in \mathbb{R}$ déterminées par les conditions initiales

Problème :

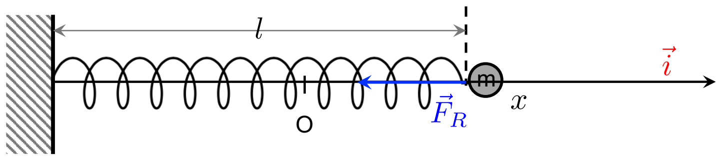
La masse m placée en x =x_0 est lâchée sans vitesse initiale à l'instant t=0

$$\text{à } t = 0,\ \dot{x} = 0 \ \Rightarrow\ B = 0$$

$$x = x_0 \ \Rightarrow\ A = x_0$$

$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega t)}$$

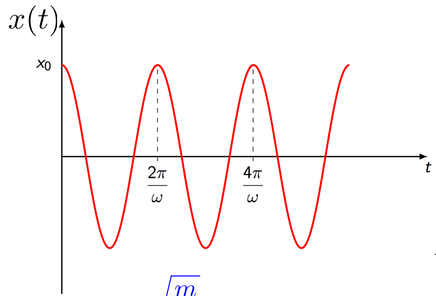
L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

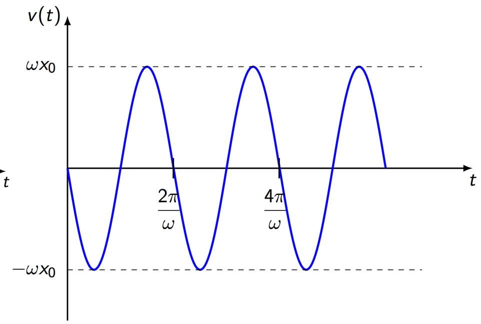


Problème :

La masse m placée en x(t=0) =x_0 v(t=0) = 0

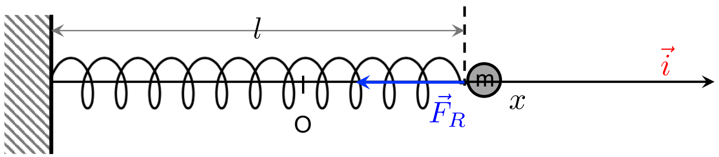
$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega t)}$$





$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

L'OSCILLATEUR HARMONIQUE



Solution : $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

A et B constantes $\in \mathbb{R}$ déterminées par les conditions initiales

Problème :

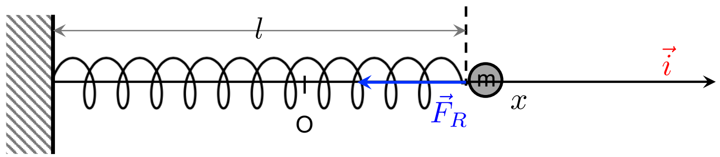
La masse m placée en x =x_0 est lâchée avec la vitesse v_0 à l'instant t=0

$$\text{à } t = 0,\ x(0) = x_0 \ \Rightarrow\ A = x_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \ \Rightarrow\ B = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)}$$

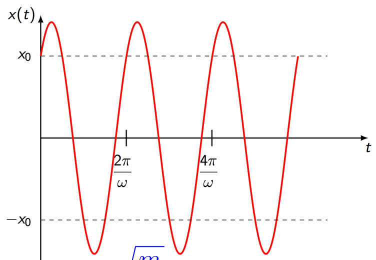
L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

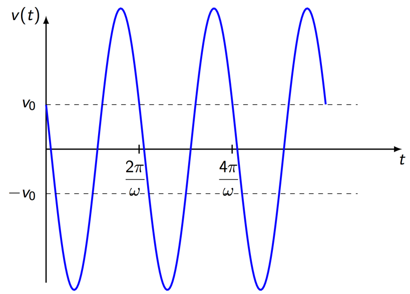


Problème :

La masse m placée en x(0) =x_0 avec v(0) = v_0

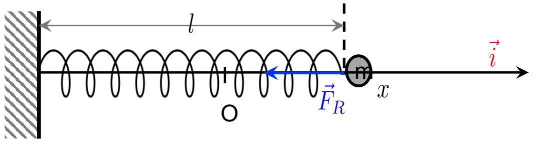
$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)}$$





$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

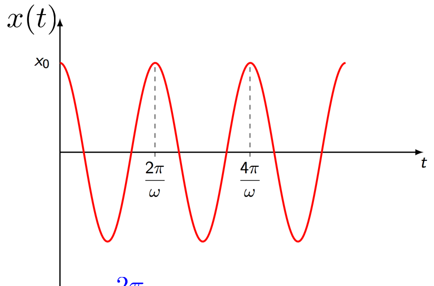


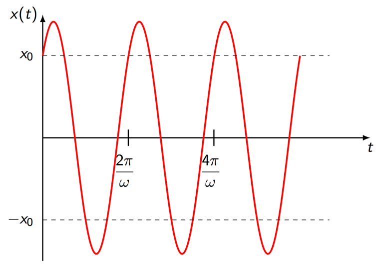
x(t=0) =x_0 v(t=0) = 0

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega t)}$$

x(0) =x_0 avec v(à) = v_0

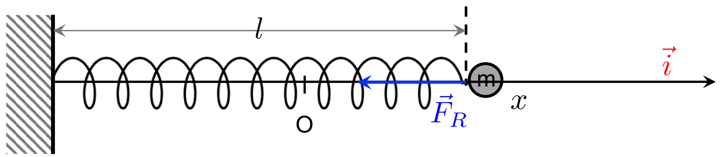
$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)}$$





$T = \frac{2\pi}{\omega}$ Ne dépend pas des conditions initiales le mouvement est isochrome

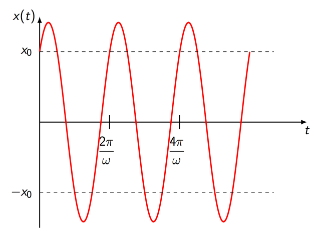
L'OSCILLATEUR HARMONIQUE

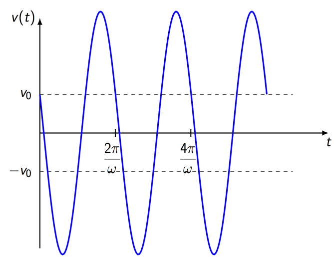


Forme équivalente des solutions

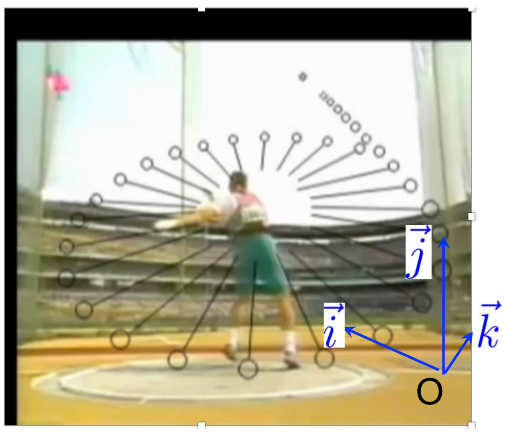
$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

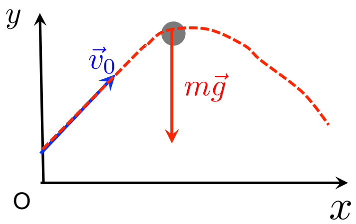
ϕ phase à l'origine



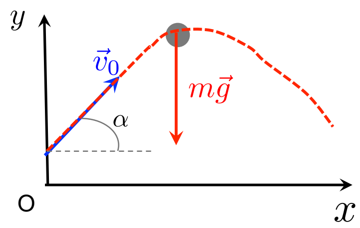


LE LANCER DU MARTEAU 2D





LE LANCER DU MARTEAU 2D



Référentiel $\mathcal{R} : (O, \vec{i}, \vec{j})$

Bilan des forces : $m\vec{g}$

PFD : $m\vec{a} = m\vec{g}$

On projette sur la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$

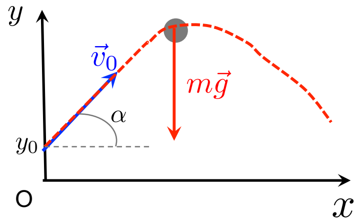
$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases} \xrightarrow{\text{on intègre}} \begin{cases} \dot{x} = C_1 \\ \dot{y} = -gt + C_2 \end{cases}$$

C_1 et C_2 déterminées à partir de conditions initiales:

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos(\alpha) \Longrightarrow C_1 = v_0 \cos(\alpha)$$

$$\dot{y}(0) = v_0 \cos(\alpha) \Longrightarrow C_2 = v_0 \sin(\alpha)$$

LE LANCER DU MARTEAU 2D



Référentiel $\mathcal{R}$: $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Bilan des forces : $m\vec{g}$

PFD : $m\vec{a} = m\vec{g}$

sur la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos(\alpha) \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin(\alpha) \end{cases} \xrightarrow{\text{on intègre}} \begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha)t + C_3 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + C_4 \end{cases}$$

C_3 et C_4 déterminées à partir de conditions initiales:

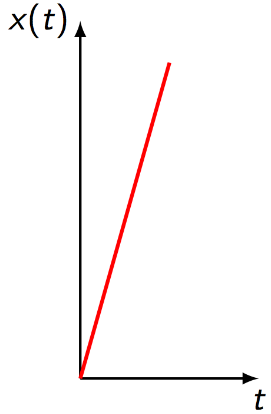
$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + y_0 \end{cases}}$$

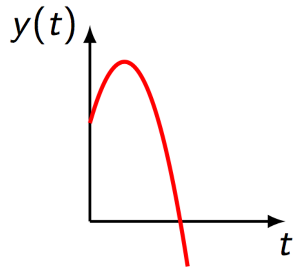
Équation horaire du mouvement

LE LANCER DU MARTEAU 2D

$$\boxed{\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + y_0 \end{cases}}$$

Équation horaire du mouvement

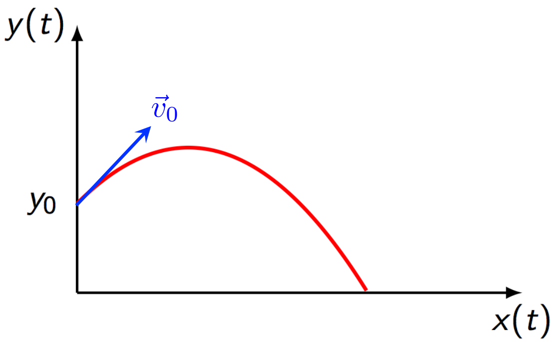




LE LANCER DU MARTEAU 2D

Trajectoire y = y(x) ?

$$\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha)t \longrightarrow t = \dfrac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + y_0 \longrightarrow \boxed{y = \dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)x + y_0} \end{cases}$$



LE SAUT A SKI

RÉVISION

Exercice: Quelle est la vitesse initiale pour réussir un lancer franc quand on lance le ballon à 45°?

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha)\times t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)\times t \end{cases}$$

$m = 600\text{g}$ $\quad d_b = 25\text{cm}$

Pour un lancer "parfait" il faut que quand $x(t) = 4.6\,\text{m},\ z(t) = 0.55\,\text{m}$

RÉVISION

Exercice: Quelle est la vitesse initiale pour réussir un lancer franc quand on lance le ballon à 45°?

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos(\alpha)\times t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)\times t \end{cases}$$

$m = 600\text{g}$ $\quad d_b = 25\text{cm}$

$\beta = 135°$ ça marche

Pour un lancer "parfait" il faut que quand $x(t) = 4.6\,\text{m},\ z(t) = 0.55\,\text{m}$

$$x_p = v_0\cos(\alpha)\times t_p$$

$$z_p = -\frac{1}{2}gt_p^2 + v_0\sin(\alpha)\times t_p$$

$$z_p = -\frac{1}{2}g\times\left(\frac{x_p}{v_0\cos(\alpha)}\right)^2 + v_0\sin(\alpha)\times\frac{x_p}{v_0\cos(\alpha)}$$

$$\boxed{\Rightarrow v_0^2 = -\frac{g\,x_p^2}{2\cos(\alpha)\times(x_p\tan\alpha - z_p)}}$$

$V_0 = 7,2\,\text{m/s}$

DYNAMIQUE : RÉSUMÉ

Méthode :

- Définition du système
- Bilan des forces
- Choix d'un référentiel
- Projection du PFD sur la base du référentiel

→ Équation différentielle

DYNAMIQUE : RÉSUMÉ

→ Équation différentielle

Force constante : Intégrations successives

Lancé du marteau $\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = v_0\cos(\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t + y_0 \end{cases}$

Équation différentielle du premier ordre $\quad \dot{u} + \frac{1}{\tau}u = -g \quad u = u_P + u_H$

$\dot{u}_H + \frac{1}{\tau}u_H = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{\dot{u}_H}{u_H} = -\frac{1}{\tau} \quad \Rightarrow u_H = Ae^{-t/\tau} \quad \dot{u}_P = 0$

Équation différentielle du deuxième ordre

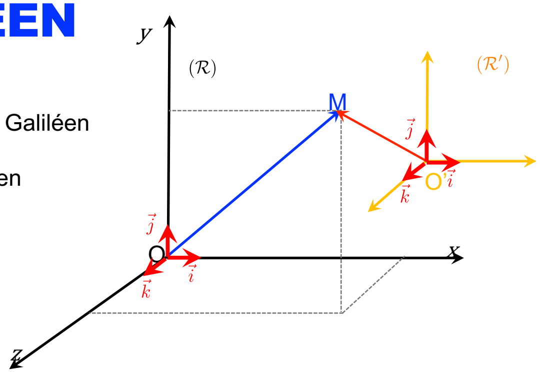
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

Attention la solution dépend de la forme de l'équation

DYNAMIQUE EN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

$\mathcal{R}' : (O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ référentiel non Galiléen

$\mathcal{R} : (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ référentiel Galiléen



$\vec{V} = \frac{\mathrm{d}\vec{OO}'}{\mathrm{d}t}$ Vitesse de $\mathcal{R}'$

$\vec{A} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{OO}'}{\mathrm{d}t^2}$ Accélération de $\mathcal{R}'$

Point matériel P de masse m soumis à une force $\vec{F}$

Question : Quelle est l'équation différentielle du mouvement du point P observé dans le référentiel $\mathcal{R}'$

DYNAMIQUE EN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

$\vec{V} = \frac{\mathrm{d}\vec{OO}'}{\mathrm{d}t}$ Vitesse de $\mathcal{R}'$ $\vec{A} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{OO}'}{\mathrm{d}t^2}$ Accélération de $\mathcal{R}'$

Point matériel P de masse m soumis à une force $\vec{F}$

Question : Quelle est l'équation différentielle du mouvement du point P observé dans le référentiel $\mathcal{R}'$

On ne peut pas appliquer le PFD dans $\mathcal{R}'$

On l'applique dans $\mathcal{R}$

$\vec{F} = m\vec{a}$

$\Leftrightarrow \vec{F} = m\left(\vec{a}' + \vec{A}\right)$

$\Leftrightarrow m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A}$ $\Rightarrow \boxed{m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{f}_e}$

$\vec{f}_e = -m\vec{A}$: force d'entrainement

DYNAMIQUE EN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

$\vec{V} = \frac{\mathrm{d}\vec{OO}'}{\mathrm{d}t}$ Vitesse de $\mathcal{R}'$ $\vec{A} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{OO}'}{\mathrm{d}t^2}$ Accélération de $\mathcal{R}'$

Point matériel P de masse m soumis à une force $\vec{F}$

Question : Quelle est l'équation différentielle du mouvement du point P observé dans le référentiel $\mathcal{R}'$

dans $\mathcal{R}'$ $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{f}_e$ $\vec{f}_e = -m\vec{A}$: force d'entrainement

Remarques :

- La force d'inertie (ou d'entrainement) $\vec{f}_e$ n'est présente que parce que le référentiel est non Galiléen
- Si $\mathcal{R}'$ avait un mouvement de rotation par rapport à $\mathcal{R}$ on aurait en plus de la force d'entrainement, la force de Coriolis.

DYNAMIQUE EN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

$\vec{V} = \frac{\mathrm{d}\vec{OO}'}{\mathrm{d}t}$ Vitesse de $\mathcal{R}'$ $\vec{A} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{OO}'}{\mathrm{d}t^2}$ Accélération de $\mathcal{R}'$

dans $\mathcal{R}'$ $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{f}_e$ $\vec{f}_e = -m\vec{A}$: force d'entrainement

Exemple :

1. Accéléromètre à ressort
2. Freinage d'un train.

DYNAMIQUE : RÉVISION

Bien lire l'énoncé.
Penser au unités.

Méthode :

- Définition du système
- Bilan des forces
- Choix d'un référentiel
- Projection du PFD sur la base du référentiel

→ Équation différentielle

DYNAMIQUE : RÉSUMÉ

→ Équation différentielle

Force constante : Intégrations successives

Lancé du marteau $\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases}$ $\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha) t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\alpha) t + y_0 \end{cases}$

Équation différentielle du premier ordre $\dot{u} + \frac{1}{\tau} u = -g$ $u = u_P + u_H$

$\dot{u}_H + \frac{1}{\tau} u_H = 0 \Leftrightarrow \frac{\dot{u}_H}{u_H} = -\frac{1}{\tau}$ $\Rightarrow u_H = A e^{-t/\tau}$ $\dot{u}_P = 0$

Équation différentielle du deuxième ordre

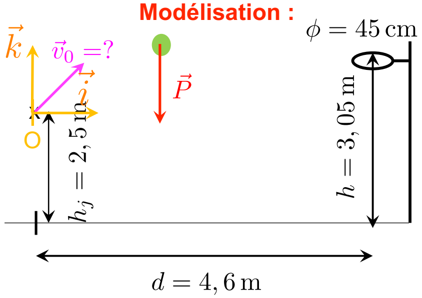
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

Attention la solution dépend de la forme de l'équation

RÉVISION

Exercice: Quelle est la vitesse initiale pour réussir un lancer franc quand on lance le ballon à 45°?

Modélisation :



Hypothèse : On néglige les frottements

Système : Ballon point matériel B

Bilan des forces : $\vec{P}$

Choix d'un référentiel $\{O, \vec{i}, \vec{k}\}$

PFD

$$\sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

RÉVISION

Exercice: Quelle est la vitesse initiale pour réussir un lancer franc quand on lance le ballon à 45°?

Système : Ballon point matériel B

Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g}$

Choix d'un référentiel $\{O, \vec{i}, \vec{k}\}$

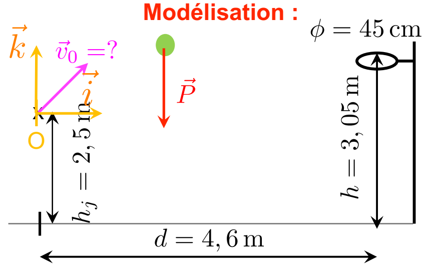
PFD $\sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$

$$\sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{g} = m\vec{a}$$

On projette sur $\{\vec{i}, \vec{k}\}$

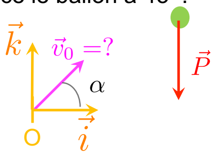
$$\begin{cases} 0 = \ddot{x} & (1) \\ -g = \ddot{z} & (2) \end{cases}$$

Modélisation :



RÉVISION

Exercice: Quelle est la vitesse initiale pour réussir un lancer franc quand on lance le ballon à 45°?



$$\begin{cases} 0 = \ddot{x} & (1) \\ -g = \ddot{z} & (2) \end{cases}$$

On prend une primitive de $\ddot{x} = 0$

$(1) \Leftrightarrow \dot{x} = C_1 \quad$ or $\dot{x}(t=0) = v_0 \cos(\alpha)$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = v_0 \cos(\alpha)$

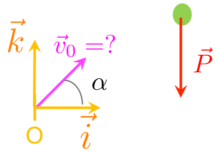
On prend une primitive de $\dot{x}(t) = v_0 \cos(\alpha)$

$\Rightarrow x(t) = v_0 \cos(\alpha) \times t + C_2$

or $x(t=0) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{x(t) = v_0 \cos(\alpha) \times t}$

RÉVISION

Exercice: Quelle est la vitesse initiale pour réussir un lancer franc quand on lance le ballon à 45°?



$$\begin{cases} 0 = \ddot{x} & (1) \\ -g = \ddot{z} & (2) \end{cases}$$

(2) On prend une primitive de $-g = \ddot{z}$

$\Rightarrow \dot{z} = -g \times t + C_3$

or $\dot{z}(t=0) = v_0 \sin(\alpha)$

$\Rightarrow \dot{z} = -gt + v_0 \sin(\alpha)$

On prend une primitive de $\dot{z} = -gt + v_0 \sin(\alpha)$

$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha) \times t + C_4$

or $z(t=0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha) \times t}$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Différentes formes : On les classe selon le phénomène qui leur donne naissance
- Combustion (énergie chimique)
- Fission/Fusion nucléaire
- Thermique
- Rayonnée (le soleil)
- Cinétique

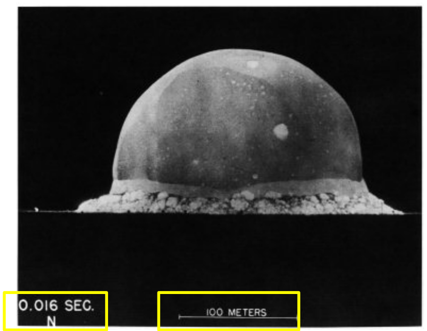
Quelques exemples:
- Chute d'un flocon de neige : 700 nJ (cinétique)
- Chute d'une goutte de pluie : 85 μJ (cinétique)
- 1 tasse de café : 60kJ (Thermique)
- La digestion d'une pomme : 250 kJ (chimique)
- 1 voiture sur route : 500 kJ (cinétique)
- Bombe sur Hiroshima : 60 TJ (nucléaire)

Energie : concept abstrait

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Énergie : Différentes formes
Se conserve

Exemple : Bombe atomique



Trinity Test, 16 juillet 1945

Geoffrey Taylor

Toute l'énergie atomique est convertie en énergie cinétique

Analyse dimensionnelle

$$R^5 = \frac{E}{\rho}t^2$$

Échelle de longueur

Échelle de temps

$\boxed{E = 70\ 10^{12}\ \text{J}}$

En réalité E= $60\ 10^{12}$ J

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

> For those who want some proof that physicists are human, the proof is is the idiocy of all the different units which they use for measuring energy.
>
> Richard Feynman, 1964

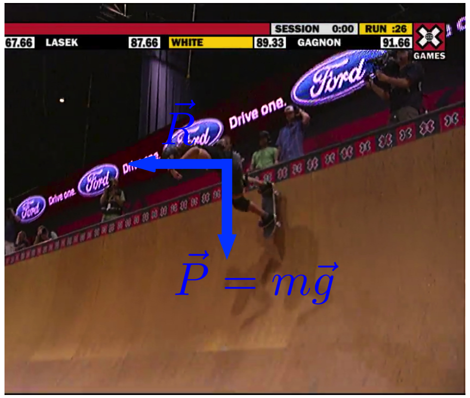
1 erg = 0.1 micro Joule
1 cal = 4184 Joule
1 tonne de pétrole 41 à 45 GJ

L'énergie est :
- Une quantité scalaire
- Un concept abstrait mais central en physique
- Une quantité qui se conserve (éventuellement en changeant de forme)

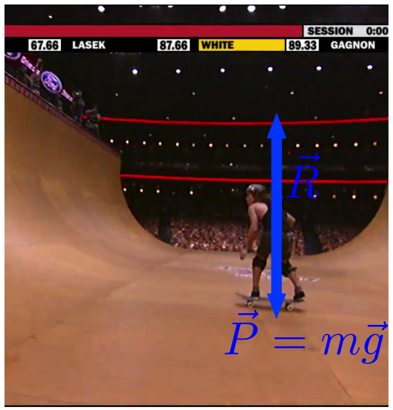
CHAPITRE IV : ÉNERGIE

La notion d'énergie permet de penser globalement (on ne s'intéresse pas aux détails). On fait le bilan de l'énergie fournie au système et de l'énergie perdue par le système.

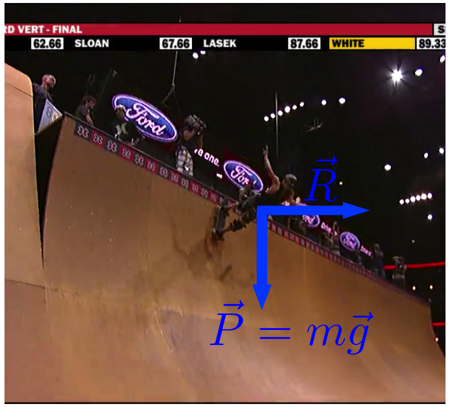
CHAPITRE IV
ÉNERGIE



CHAPITRE IV
ÉNERGIE



CHAPITRE IV :ÉNERGIE



CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Dans un système mécanique l'énergie se présente sous 2 formes: L'énergie cinétique et le travail des forces qui s'applique sur le système

Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ représente l'état du système

Le travail des forces appliquées au système : représente l'énergie apportée ou perdue par le système par les forces qui s'appliquent au système **W = ?**

Le travail des forces fait varier l'énergie cinétique du système : Théorème de l'énergie cinétique

2 types de forces : conservatives ou non conservatives

Au forces conservatives on associe une énergie potentielle E_p

Énergie Mécanique = Énergie cinétique + Énergie potentielle

$$E_m = E_c + E_p$$

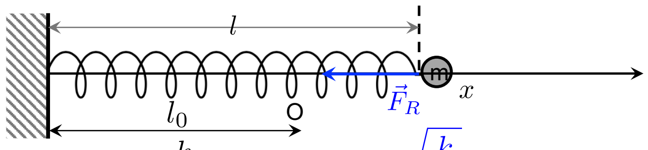
CHAPITRE IV : ÉNERGIE

But du cours :

- Expliciter W : travail d'une force
- Expliciter Ep : l'énergie potentielle
- Obtenir les théorèmes énergétiques

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Exemple : l'Oscillateur Harmonique



PFD: $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ $\qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

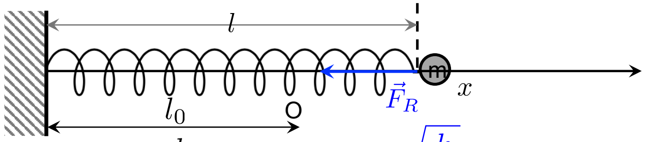
$$\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{k}{m}x\right) = 0 \times \dot{x}$$

or $\dot{x}\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\dot{x})^2}{\mathrm{d}t}$ $\qquad \dot{x}x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Exemple : **l'Oscillateur Harmonique**



PFD: $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$ $\qquad \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

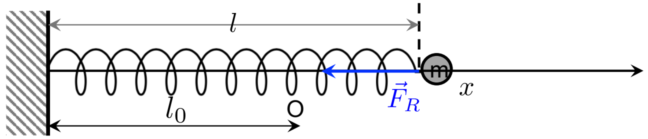
$$\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{k}{m}x\right) = 0 \times \dot{x} \qquad \text{or} \quad \dot{x}\ddot{x} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\dot{x})^2}{\mathrm{d}t} \qquad \dot{x}x = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{Ec} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{Ep}\right) = 0 \qquad E_m = E_c + E_p \qquad \boxed{\text{PFD} \rightarrow \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0}$$

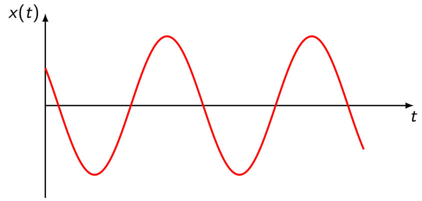
$\frac{1}{2}kx^2$ énergie potentielle associée à la force de rappel $\vec{F} = -kx\vec{i}$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Exemple : **l'Oscillateur Harmonique**

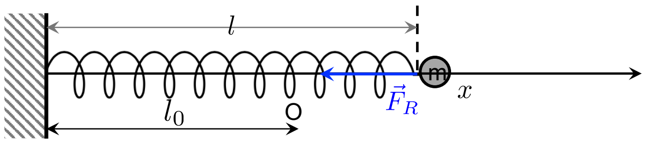


$$x(t) = x_0\,\cos(\omega\,t) \qquad \frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad E_m = E_c + E_p$$



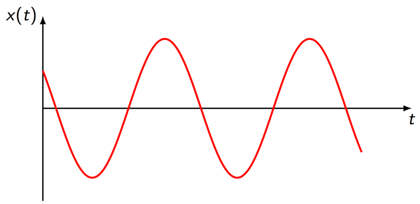
CHAPITRE IV : ÉNERGIE

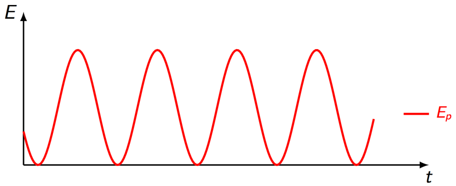
Exemple : **l'Oscillateur Harmonique**



$x(t) = x_0\,\cos(\omega\,t) \qquad x^2 = x_0^2\cos^2(\omega t)$ Énergie potentielle

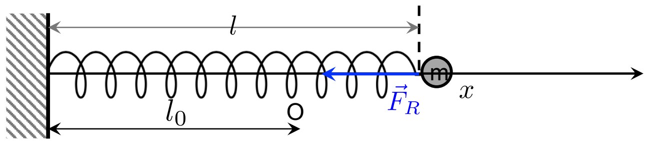
$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \qquad E_p = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega t)$$





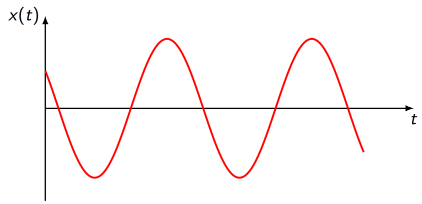
CHAPITRE IV : ÉNERGIE

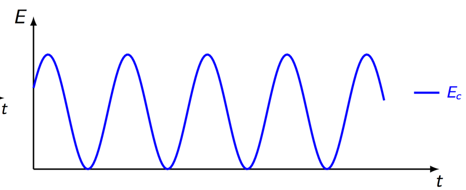
Exemple : **l'Oscillateur Harmonique**



$x(t) = x_0\,\cos(\omega\,t) \qquad \dot{x}^2 = x_0^2\omega^2\sin^2(\omega t)$ Énergie cinétique

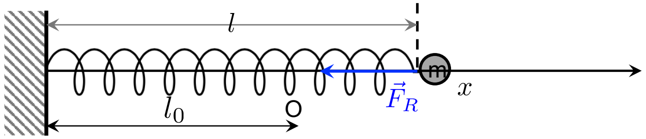
$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad E_c = \frac{1}{2}mx_0^2\frac{k}{m}\sin^2(\omega t)$$





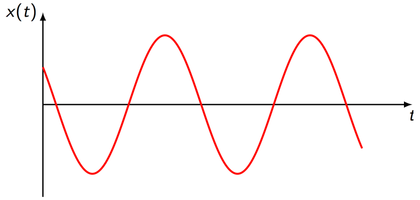
CHAPITRE IV : ÉNERGIE

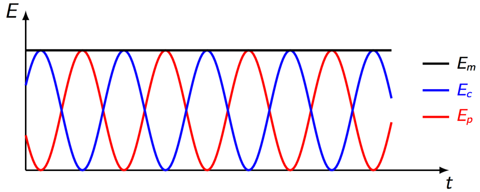
Exemple : **l'Oscillateur Harmonique**



$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ $\quad E_m = E_p + E_c$ $\quad \dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$

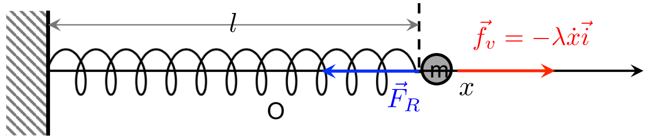
$E_c = \dfrac{1}{2} m \dot{x}^2$ $\quad E_p = \dfrac{1}{2} k x^2$ $\quad E_m = \dfrac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega t) + \dfrac{1}{2} m x_0^2 \dfrac{k}{m} \sin^2(\omega t)$





CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Exemple : **l'Oscillateur Harmonique amorti**



PFD: $m\ddot{x} + \lambda \dot{x} + kx = 0$

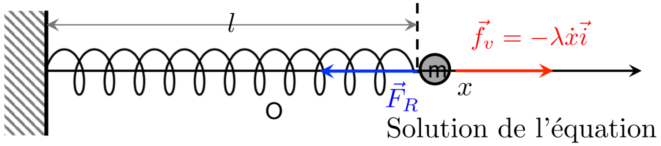
$\dot{x}\,(m\ddot{x} + kx) = -\lambda \dot{x} \times \dot{x}$ $\quad$ or $\quad \dot{x}\ddot{x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}(\dot{x})^2}{\mathrm{d}t}$ $\quad \dot{x}x = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2\right) = -\lambda \dot{x}^2 \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = -\lambda \dot{x}^2 < 0}$$

L'énergie de la bille n'est plus conservée

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Exemple : **l'Oscillateur Harmonique amorti**



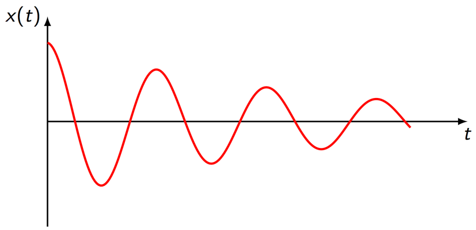
Solution de l'équation différentielle :

PFD: $m\ddot{x} + \lambda \dot{x} + kx = 0$ $\qquad x(t) = e^{-t/\tau}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

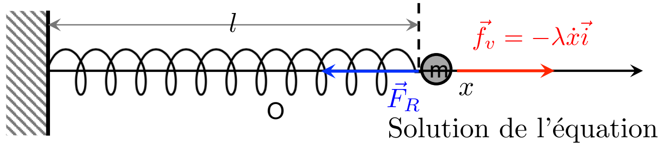
$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{\lambda}{m}$$



CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Exemple : **l'Oscillateur Harmonique amorti**



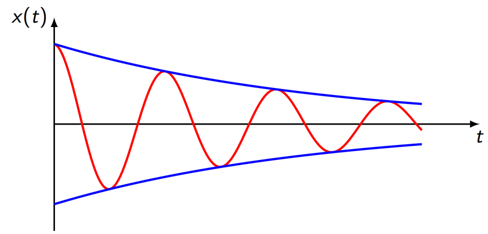
Solution de l'équation différentielle :

PFD: $m\ddot{x} + \lambda \dot{x} + kx = 0$ $\qquad x(t) = e^{-t/\tau}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right]$

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{\lambda}{m}$$



L'énergie de la bille n'est plus conservée

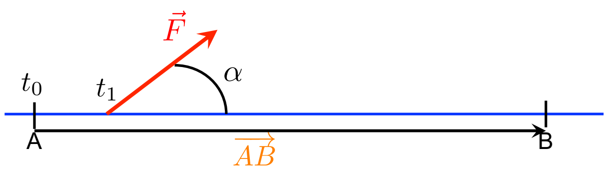
CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force constante sur le chemin [AB]

Définition : On appelle travail d'une force constante $\vec{F}$, lors d'un déplacement rectiligne de son point d'application, le produit scalaire de la force $\vec{F}$ par le déplacement $\overrightarrow{AB}$

On note $\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F})$: travail de la force $\vec{F}$ sur le chemin [AB]

$$\boxed{\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}}$$

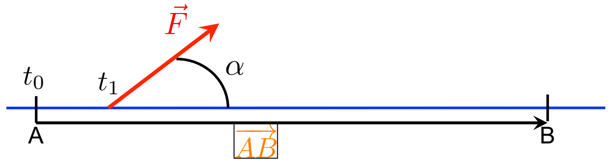


CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force constante sur le chemin [AB]

$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F})$: travail de la force $\vec{F}$ sur le chemin [AB]

$$\boxed{\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}}$$



$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos(\vec{F},\overrightarrow{AB})$$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos(\alpha)$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force constante

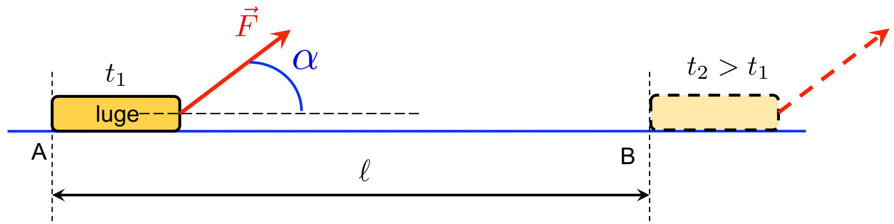
Exemple: Traction d'une luge

Question : quel est le travail fourni par le « tracteur »?

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force constante

Exemple: Traction d'une luge quel est le travail fourni par le « tracteur »?



$\mathcal{W} = ?$ $\quad \mathcal{W} = \mathcal{W}_{A\to B} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$ $\quad \mathcal{W} = \|\vec{F}\| \times \|\vec{\ell}\| \times \cos(\alpha)$

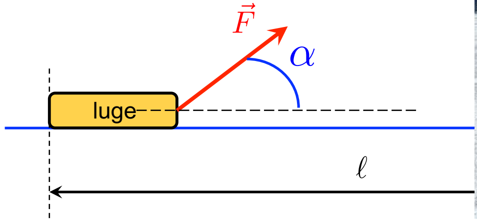
$\|\vec{F}\| = 30\,\mathrm{N}$ $\quad \ell = 500\,\mathrm{m}$ $\quad \alpha = ?$

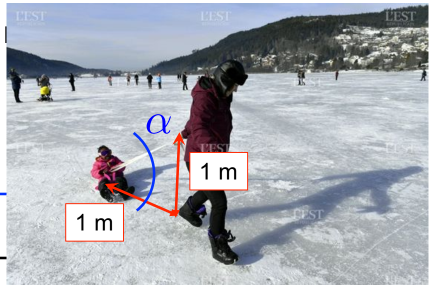
$\|\overrightarrow{AB}\| = \ell$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force constante

Exemple: Traction d'une luge quel est l





$\|\vec{F}\| = 30\,\mathrm{N} \qquad \ell = 500\,\mathrm{m}$

$\sin(\alpha) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = 45°$

$$\mathcal{W} = \|\vec{F}\| \times \|\vec{\ell}\| \times \cos(\alpha)$$

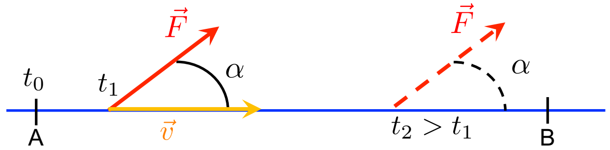
$$\mathcal{W} = 30 \times 500 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 10606 \text{ J}$$

~ 

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force constante sur le chemin [AB]

$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F})$: travail de la force $\vec{F}$ sur le chemin [AB]



$$\boxed{\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$$

Remarque :

- Le travail d'une force est un scalaire.
- Une force orthogonale à la trajectoire ne travaille pas

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force constante

Le travail est responsable de la variation d'énergie cinétique $[W] = [E_c]$

Analyse dimensionnelle

$$[E_c] = \left[\frac{1}{2}mv^2\right] = ML^2T^{-2}$$

$$[W] = [F] \times [?]$$

$$[W] = MLT^{-2} \times [?] \qquad = ML^2T^{-2} = [E_c]$$

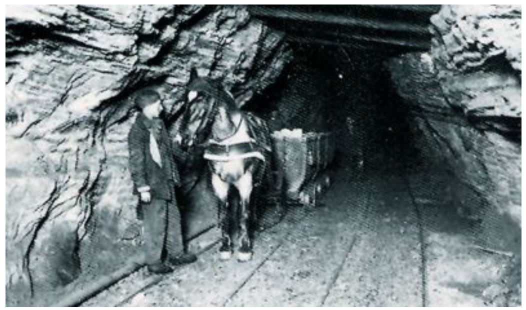
$$[?] = \frac{ML^2T^{-2}}{MLT^{-2}} = L$$

$$W \propto F \times L \qquad \left[\cos(\vec{F}, \overrightarrow{AB})\right] = 1$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force constante

Exemple: Traction d'un wagonnet

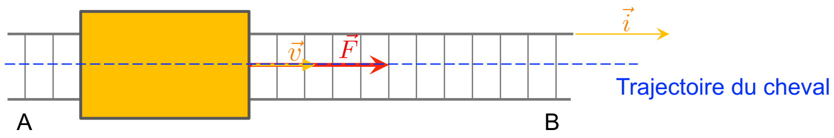


Question : quel est le travail fourni par le « cheval »?

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force constante

Exemple Un cheval tire un wagonnet se déplaçant sur des rails avec une force horizontale constante de norme F.



$\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|\vec{i} \qquad \Delta E_c \to \Delta v \qquad \vec{v} = v\vec{i}$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$$

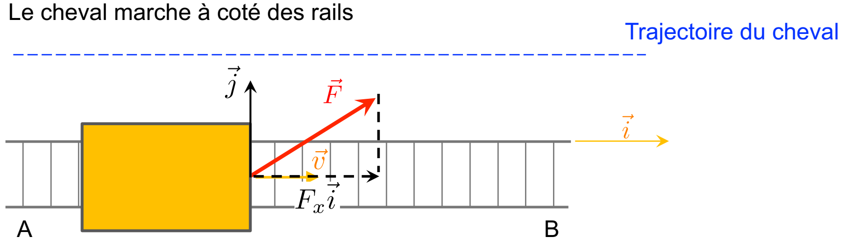
$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force constante

Exemple Un cheval tire un wagonnet se déplaçant sur des rails avec une force horizontale constante de norme F.

Le cheval marche à coté des rails



$\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|\vec{i} \qquad \Delta E_c \to \Delta v \qquad \vec{v} = v\vec{i}$

$F_x = \vec{F} \cdot \vec{i}$

Le PFD dit que seule la composante de la force sur $\vec{i}$ compte : $\vec{F} \cdot \vec{i}$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force constante sur le chemin [BA]

Remarque : $\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F})$ dépend du sens de parcours de [AB]

Calculons $\mathcal{W}_{B\to A}(\vec{F})$: travail de la force $\vec{F}$ sur le chemin [BA]

$$\mathcal{W}_{B\to A}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$\mathcal{W}_{B\to A}(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{BA}\| \times \cos(\vec{F}, \overrightarrow{BA})$$

$$\mathcal{W}_{B\to A}(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos(\beta) \qquad \cos(\beta) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\mathcal{W}_{B\to A}(\vec{F}) = -\|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos(\alpha)$$

On voit bien que la force s'oppose au déplacement

Le travail est négatif

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force constante

Remarque : Il faut faire attention au sens de parcours du chemin [AB]

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\mathcal{W}_{B\to A}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{BA}$$

Vraie que pour une force constante

$$\mathcal{W}_{B\to A}(\vec{F}) = -\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} \qquad \mathcal{W}_{B\to A}(\vec{F}) = -\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F})$$

Attention : Les forces de frottement $\vec{f}_f$ ne sont pas constantes.

Elles changent de signe quand le mouvement change de sens

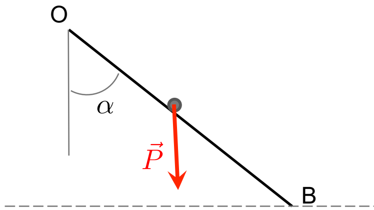
$$\mathcal{W}_{B\to A}(\vec{f}_f) = \vec{f}_{f,\vec{BA}} \cdot \overrightarrow{BA} \quad = -\vec{f}_{f,\vec{AB}} \cdot \left(-\overrightarrow{AB}\right) \quad = \vec{f}_{f,\vec{AB}} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\mathcal{W}_{B\to A}(\vec{f}_f) = \mathcal{W}_{A\to B}(\vec{f}_f) < 0$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force constante

Exemple : Travail du poids



CHAPITRE IV : ÉNERGIE

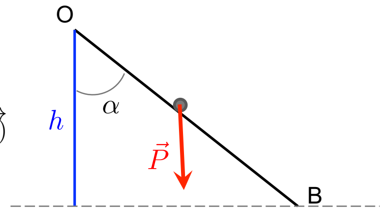
Travail d'une force constante

Exemple : Travail du poids

$$\mathcal{W}_{O\to B}(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$\mathcal{W}_{O\to B}(\vec{P}) = \|\vec{P}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos(\vec{P},\overrightarrow{OB})$$

$$\mathcal{W}_{O\to B}(\vec{P}) = \|\vec{P}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos(\alpha)$$



Surfeur m = 100 kg distance OB = 100 m α = 30°

$$\mathcal{W}_{O\to B}(\vec{P}) = \underbrace{\|m\vec{g}\|}_{1000} \times \underbrace{\|\overrightarrow{OB}\|}_{100} \times \underbrace{\cos(\alpha)}_{0{,}86}$$

$$\mathcal{W}_{O\to B}(\vec{P}) = 8,6\times 10^4\ J$$

Remarque : $\|\overrightarrow{OB}\|\cos(\alpha) = h$ $\qquad \mathcal{W}_{O\to B}(\vec{P}) = \|m\vec{g}\| \times h$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force constante : Propriétés

- Le travail à la même dimension que l'énergie MLT^{-2} son unité est le Joule
- Le travail d'une force qui s'applique sur un système est l'énergie apportée à ce système par la force.
- Lorsque le travail est positif, on dit qu'il est moteur. Lorsque le travail est négatif, on dit qu'il est résistant.

- **Orthogonalité :**
  Lorsqu'en tout point du chemin la direction de la force est orthogonale (perpendiculaire) au chemin suivi par le système, le travail de la force sur ce chemin est nul.

- **Relation de Chasle :**
  Soit un point C du segment [AB] alors :

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \mathcal{W}_{A\to C}(\vec{F}) + \mathcal{W}_{C\to B}(\vec{F})$$

- **Linéarité :**
  Soit deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ s'appliquant au même point d'un système lorsqu'il parcourt le chemin (AB) alors :

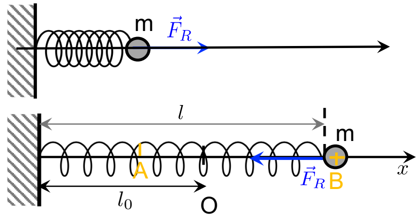
$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_1+\vec{F}_2) = \mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_1) + \mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_2)$$

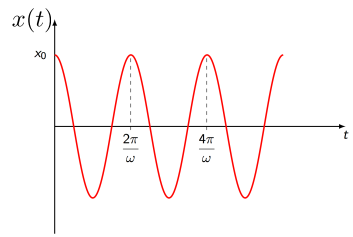
CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne

Exemple: masse attachée à un ressort

La masse est astreinte à se déplacer sur l'axe (Ox) de A de coordonnées $-x_0$ à B de coordonnée x_0



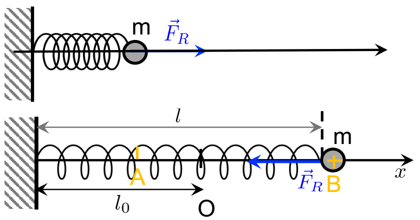


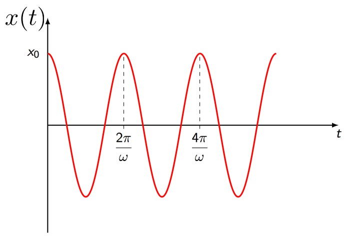
$$\vec{F}_R = -kx\vec{i}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

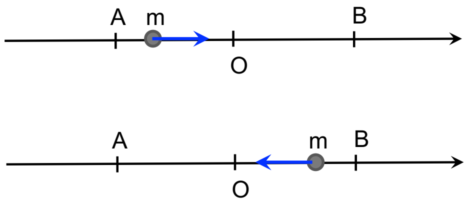
Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne

Exemple: masse attachée à un ressort





$\vec F_R = -kx\vec i$



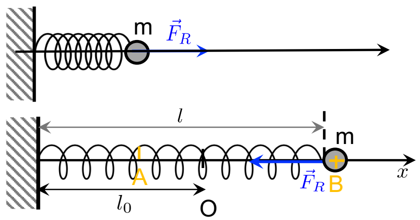
$\cancel{\mathcal{W}_{A\to B}(\vec F) = \vec F \cdot \overrightarrow{AB}}$

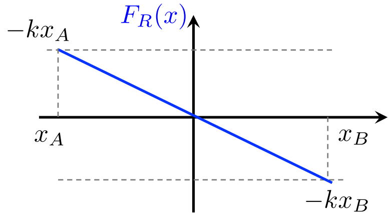
car $\vec F$ variable

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

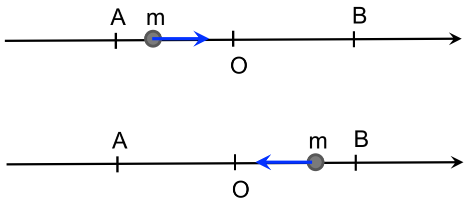
Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne

Exemple: masse attachée à un ressort





$\vec F_R = -kx\vec i$



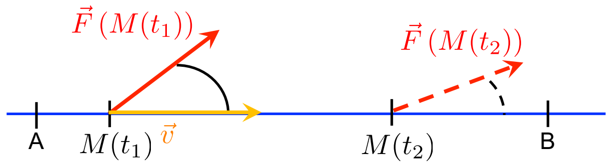
$\cancel{\mathcal{W}_{A\to B}(\vec F) = \vec F \cdot \overrightarrow{AB}}$

car $\vec F$ variable

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

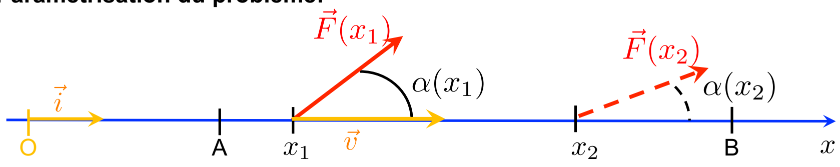
Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne

Cas général :



$\cancel{\mathcal{W}_{A\to B}(\vec F) = \vec F \cdot \overrightarrow{AB}}$

Paramétrisation du problème:

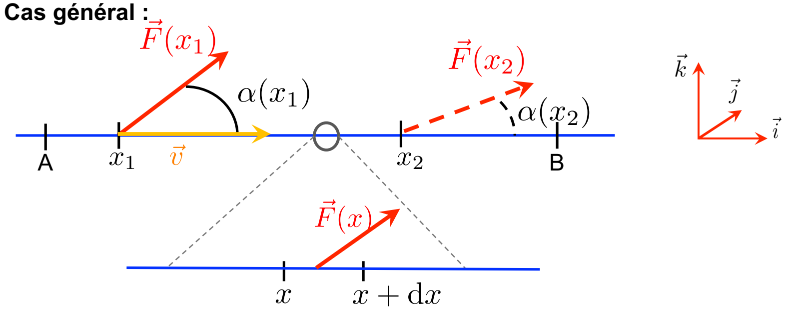


x est l'abscisse du point M sur l'axe $(O\vec i)$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne suivant x

Cas général :



On va considérer un élément du segment [AB] entre x et $x + \mathrm{d}x$ dans la limite $\mathrm{d}x \to 0$, $\vec F(x)$ est constante entre x et $x + \mathrm{d}x$.

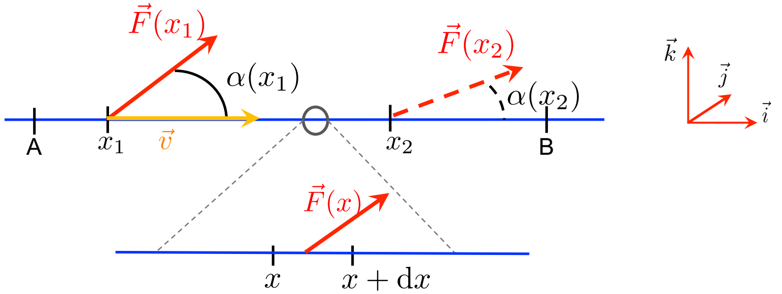
$$\boxed{\delta\mathcal{W}_{x\to x+\mathrm{d}x}\left(\vec F(x)\right) = \vec F(x)\cdot \mathrm{d}x\,\vec i}$$

Relation de Chasle

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec F) = \mathcal{W}_{A\to C}(\vec F) + \mathcal{W}_{C\to B}(\vec F)$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne suivant x



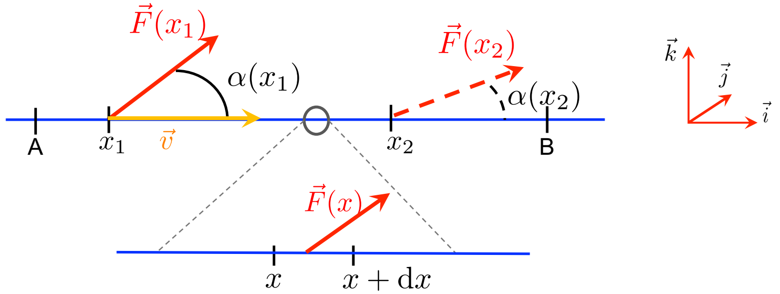
On va considérer un élément du segment [AB] entre x et $x + \mathrm{d}x$
dans la limite $\mathrm{d}x \to 0$, $\vec{F}(x)$ est constante entre x et $x + \mathrm{d}x$.

$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) =$ somme des $\delta\mathcal{W}_{x\to x+\mathrm{d}x}\left(\vec{F}(x)\right)$

$$\boxed{\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta\mathcal{W}_{x\to x+\mathrm{d}x}\left(\vec{F}(x)\right)}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne suivant x



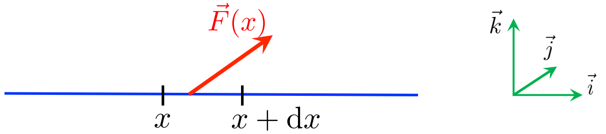
On va considérer un élément du segment [AB] entre x et $x + \mathrm{d}x$
dans la limite $\mathrm{d}x \to 0$, $\vec{F}(x)$ est constante entre x et $x + \mathrm{d}x$.

$$\boxed{\delta\mathcal{W}_{x\to x+\mathrm{d}x}\left[\vec{F}(x)\right] = \vec{F}(x)\cdot \mathrm{d}x\,\vec{i}} \qquad \delta\mathcal{W}[\vec{F}(x)] = \vec{F}(x)\cdot \mathrm{d}x\,\vec{i}$$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta\mathcal{W}[\vec{F}(x)]$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne suivant x



Dans la limite $\mathrm{d}x \to 0$, $\vec{F}(x)$ est constante entre x et $x + \mathrm{d}x$.

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta\mathcal{W}[\vec{F}(x)] \quad = \int_A^B \vec{F}(x)\cdot \mathrm{d}x\,\vec{i}$$

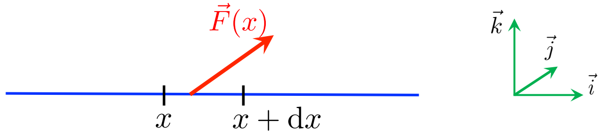
$$\vec{F}(x) = F_x(x)\vec{i} + F_y(x)\vec{j} + F_z(x)\vec{k}$$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B F_x(x)\vec{i}\cdot\vec{i} + F_y(x)\vec{j}\cdot\vec{i} + F_z(x)\vec{k}\cdot\vec{i}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B F_x(x)\vec{i}\cdot\vec{i}\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} F_x(x)\mathrm{d}x}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne suivant x



$$\delta\mathcal{W}_{x\to x+\mathrm{d}x}\left[\vec{F}(x)\right] = \vec{F}(x)\cdot \mathrm{d}x\,\vec{i}$$

Pourquoi $\delta\mathcal{W}$ et non $\mathrm{d}\mathcal{W}$?

Le travail n'est pas une fonction mathématique qui dépendrait uniquement des variables de position du système.

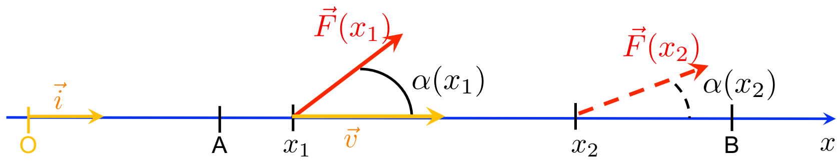
Exemple : la force de frottement solide dépend du sens du mouvement et pas de la position du système

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force F s'appliquant sur un système représenté par le point M lorsqu'il parcours le chemin [AB]

Méthode de calcul des travaux :

1. Paramétrisation du chemin AB: on choisit une axe (Ox) contenant le segment [AB]. La position du point M (représentant le système) est repérée par son abscisse x. On note xA et xB les abscisses des point A et B



x est l'abscisse du point M sur l'axe $(O\vec{i})$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force F s'appliquant sur un système représenté par le point M lorsqu'il parcours le chemin [AB]

Méthode de calcul des travaux :

1. Paramétrisation du chemin AB: on choisit une axe (Ox) contenant le segment [AB]. La position du point M (représentant le système) est repérée par son abscisse x. On note xA et xB les abscisses des point A et B

2. En un point M quelconque du chemin AB on calcul le produit scalaire $F_x(x) = \vec{F}(M) \cdot \vec{i}$ où $F_x(x)$ est la composante de la force $\vec{F}(M)$ au point M

3. Le travail est alors donné par l'intégrale

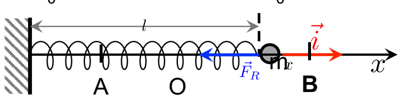
$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} F_x(x)\mathrm{d}x$$

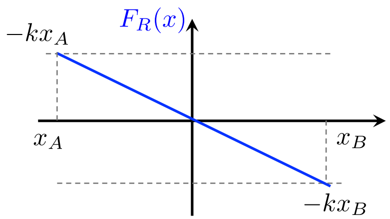
CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne suivant x

Exemple: masse attachée à un ressort

La masse est astreinte à se déplacer sur l'axe (Ox) de A de coordonnées $-x_0$ à B de coordonnée x_0





$\vec{F}_R = -kx\vec{i}$

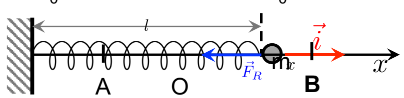
$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_R) = \int_{x_A}^{x_B} F_x(x)\mathrm{d}x$$

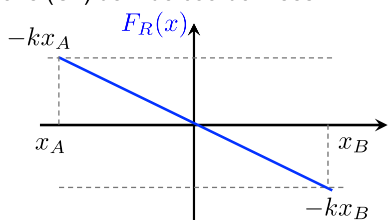
CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne suivant x

Exemple: masse attachée à un ressort

La masse est astreinte à se déplacer sur l'axe (Ox) de A de coordonnées $-x_0$ à B de coordonnée x_0





$\vec{F}_R = -kx\vec{i}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_R) &= \int_{x_A}^{x_B} \vec{F}_R(x)\cdot \mathrm{d}x\vec{i} \\
&= \int_{x_A}^{x_B} F(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_A}^{x_B} -kx\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\tfrac{1}{2}kx^2\right]_{x_A}^{x_B}
\end{aligned}$$

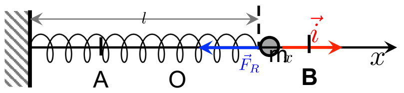
$$\boxed{\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_R) = -\tfrac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne suivant x

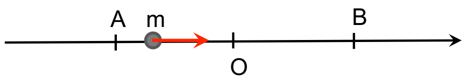
Exemple: masse attachée à un ressort

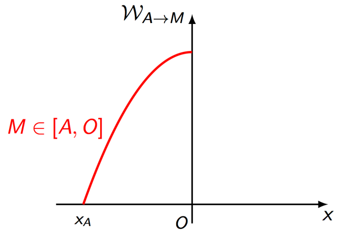
La masse est astreinte à se déplacer sur l'axe (Ox) de A de coordonnées $-x_0$ à B de coordonnée x_0



$\vec{F}_R = -kx\vec{i}$ $\qquad$ $\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_R) = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)$

$\mathcal{W}_{A\to M}(\vec{F}_R) = -\frac{1}{2}k\left(x^2 - x_A^2\right)$





La force est dans le même sens que le déplacement, le travail est moteur

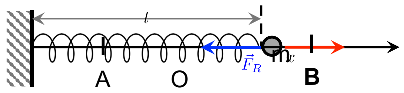
$\mathcal{W}_{A\to M}(\vec{F}_R) > 0$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne suivant x

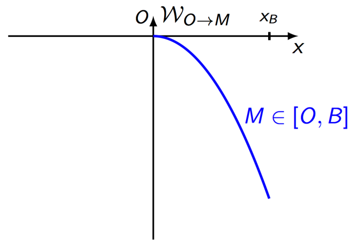
Exemple: masse attachée à un ressort

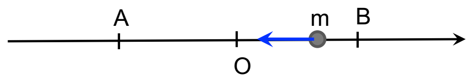
La masse est astreinte à se déplacer sur l'axe (Ox) de A de coordonnées $-x_0$ à B de coordonnée x_0



$\vec{F}_R = -kx\vec{i}$ $\qquad$ $\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_R) = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)$

$\mathcal{W}_{O\to M}(\vec{F}_R) = -\frac{1}{2}k\left(x^2 - 0\right)$





La force est dans le sens opposé au déplacement, le travail est résistant

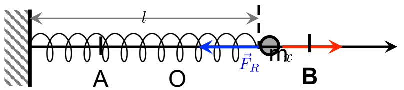
$\mathcal{W}_{O\to M}(\vec{F}_R) < 0$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne suivant x

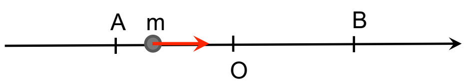
Exemple: masse attachée à un ressort

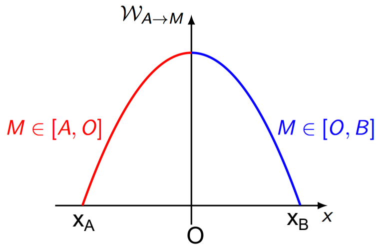
La masse est astreinte à se déplacer sur l'axe (Ox) de A de coordonnées $-x_0$ à B de coordonnée x_0

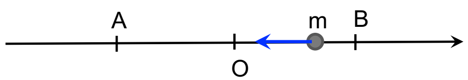


$\vec{F}_R = -kx\vec{i}$ $\qquad$ $\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_R) = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)$

$\mathcal{W}_{A\to M}(\vec{F}_R) = -\frac{1}{2}k\left(x^2 - x_A^2\right)$







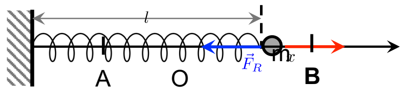
Remarque 1 : Le travail est nul sur une demi période de l'oscillateur.

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne suivant x

Exemple: masse attachée à un ressort

La masse est astreinte à se déplacer sur l'axe (Ox) de A de coordonnées $-x_0$ à B de coordonnée x_0



$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_R) = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)$$

Remarque 1 : Le travail de la force de rappel du ressort est nul sur une demi période de l'oscillateur.

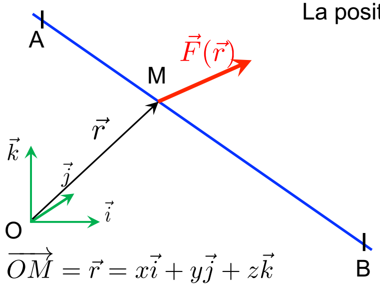
Remarque 2 : Le travail de la force de rappel du ressort est nul sur un nombre entier de demi période.

Remarque 3: Le travail de la force de rappel d'un ressort d'un point A à un point B ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement du point de départ et du point d'arrivée.

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne cas général

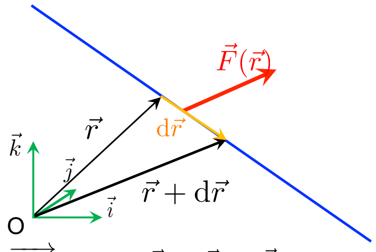
La position du système coïncide avec le point M



$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne



$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$

dans la limite où $\mathrm{d}\vec{r} \to \vec{0}$,

$\vec{F}(\vec{r})$ est constante entre $\vec{r}$ et $\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}$

$$\boxed{\delta\mathcal{W}_{\vec{r}\to\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

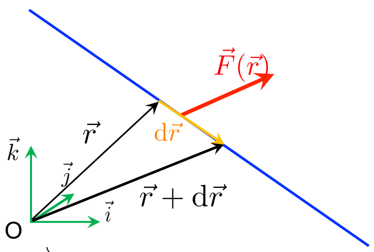
$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta\mathcal{W}[\vec{F}(\vec{r})]$$

$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0 \quad \vec{i}\cdot\vec{k} = 0 \quad \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B F_x(\vec{r})\,\vec{i}\cdot\vec{i}\,\mathrm{d}x + \int_A^B F_y(\vec{r})\,\vec{j}\cdot\vec{j}\,\mathrm{d}y + \int_A^B F_z(\vec{r})\,\vec{k}\cdot\vec{k}\,\mathrm{d}z$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne



$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$

dans la limite où $\mathrm{d}\vec{r} \to \vec{0}$,

$\vec{F}(\vec{r})$ est constante entre $\vec{r}$ et $\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}$

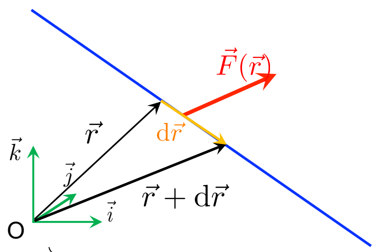
$$\boxed{\delta\mathcal{W}_{\vec{r}\to\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta\mathcal{W}[\vec{F}(\vec{r})]$$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} F_x(\vec{r})\,\underbrace{\vec{i}\cdot\vec{i}}_{\vec{i}\cdot\vec{i}=1}\,\mathrm{d}x + \int_{y_A}^{y_B} F_y(\vec{r})\,\underbrace{\vec{j}\cdot\vec{j}}_{\vec{j}\cdot\vec{j}=1}\,\mathrm{d}y + \int_{z_A}^{z_B} F_z(\vec{r})\,\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{k}}_{\vec{k}\cdot\vec{k}=1}\,\mathrm{d}z$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne



$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$

dans la limite où $\mathrm{d}\vec{r} \to \vec{0}$,

$\vec{F}(\vec{r})$ est constante entre $\vec{r}$ et $\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}$

$$\boxed{\delta\mathcal{W}_{\vec{r}\to\vec{r}+\mathrm{d}\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta\mathcal{W}[\vec{F}(\vec{r})] \qquad \boxed{\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} F_x(\vec{r})\,\mathrm{d}x + \int_{y_A}^{y_B} F_y(\vec{r})\,\mathrm{d}y + \int_{z_A}^{z_B} F_z(\vec{r})\,\mathrm{d}z$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

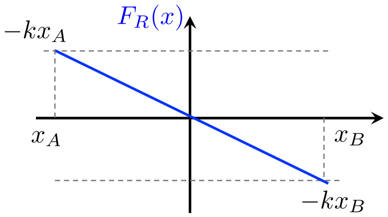
Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} F_x(\vec{r})\,\mathrm{d}x + \int_{y_A}^{y_B} F_y(\vec{r})\,\mathrm{d}y + \int_{z_A}^{z_B} F_z(\vec{r})\,\mathrm{d}z$$

Remarque 1 : $F_x(\vec{r}),\ F_y(\vec{r}),\ F_z(\vec{r})$ sont des fonctions de x, y, z

$$F_x(\vec{r}) = F_x(x,y,z),\ F_y(\vec{r}) = F_y(x,y,z) \text{ et } F_z(\vec{r}) = F_z(x,y,z)$$

Force de rappel du ressort



CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{x_A}^{x_B} F_x(\vec{r})\,\mathrm{d}x + \int_{y_A}^{y_B} F_y(\vec{r})\,\mathrm{d}y + \int_{z_A}^{z_B} F_z(\vec{r})\,\mathrm{d}z$$

Remarque 2 : les forces peuvent dépendre aussi de la vitesse du système (la force de frottement visqueux)

$$F_x(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = F_x(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

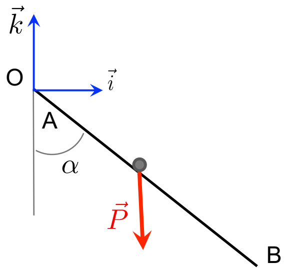
$$F_y(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = F_y(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

$$F_z(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = F_z(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Exemple de paramétrisation

Travail du poids



On projette sur la base $\{\vec{i},\vec{k}\}$

$\vec{P} = -mg\vec{k}$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + z\vec{k}$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{P}) = \int_{x_A}^{x_B} 0\,\mathrm{d}x + \int_{z_A}^{z_B} -mg\,\mathrm{d}z$$

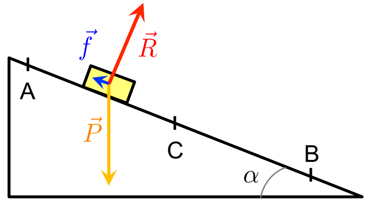
$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{P}) = -mg\,[z]_{z_A}^{z_B}$$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)$$

Remarque : le travail du poids d'un point A à un point B ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Système soumis à plusieurs forces



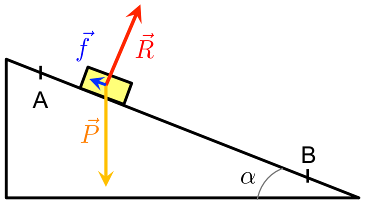
Relation de Chasle

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r} \quad = \int_A^C \vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \int_C^B \vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = \mathcal{W}_{A\to C}(\vec{F}) + \mathcal{W}_{C\to B}(\vec{F})$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Système soumis à plusieurs forces



$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3)=\int_A^B\left(\vec{F}_1(\vec{r})+\vec{F}_2(\vec{r})+\vec{F}_3(\vec{r})\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

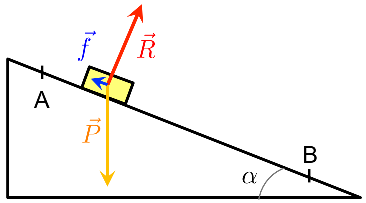
le produit scalaire est linéaire : $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

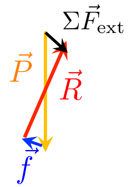
$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3)=\int_A^B \vec{F}_1(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_A^B \vec{F}_2(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r}+\int_A^B \vec{F}_3(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3)=\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_1)+\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_2)+\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_3)$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Système soumis à plusieurs forces





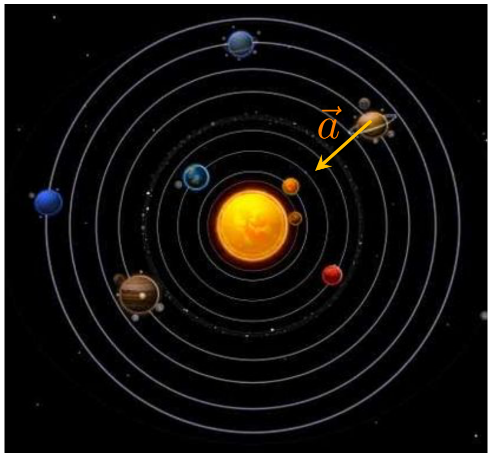
$\Sigma(\vec{F}_{\text{ext}})$: somme des forces extérieures

$\Sigma(\vec{F}_{\text{ext}})$: résultante des forces extérieures

$$\Sigma\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_{\text{ext}})=\mathcal{W}_{A\to B}(\Sigma\vec{F}_{\text{ext}})$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail de la force de gravitation



Orbite circulaire :

$\vec{a}\perp\vec{v}$ donc à la trajectoire

$$\vec{a}=\sum_{\vec{F}_{\text{ext}}}\frac{1}{m}\vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\Rightarrow \sum_{\vec{F}_{\text{ext}}}\vec{F}_{\text{ext}}\perp \text{ à la trajectoire}$$

$$\Rightarrow \mathcal{W}_{\text{trajectoire}}\Big(\sum_{\vec{F}_{\text{ext}}}\vec{F}_{\text{ext}}\Big)=0$$

$\vec{a}\perp\vec{v}$ donc à la trajectoire

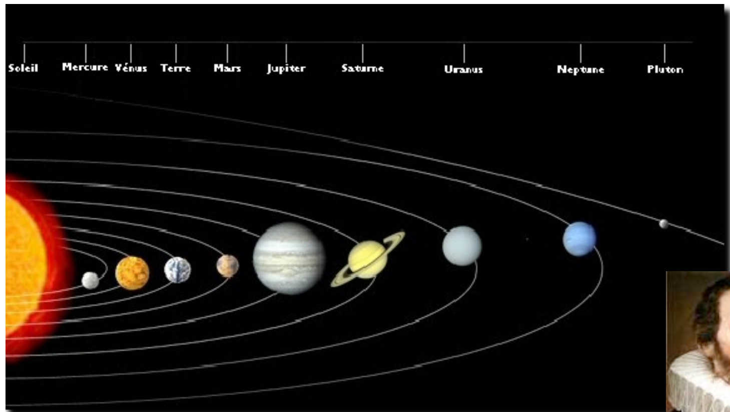
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}=0$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2=C^{te}$$

$$\Leftrightarrow E_c=C^{te}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail de la force de gravitation



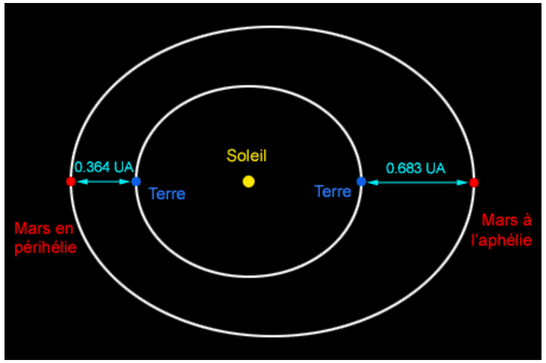
Kepler
1571-1630

Trajectoire elliptique : $\vec{a}\not\perp\vec{v}$ donc à la trajectoire

E_c varie au cours de la trajectoire

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail de la force de gravitation

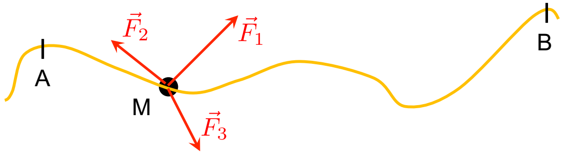


Trajectoire elliptique : $\vec{a} \not\perp \vec{v}$ donc à la trajectoire

E_c varie au cours de la trajectoire (Kepler)

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Théorème de l'énergie cinétique



Énoncé du théorème :

La variation d'énergie cinétique E_c entre deux points A et B de la trajectoire d'un mobile M est égale à la somme des travaux des forces qui s'appliquent sur le mobile calculée sur la trajectoire du mobile entre les points A et B

$$\boxed{E_c(B) - E_c(A) = \sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_{\text{ext}})}$$

$E_c(M) = \dfrac{1}{2} m \|\vec{v}(M)\|^2$ énergie cinétique du mobile à la positon M

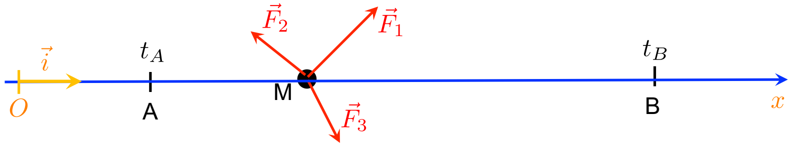
$\sum_{\vec{F}_{\text{ext}}}$: somme sur toutes les forces extérieures s'appliquant sur le mobile

$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_{\text{ext}})$: le travail de la force $\vec{F}_{\text{ext}}$ sur la trajectoire empruntée par le mobile

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Théorème de l'énergie cinétique - Démonstration

On se limite au cas de la trajectoire rectiligne



$$\text{PFD : } \sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \qquad \sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \vec{F}_{\text{ext}} = m\ddot{x}\vec{i}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i}, \qquad \dot{x}\vec{i} \cdot \left(\sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \vec{F}_{\text{ext}} = m\ddot{x}\vec{i} \right) \qquad \Leftrightarrow \sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \dot{x}\vec{i} = m\ddot{x}\vec{i} \cdot \dot{x}\vec{i}$$

$$\int_{t_A}^{t_B} \sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \dot{x}\,\vec{i}\,\mathrm{d}t = \int_{t_A}^{t_B} \sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{i}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

Changement de variable

$$= \sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \underbrace{\int_{x_A}^{x_B} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{i}\,\mathrm{d}x}_{\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_{\text{ext}})}$$

$$m\ddot{x}\dot{x} = m\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\dot{x}^2}{\mathrm{d}t}$$

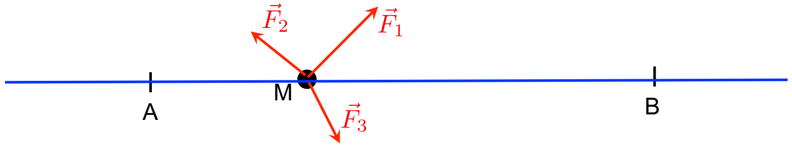
$$\int_{t_A}^{t_B} m\ddot{x}\dot{x}\,\mathrm{d}t = \int_{t_A}^{t_B} \frac{1}{2} m \frac{\mathrm{d}\dot{x}^2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{t_A}^{t_B} m\ddot{x}\dot{x}\,\mathrm{d}t = E_c(t_B) - E_c(t_A)$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Théorème de l'énergie cinétique - Démonstration

On se limite au cas de la trajectoire rectiligne



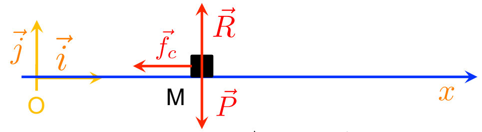
$$\int_{t_A}^{t_B} \sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \dot{x}\vec{i} = \int_{t_A}^{t_B} m\ddot{x}\vec{i} \cdot \dot{x}\vec{i}$$

$$\sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \underbrace{\int_{x_A}^{x_B} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{i}\,\mathrm{d}x}_{\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_{\text{ext}})} = \underbrace{\int_{t_A}^{t_B} m\ddot{x}\dot{x}\,\mathrm{d}t}_{E_c(t_B) - E_c(t_A)}$$

$$\boxed{\sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_{\text{ext}}) = E_c(B) - E_c(A)}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Théorème de l'énergie cinétique – Exemple : distance d'arrêt



$\vec{P} = -mg\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{f_c} = -f_c\vec{i}$

$\vec{R} = R\vec{j}\ ,\ R = ?$ $\qquad$ $f_c = \|\vec{f_c}\| = k_c\|\vec{R}\|$

$\text{vitesse initiale : } \vec{v}(O) = v_0\vec{i}$

Après quelle distance est-il arrêté ? A point d'arrêt $\text{vitesse finale : } \vec{v}(A) = \vec{0}$

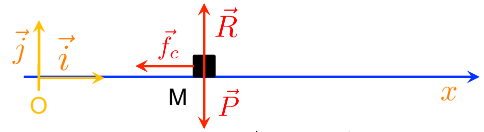
Théorème de l'énergie cinétique $E_c(A) - E_c(O) = \sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \mathcal{W}_{O\to A}(\vec{F}_{\text{ext}})$

$\vec{R}$ et $\vec{P}$ ne travaillent pas car orthogonal à la trajectoire du mobile M

$$\sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \mathcal{W}_{O\to A}(\vec{F}_{\text{ext}}) = \mathcal{W}_{O\to A}(\vec{f_c})$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Théorème de l'énergie cinétique – Exemple : distance d'arrêt



$\vec{P} = -mg\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{f_c} = -f_c\vec{i}$

$\vec{R} = R\vec{j}\ ,\ R = ?$ $\qquad$ $f_c = \|\vec{f_c}\| = k_c\|\vec{R}\|$

$\vec{f_c} = ?$

PFD sur $\vec{j}$

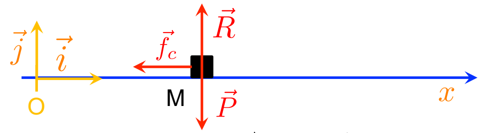
$m\ddot{y} = 0 = -mg + R \quad \Leftrightarrow mg = R \quad \Leftrightarrow \vec{f_c} = -k_c\, mg\, \vec{i}$

$$\mathcal{W}_{O\to A}(\vec{f_c}) = \int_0^{x_A} \vec{f_c}\cdot\vec{i}\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \mathcal{W}_{O\to A}(\vec{f_c}) = \int_0^{x_A} -k_c\, mg\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \mathcal{W}_{O\to A}(\vec{f_c}) = [-k_c\, mg\, x]_0^{x_A} \qquad \Rightarrow \boxed{\mathcal{W}_{O\to A}(\vec{f_c}) = -k_c\, mg\, x_A}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Théorème de l'énergie cinétique – Exemple : distance d'arrêt



$\vec{P} = -mg\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{f_c} = -f_c\vec{i}$

$\vec{R} = R\vec{j}\ ,\ R = ?$ $\qquad$ $f_c = \|\vec{f_c}\| = k_c\|\vec{R}\|$

$\mathcal{W}_{O\to A}(\vec{f_c}) = -k_c\, mg\, x_A$ $\qquad$ $E_c(A) - E_c(O) = \mathcal{W}_{O\to A}(\vec{f_c})$

$\text{vitesse initiale : } \vec{v}(O) = v_0\vec{i}$

$\Rightarrow E_c(O) = \frac{1}{2}mv_0^2$

$\text{vitesse finale : } \vec{v}(A) = \vec{0}$

$\Rightarrow E_c(A) = 0$

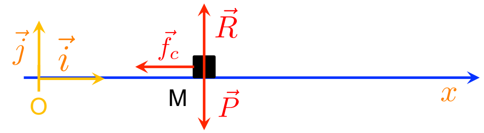
$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -k_c\, mg\, x_A$$

$$\boxed{x_A = \frac{v_0^2}{2\, k_c\, g}}$$

$$\ell = \|\vec{OA}\| = x_A \qquad \boxed{\ell = \frac{v_0^2}{2\, k_c\, g}}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Théorème de l'énergie cinétique – Exemple : distance d'arrêt



Application numérique :

$v_0 \simeq 10\,\mathrm{m/s} \qquad k_c \simeq 0.3 \qquad g \simeq 10\,\mathrm{m/s^2}$

$\ell \text{ : longueur d'arrêt} \quad \boxed{\ell = \frac{v_0^2}{2\, k_c\, g}}$ $\qquad$ $\ell \simeq \frac{100}{2\times 0.3\times 10} = 16,7\,\mathrm{m}$

$\ell_{neige} \simeq 100\,\mathrm{m}$ Frottement fluide

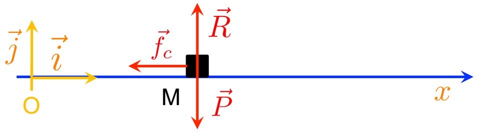
Analyse dimensionnelle :

$[\ell] = L \qquad [v_0^2] = L^2T^{-2} \qquad [k_c] = 1 \qquad [g] = LT^{-2}$

$$\left[\frac{v_0^2}{2k_c g}\right] = \frac{L^2T^{-2}}{LT^{-2}} = L$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Théorème de l'énergie cinétique – Exemple : distance d'arrêt



Application numérique :

$v_0 \simeq 10\,\mathrm{m/s}$ $\quad k_c \simeq 0.3 \quad g \simeq 10\,\mathrm{m/s^2}$

$$\ell \simeq \frac{100}{2 \times 0.3 \times 10} = 16,7\,\mathrm{m}$$

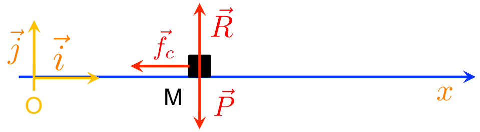
ℓ : longueur d'arrêt $\boxed{\ell = \dfrac{v_0^2}{2\,k_c\,g}}$

Où est l'arnaque ?

- C'est une pub : truquage ?
- C'est en pente : plus probable

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Théorème de l'énergie cinétique – Exemple : distance d'arrêt



Application numérique :

$v_0 \simeq 10\,\mathrm{m/s}$ $\quad k_c \simeq 0.3 \quad g \simeq 10\,\mathrm{m/s^2}$

ℓ : longueur d'arrêt $\boxed{\ell = \dfrac{v_0^2}{2\,k_c\,g}}$

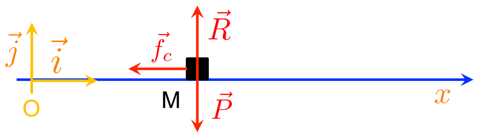
$$\ell \simeq \frac{100}{2 \times 0.3 \times 10} = 16,7\,\mathrm{m}$$

Remarque :

1. On a obtenu la distance parcourue avant l'arrêt directement,
   - sans passer par l'équation horaire du mouvement
   - sans résoudre d'équation différentielle
2. En contre partie, nous n'avons pas d'information sur le temps mis pour parcourir la distance ℓ . On a une réponse globale.

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Théorème de l'énergie cinétique – Exemple : distance d'arrêt



Conséquence du théorème de l'E_c :

- Mouvement à 1 dimension (1D) avec force constante

$$v_{\text{finale}}^2 - v_{\text{initiale}}^2 = 2a\ell \qquad \text{avec } \ell : \text{ distance parcourue}$$

$$\boxed{\Delta v^2 = 2a\Delta x}$$

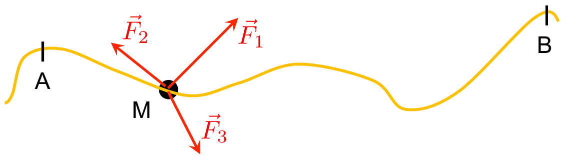
Démonstration :

$$\frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = \mathcal{W}_{A\to B}(\sum \vec{F}_{\text{ext}}) \qquad \Leftrightarrow \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) = (m\vec{a}) \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$(v_B^2 - v_A^2) = 2a\,AB$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Théorème de l'énergie cinétique



Énoncé du théorème :

La variation d'énergie cinétique E_c entre deux points A et B de la trajectoire d'un mobile M est égale à la somme des travaux des forces qui s'appliquent sur le mobile calculée sur la trajectoire du mobile entre les points A et B

$$\boxed{E_c(B) - E_c(A) = \sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_{\text{ext}})}$$

$E_c(M) = \dfrac{1}{2}m\|\vec{v}(M)\|^2$ énergie cinétique du mobile à la positon M

$\sum_{\vec{F}_{\text{ext}}}$: somme sur toutes les forces extérieures s'appliquant sur le mobile

$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_{\text{ext}})$: le travail de la force $\vec{F}_{\text{ext}}$ sur la trajectoire empruntée par le mobile

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Version locale du théorème de l'énergie cinétique - Puissance

Définition : On appelle puissance développée par une force $\vec{F}$ le produit scalaire de cette force et de la vitesse $\vec{v}$ de l'objet sur lequel elle s'applique.

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[\mathcal{P}] = \left[\vec{F}\right] \times [\vec{v}] \qquad [\mathcal{P}] = MLT^{-2}LT^{-1} \qquad [\mathcal{P}] = ML^2T^{-3}$$

$\mathcal{P}$ s'exprime en watt (W)

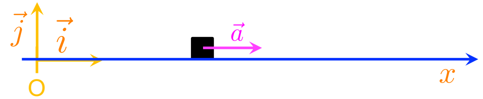
Énoncé du théorème : La dérivée de l'énergie cinétique par rapport au temps est égale à la somme des puissances développées par les forces qui s'appliquent sur le système.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Version locale du théorème de l'énergie cinétique - Puissance

Exemple : Voiture d'une tonne accélérant de 0 à 100km/h en 10 secondes



Hypothèse : l'accélération est constante

$$\mathcal{P} = \left(\sum \vec{F}_{\text{ext}}\right) \cdot \vec{v} \qquad \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \mathcal{P} = m\vec{a} \cdot \vec{v} \qquad \begin{cases} \vec{a} = ? \\ \vec{v} = ? \end{cases}$$

$$\vec{a} = a\,\vec{i} \qquad \vec{a} = \overrightarrow{C^{te}} \Rightarrow \vec{v} = a\,t\,\vec{i} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{P} = ma^2t \\ a = \frac{v_{\max}}{t_{\max}} \end{cases} \qquad \Rightarrow \mathcal{P} = m\left(\frac{v_{\max}}{t_{\max}}\right)^2 t$$

Application numérique :

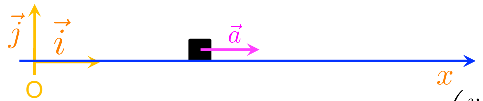
$v_{\max} \approx 28\,\mathrm{m/s}$

$\mathcal{P} = 7840 \times t$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Version locale du théorème de l'énergie cinétique - Puissance

Exemple : Voiture d'une tonne accélérant de 0 à 100km/h en 10 secondes



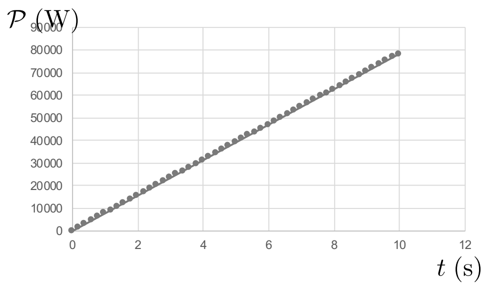
Hypothèse : l'accélération est constante $\Rightarrow \mathcal{P} = m\left(\frac{v_{\max}}{t_{\max}}\right)^2 t$

Application numérique :

$v_{\max} \approx 28\,\mathrm{m/s}$

$\mathcal{P} = 7840 \times t$

$\mathcal{P}_{\max} \approx 80\,\mathrm{kW}$



CHAPITRE IV : ÉNERGIE

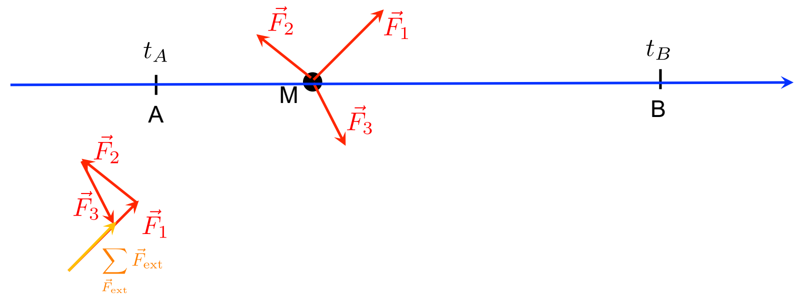
Version locale du théorème de l'énergie cinétique - Puissance

Énoncé du théorème : La dérivée de l'énergie cinétique par rapport au temps est égale à la somme des puissances développées par les forces qui s'appliquent sur le système.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}}$$

$$\sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} W_{A\to B}(\vec{F}_{\text{ext}}) = E_c(B) - E_c(A)$$

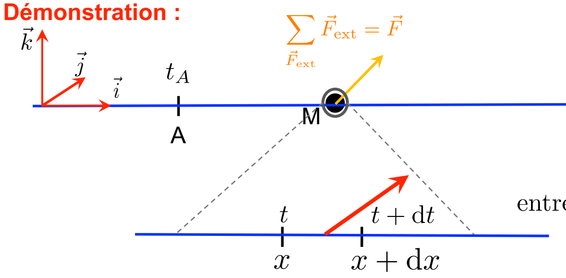
Démonstration :

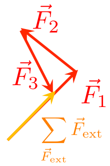


CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Version locale du théorème de l'énergie cinétique - Puissance

Démonstration :





entre x et $x + \mathrm{d}x$, $\vec{F} = \overrightarrow{C^{te}}$
dans la limite où $\mathrm{d}x \to 0$

$$\delta\mathcal{W}_{x \to x+\mathrm{d}x}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \left(\mathrm{d}x\vec{i}\right) = \vec{F} \cdot \vec{i}\,\mathrm{d}x = F_x\,\mathrm{d}x$$

$$\delta\mathcal{W}_{x \to x+\mathrm{d}x}(\vec{F}) = E_c(t + \mathrm{d}t) - E_c(t)$$

$$\lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{\delta\mathcal{W}_{x \to x+\mathrm{d}x}(\vec{F})}{\mathrm{d}x} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{E_c(t + \mathrm{d}t) - E_c(t)}{\mathrm{d}t}$$

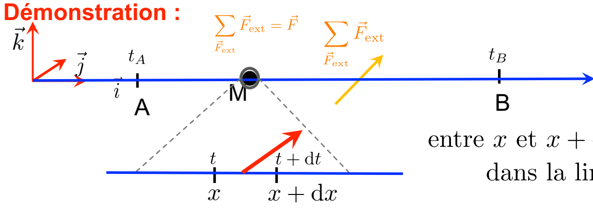
$$\lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{\delta\mathcal{W}_{x \to x+\mathrm{d}x}(\vec{F})}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}$$

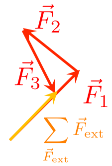
$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = F_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F_x\,v_x = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Version locale du théorème de l'énergie cinétique - Puissance

Démonstration :





entre x et $x + \mathrm{d}x$, $\vec{F} = \overrightarrow{C^{te}}$
dans la limite où $\mathrm{d}x \to 0$

$$\delta\mathcal{W}_{x \to x+\mathrm{d}x}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \left(\mathrm{d}x\vec{i}\right) = \vec{F} \cdot \vec{i}\,\mathrm{d}x = F_x\,\mathrm{d}x$$

$$\delta\mathcal{W}_{x \to x+\mathrm{d}x}(\vec{F}) = E_c(t + \mathrm{d}t) - E_c(t)$$

$$\lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{\delta\mathcal{W}_{x \to x+\mathrm{d}x}(\vec{F})}{\mathrm{d}x} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{E_c(t + \mathrm{d}t) - E_c(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = F_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F_x\,v_x = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{\delta\mathcal{W}_{x \to x+\mathrm{d}x}(\vec{F})}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Version locale du théorème de l'énergie cinétique - Puissance

Définition : On appelle puissance développée par une force $\vec{F}$ le produit scalaire de cette force et de la vitesse $\vec{v}$ de l'objet sur lequel elle s'applique.

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[\mathcal{P}] = \left[\vec{F}\right] \times [\vec{v}] \qquad [\mathcal{P}] = MLT^{-2}LT^{-1} \qquad [\mathcal{P}] = ML^2T^{-3}$$

$\mathcal{P}$ s'exprime en watt (W)

Énoncé du théorème : La dérivée de l'énergie cinétique par rapport au temps est égale à la somme des puissances développées par les forces qui s'appliquent sur le système.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_{\vec{F}_{\text{ext}}} \vec{F}_{\text{ext}} \cdot \vec{v}}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Forces conservatives et Énergie potentielle

Forces conservatives

Définition : Une force est conservative, si elle ne dépend que de la position et si son travail d'un point A à un point B ne dépend pas du chemin suivi. Le travail de A à B d'une force conservative ne dépend que des positions de points A et B.

Exemple : Le poids

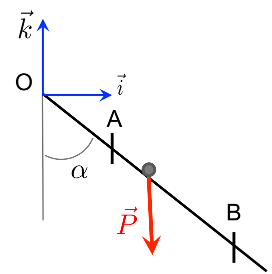
$$\vec{P} = -mg\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + z\vec{k}$$

$$\mathcal{W}_{A \to B}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\mathcal{W}_{A \to B}(\vec{P}) = \int_{x_A}^{x_B} 0\,\mathrm{d}x + \int_{z_A}^{z_B} -mg\,\mathrm{d}z$$

$$\mathcal{W}_{A \to B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)$$



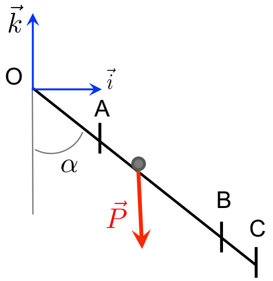
Remarque : le travail du poids d'un point A à un point B ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Forces conservatives et Énergie potentielle

Forces conservatives

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)$$



Ne dépend pas d'α

Ne dépend pas du chemin suivi

$$\mathcal{W}_{A\to C\to B}(\vec{P}) = \mathcal{W}_{A\to C}(\vec{P}) + \mathcal{W}_{C\to B}(\vec{P})$$

$$\mathcal{W}_{A\to C\to B}(\vec{P}) = \int_A^C \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_C^B \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\mathcal{W}_{A\to C\to B}(\vec{P}) = \int_{z_A}^{z_C} -mg\,\mathrm{d}z + \int_{z_C}^{z_B} -mg\,\mathrm{d}z$$

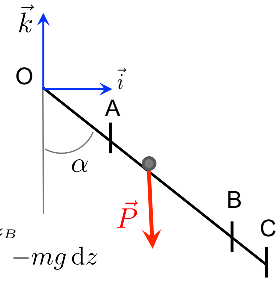
$$\mathcal{W}_{A\to C\to B}(\vec{P}) = \int_{z_A}^{z_B} -mg\,\mathrm{d}z + \int_{z_B}^{z_C} -mg\,\mathrm{d}z + \int_{z_C}^{z_B} -mg\,\mathrm{d}z$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Forces conservatives et Énergie potentielle

Forces conservatives

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)$$



Ne dépend pas d'α

Ne dépend pas du chemin suivi

$$\mathcal{W}_{A\to C\to B}(\vec{P}) = \mathcal{W}_{A\to C}(\vec{P}) + \mathcal{W}_{C\to B}(\vec{P})$$

$$\mathcal{W}_{A\to C\to B}(\vec{P}) = \int_{z_A}^{z_B} -mg\,\mathrm{d}z + \int_{z_B}^{z_C} -mg\,\mathrm{d}z + \int_{z_C}^{z_B} -mg\,\mathrm{d}z$$

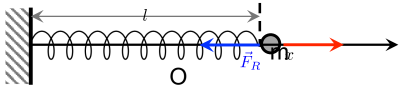
$$\mathcal{W}_{A\to C\to B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A) - \cancel{mg(z_C - z_B)} - \cancel{mg(z_B - z_C)}$$

$$\mathcal{W}_{A\to C\to B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A) \qquad \mathcal{W}_{A\to C\to B}(\vec{P}) = \mathcal{W}_{A\to B}(\vec{P})$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Force conservatives

Exemple : Force de rappel d'un ressort



$$\vec{F}_R = -kx\vec{i}$$

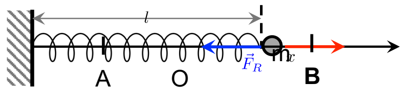
Ne dépend que de la position

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Travail d'une force non constante, trajectoire rectiligne suivant x

Exemple: masse attachée à un ressort

La masse est astreinte à se déplacer sur l'axe (Ox) de A de coordonnées $-x_0$ à B de coordonnée x_0



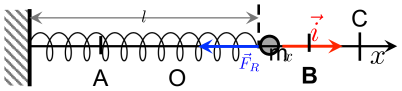
$$\boxed{\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_R) = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)}$$

Remarque 1 : Le travail de la force de rappel du ressort est nul sur une demi période de l'oscillateur.

Remarque 2 : Le travail de la force de rappel du ressort est nul sur un nombre entier de demi période.

Remarque 3: Le travail de la force de rappel d'un ressort d'un point A à un point B ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement du point de départ et du point d'arrivée.

CHAPITRE IV : ÉNERGIE



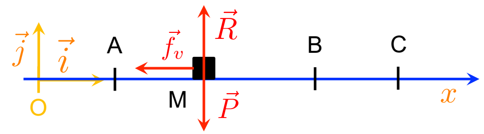
$\vec{F}_R = -kx\vec{i}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{A\to C\to B}(\vec{F}_R) &= \int_{x_A}^{x_B} \vec{F}_R(x)\cdot \mathrm{d}x\vec{i} \\
&= \int_{x_A}^{x_B} F(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{x_A}^{x_C} -kx\,\mathrm{d}x + \int_{x_C}^{x_B} -kx\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\tfrac{1}{2}kx^2\right]_{x_A}^{x_C} + \left[-\tfrac{1}{2}kx^2\right]_{x_C}^{x_B} \\
&= -\tfrac{1}{2}k\left(x_C^2 - x_A^2\right) - \tfrac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_C^2\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}k\left(\cancel{x_C^2} - x_A^2 + x_B^2 - \cancel{x_C^2}\right) \\
&= -\tfrac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right) \\
\mathcal{W}_{A\to C\to B}(\vec{F}_R) &= \mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_R)
\end{aligned}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Force **NON** conservatives

Exemple : Force de frottement visqueux



$\vec{f}_v = -\lambda\dot{x}\vec{i}$

Ne dépend pas que de la position

$$\mathcal{W}_{A\to C\to B}(\vec{f}_v) = \int_{x_A}^{x_C} -\lambda\dot{x}\mathrm{d}x + \int_{x_C}^{x_B} -\lambda\dot{x}\mathrm{d}x$$

$\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}x = \dot{x}\mathrm{d}t$

$$\mathcal{W}_{A\to C\to B}(\vec{f}_v) = \int_{t_A}^{t_C} -\lambda\dot{x}^2\mathrm{d}t + \int_{t_C}^{t_B} -\lambda\dot{x}^2\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{W}_{A\to C\to B}(\vec{f}_v) = \underbrace{\int_{t_A}^{t_B} -\lambda\dot{x}^2\mathrm{d}t}_{\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{f}_v)} + \underbrace{\int_{t_B}^{t_C} -\lambda\dot{x}^2\mathrm{d}t \int_{t_C}^{t_B} -\lambda\dot{x}^2\mathrm{d}t}_{\neq 0}$$

Le signe ne dépend pas du sens du mouvement

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Forces conservatives et Énergie potentielle

Énergie potentielle

À une force conservative on peut associer une énergie potentielle

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = Ep(A) - Ep(B)$$

Ep : énergie potentielle du mobile

C'est une énergie qui ne dépend que de la position du mobile (système)

Exemples

poids $\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{P}) = -mgz_B + mgz_A$$

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{P}) = mgz_A - mgz_B$$

$$\boxed{Ep(A) = mgz_A \text{ et } Ep(B) = mgz_B}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Forces conservatives et Énergie potentielle

Énergie potentielle

À une force conservative on peut associer une énergie potentielle

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}) = Ep_A - Ep_B$$

Exemples

Force de rappel d'un ressort

$$\mathcal{W}_{A\to B}(\vec{F}_R) = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)$$

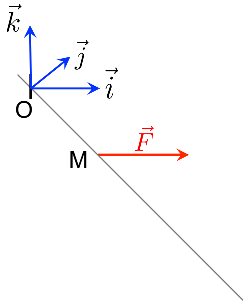
$$\Rightarrow Ep(A) = \frac{1}{2}kx_A^2 \text{ et } Ep(B) = \frac{1}{2}kx_B^2$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Forces conservatives et Énergie potentielle

Énergie potentielle

Soit une force conservative $\vec{F}$ telle que : $\vec{F} = F(x)\vec{i}$



$$\mathcal{W}_{O\to M} = \int_O^M \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k} \qquad M \text{ d'abscisse } x$$

$$\mathcal{W}_{O\to M} = \int_0^x F(x)\mathrm{d}x + \int_0^x 0\,\mathrm{d}y + \int_0^x 0\,\mathrm{d}z$$

$$E_p(O) - Ep(M) = \int_0^x F(x)\mathrm{d}x$$

$\mathcal{F}$ une primitive de F on a $\int_0^x F(x)\mathrm{d}x = \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(0)$

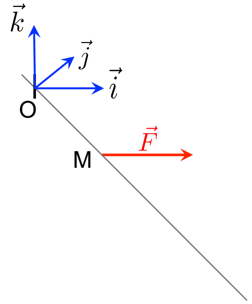
$$Ep(O) - Ep(M) = \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(0) = -\left(\mathcal{F}(0) - \mathcal{F}(x)\right)$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Forces conservatives et Énergie potentielle

Énergie potentielle

Soit une force conservative $\vec{F}$ telle que : $\vec{F} = F(x)\vec{i}$



$$E_p(O) - Ep(M) = \int_0^x F(x)\mathrm{d}x$$

$\mathcal{F}$ une primitive de F $\int_0^x F(x)\mathrm{d}x = \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(0)$

$$Ep(O) - Ep(M) = \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(0) = -\left(\mathcal{F}(0) - \mathcal{F}(x)\right)$$

$E_p(O) = \text{constante}$, O est fixe

$$Ep(M) = -\mathcal{F}(x) + C^{te} \qquad M \text{ d'abscisse } x$$

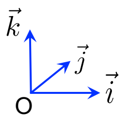
Ep est l'énergie potentielle dont dérive la **force conservative** $\vec{F}$ de direction $\vec{i}$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -F(x) = -\vec{F}\cdot\vec{i}}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Forces conservatives et Énergie potentielle

Énergie potentielle



$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = -F(x) = -\vec{F}\cdot\vec{i}$$

Remarques :

1. Ep est définie à une constante additive près

Soit : $E_p^{'} = E_p(x) + U$ où U est une constante

$$F' = \frac{\mathrm{d}E_p^{'}}{\mathrm{d}x}\vec{i} = \frac{\mathrm{d}E_p + U}{\mathrm{d}x}\vec{i} = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{i} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}}_{=0}\vec{i} = \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\vec{i} = \vec{F}$$

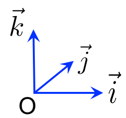
Choisir la constante *U* c'est choisir l'origine de l'énergie potentielle.

C'est un choix arbitraire, puisque la composante de la force s'obtient par dérivation

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Forces conservatives et Énergie potentielle

Énergie potentielle



Remarques :

2. Il faut que la force soit de direction constante

$$\bullet \text{ Si } \vec{F} = F\vec{i} \text{ alors } F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E_p \qquad \Rightarrow \vec{F} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E_p\vec{i}$$

$$\bullet \text{ Si } \vec{F} = F\vec{j} \text{ alors } F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}E_p \qquad \Rightarrow \vec{F} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}E_p\vec{j}$$

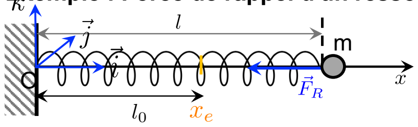
$$\bullet \text{ Si } \vec{F} = F\vec{k} \text{ alors } F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_p \qquad \Rightarrow \vec{F} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_p\vec{k}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Forces conservatives et Énergie potentielle

Énergie potentielle

Exemple : Force de rappel d'un ressort



$\bullet$ Si $\vec{F} = F\vec{i}$ alors $F = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E_p$ $\qquad \Rightarrow \vec{F} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E_p\vec{i}$

$\vec{F} = -k(x - x_e)\vec{i} \qquad F(x) = -k(x - x_e)$

Les primitives de *F* sont : $\mathcal{F}(x) = -\dfrac{1}{2}k(x - x_e)^2 + C_1$

$$\boxed{Ep(x) = \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 + C^{te}}$$

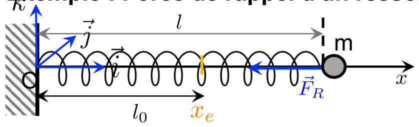
Communément on prend $C^{te} = 0$ et : $Ep(x) = \dfrac{1}{2}k(x - x_e)^2$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Forces conservatives et Énergie potentielle

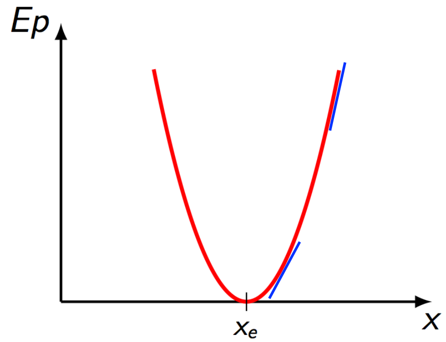
Énergie potentielle

Exemple : Force de rappel d'un ressort



$$Ep(x) = \frac{1}{2}k(x - x_e)^2$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}E_p\vec{i}$$

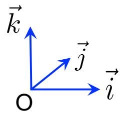


Remarque : Plus la pente de l'énergie potentielle est importante plus la norme de la force est grande

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Forces conservatives et Énergie potentielle

Énergie potentielle

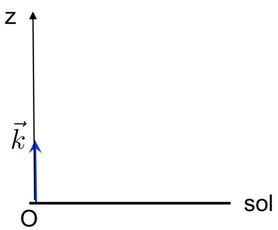


Exemple : Le poids

$\bullet$ Si $\vec{F} = F\vec{k}$ alors $F = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_p$ $\qquad \Rightarrow \vec{F} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_p\vec{k}$

$\vec{P} = -mg\vec{k} \qquad P(z) = -mg$

Les primitives de *P* sont : $\mathcal{P}(z) = -mgz + C_1$



$Ep(z) = mgz + C^{te}$

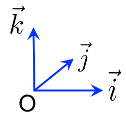
On prend souvent l'origine de l'énergie potentielle au niveau du sol $\Rightarrow C^{te} = 0$

$$\boxed{Ep(z) = mgz}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Forces conservatives et Énergie potentielle

Énergie potentielle



Remarques :

3. Hors programme

$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ $\quad$ Force conservative $\Rightarrow$ $\vec{F}$ ne dépend que de la position

$\vec{F} = F_x(x,y,z)\vec{i} + F_y(x,y,z)\vec{j} + F_z(x,y,z)\vec{k}$

Force conservative donc associée à une énergie potentielle Ep

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial Ep}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial Ep}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial Ep}{\partial z} \end{cases}$$

$\dfrac{\partial}{\partial x}$ dérivée partielle par rapport à x

Exemple :

$f(x,y) = ax^2 + y$

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2ax \qquad y$ est une constante $/x$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Forces conservatives et Énergie potentielle

Énergie potentielle d'un système:

L'Énergie potentielle d'un système est la somme des énergies potentielle associées aux forces conservatives qui s'exercent sur le système

$$\boxed{Ep(A) - Ep(B) = \sum_{\vec{F}_{conservative}} \mathcal{W}_{A \to B}(\vec{F})}$$

$$\boxed{-\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x} = \sum_{\vec{F}_{conservative}} \vec{F} \cdot \vec{i}}$$

$$-\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}y} = \sum_{\vec{F}_{conservative}} \vec{F} \cdot \vec{j} \qquad -\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}z} = \sum_{\vec{F}_{conservative}} \vec{F} \cdot \vec{k}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Énergie mécanique d'un système

Définitions : L'Énergie Mécanique *Em* d'un système est la somme de son Énergie Cinétique *Ec* et de son Énergie Potentielle *Ep*.

$$Em = Ep + Ec$$

$$Em = Ep + \frac{1}{2}mv^2$$

Théorème de l'énergie mécanique

Énoncé : La variation d'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des travaux des forces **NON conservatives** qui s'appliquent sur le système.

$$Em(B) - Em(A) = \sum_{\vec{F}_{non\ conservative}} \mathcal{W}_{A \to B}\left(\vec{F}\right)$$

Le travail est calculé sur la **trajectoire empruntée** par le mobile (forces non conservatives)

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Énergie mécanique d'un système

Démonstration :

$$Ec(B) - Ec(A) = \sum_{\vec{F}_{conservative}} \mathcal{W}_{A \to B}(\vec{F}_c) + \sum_{\vec{F}_{non\ conservative}} \mathcal{W}_{A \to B}(\vec{F}_{nc})$$

$$\text{Or} \sum_{\vec{F}_{conservative}} \mathcal{W}_{A \to B}(\vec{F}_c) = Ep(A) - Ep(B)$$

$$Ec(B) - Ec(A) = (Ep(A) - Ep(B)) + \sum_{\vec{F}_{non\ conservative}} \mathcal{W}_{A \to B}(\vec{F}_{nc})$$

$$Ec(B) - Ec(A) - (Ep(A) - Ep(B)) = \sum_{\vec{F}_{non\ conservative}} \mathcal{W}_{A \to B}(\vec{F}_{nc})$$

$$\underbrace{Ec(B) + Ep(B)}_{Em(B)} - \underbrace{(Ec(A) + Ep(A))}_{Em(A)} = \sum_{\vec{F}_{non\ conservative}} \mathcal{W}_{A \to B}(\vec{F}_{nc})$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Énergie mécanique d'un système

Version locale du théorème de l'énergie mécanique

$$\frac{\mathrm{d}Em}{\mathrm{d}t} = \sum_{\vec{F}_{non\ conservative}} \vec{F}_{nc} \cdot \vec{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}Em}{\mathrm{d}t} = \sum_{\vec{F}_{non\ conservative}} \mathcal{P}\left(\vec{F}_{nc}\right)$$

Conservation de l'énergie mécanique

Si le système n'est soumis qu'à des forces conservatives, alors :

$$\frac{\mathrm{d}Em}{\mathrm{d}t} = \sum_{\vec{F}_{non\ conservative}} \mathcal{P}\left(\vec{F}_{nc}\right)$$

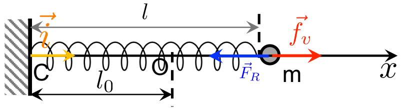
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Em}{\mathrm{d}t} = 0}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Énergie mécanique d'un système

Version locale du théorème de l'énergie mécanique

Exemple : Oscillateur harmonique



$$\|\overrightarrow{CO}\| = l_0$$

$$\vec{F}_R = -kx$$

$$\frac{\mathrm{d}Em}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad Em = Ep + Ec \qquad Ep = \frac{1}{2}kx^2 \qquad Ec = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

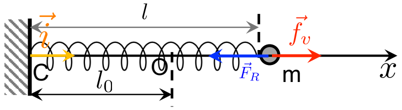
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = 0$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Énergie mécanique d'un système

Version locale du théorème de l'énergie mécanique

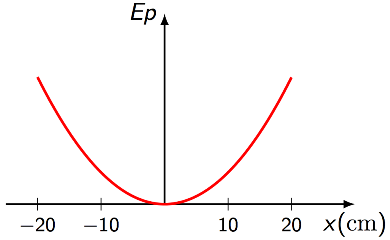
Exemple : Oscillateur harmonique



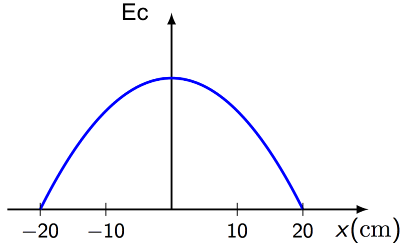
$$\|\overrightarrow{CO}\| = l_0$$

$$\vec{F}_R = -kx$$

$$Ep = \frac{1}{2}kx^2$$



$$Ec = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

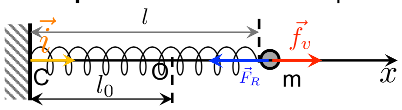


CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Énergie mécanique d'un système

Version locale du théorème de l'énergie mécanique

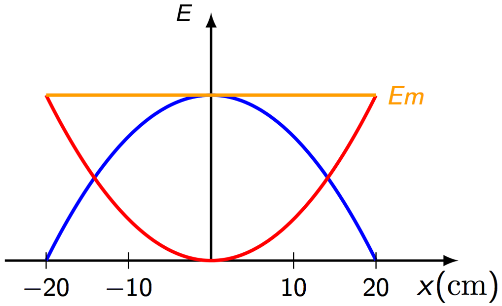
Exemple : Oscillateur harmonique



$$Ep = \frac{1}{2}kx^2$$

$$Ec = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$Em = Ep + Ec = C^{te}$$

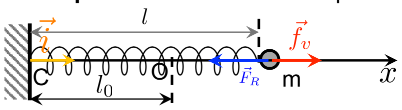


CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Énergie mécanique d'un système

Version locale du théorème de l'énergie mécanique

Exemple : Oscillateur harmonique amorti



$$\|\overrightarrow{CO}\| = l_0$$

$$\vec{F}_R = -kx$$

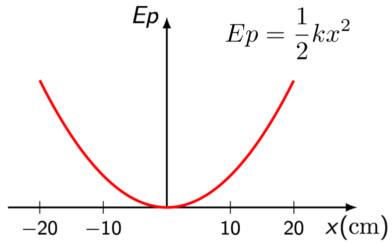
$$\vec{f}_v = -\lambda\vec{v} = -\lambda\dot{x}\vec{i}$$

$$\frac{\mathrm{d}Em}{\mathrm{d}t} = \vec{f}_v \cdot \vec{v} \qquad Em = Ep + Ec \qquad Ep = \frac{1}{2}kx^2 \qquad Ec = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\vec{f}_v \cdot \vec{v} = -\lambda\dot{x}\vec{i} \cdot \dot{x}\vec{i} \quad = -\lambda\dot{x}^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = -\lambda\dot{x}^2$$

$$Ep = \frac{1}{2}kx^2$$

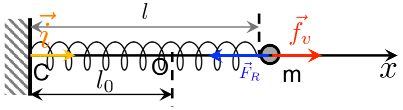


CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Énergie mécanique d'un système

Version locale du théorème de l'énergie mécanique

Exemple : Oscillateur harmonique amorti



$\|\overrightarrow{CO}\| = l_0$

$\vec{F_R} = -kx$

$\vec{f_v} = -\lambda\vec{v} = -\lambda\dot{x}\vec{i}$

$$\frac{\mathrm{d}Em}{\mathrm{d}t} = \vec{f_v}\cdot\vec{v} \qquad Em = Ep + Ec \qquad Ep = \frac{1}{2}kx^2 \qquad Ec = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\vec{f_v}\cdot\vec{v} = -\lambda\dot{x}\vec{i}\cdot\dot{x}\vec{i} \quad = -\lambda\dot{x}^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = -\lambda\dot{x}^2$$

$$\left(\frac{1}{2}k\times 2\,\dot{x}\,x + \frac{1}{2}m\times 2\ddot{x}\,\dot{x}\right) = -\lambda\dot{x}^2 \qquad \boxed{m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0}$$

La version locale du théorème de l'énergie mécanique est équivalente à l'équation différentielle du mouvement.

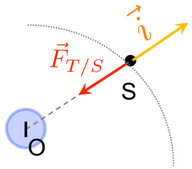
CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Énergie mécanique d'un système

Conservation de l'énergie mécanique

Si le système n'est soumis qu'à des forces conservatives, alors : $\frac{\mathrm{d}Em}{\mathrm{d}t} = 0$

Exemple : Satellite autour de la terre



M: masse de la Terre m : masse du Satellite

$$\vec{F}_{T/S} = -\mathcal{G}\frac{M\,m}{\|\overrightarrow{OS}\|^3}\overrightarrow{OS} \qquad \vec{F}_{T/S} = -\mathcal{G}\frac{M\,m}{x^2}\vec{i}$$

Calcul de l'énergie potentielle de gravitation

On a choisi le référentiel pour que $\vec{F}_{T/S}$ soit de direction constante

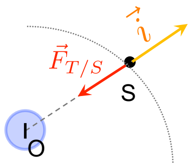
$$\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x} = -\vec{F}_{T/S}\cdot\vec{i} \quad = -\mathcal{G}\frac{M\,m}{x^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \qquad \Rightarrow \boxed{Ep(x) = -\mathcal{G}\frac{M\,m}{x} + C^{te}}$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Système soumis qu'à des forces conservatives : $\frac{\mathrm{d}Em}{\mathrm{d}t} = 0$

Exemple : Satellite autour de la terre



M: masse de la Terre

m : masse du Satellite

$$\vec{F}_{T/S} = -\mathcal{G}\frac{M\,m}{x^2}\vec{i}$$

énergie potentielle de gravitation $Ep(x) = -\mathcal{G}\frac{M\,m}{x} + C^{te}$

La constante est arbitraire et par convention on choisi:

$$\lim_{x\to\infty} Ep(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad C^{te} = 0 \qquad \boxed{Ep(x) = -\mathcal{G}\frac{M\,m}{x}}$$

énergie cinétique : $Ec(x) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2$

$$Em(x) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 - \mathcal{G}\frac{M\,m}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}Em}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Rightarrow Em(x) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2 - \mathcal{G}\frac{M\,m}{x} = C^{te}$$

Si $x = C^{te}$ alors $\|\vec{v}\|^2 = C^{te}$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Système soumis qu'à des forces conservatives :

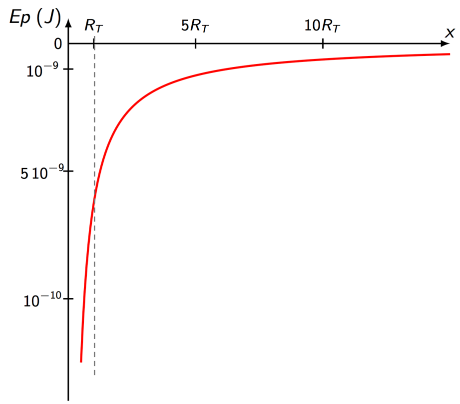
Exemple : Satellite autour de la terre

$$Ep(x) = -\mathcal{G}\frac{M\,m}{x}$$

$M_T = 5,97\,10^{24}\ kg$

$\mathrm{R_T} = 6,371\cdot 10^6\ \mathrm{m}$

$\mathcal{G} = 6,67\,10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$



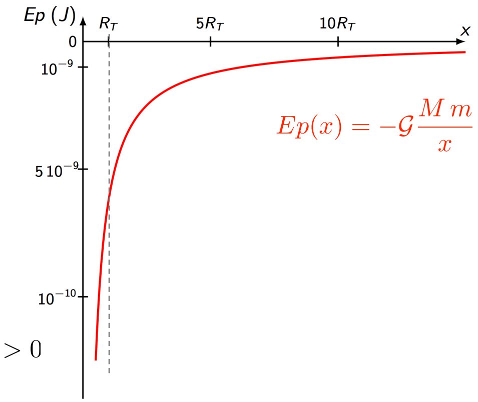
CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Système soumis qu'à des forces conservatives : $\dfrac{\mathrm{d}Em}{\mathrm{d}t} = 0$

Exemple : Vitesse de libération

$$Em = Ec(x) + Ep(x) = C^{te}$$

$Ep(x) \nearrow \qquad Ec(x) \searrow$



on veut que quand

$x \to \infty, \quad Ec(x) > 0$

Or $x \to \infty, \quad Ep(x) \to 0$

$x \to \infty, \quad Em = Ep(x) + Ec(x) > 0$

$Em > 0$ partout

CHAPITRE IV : ÉNERGIE

Système soumis qu'à des forces conservatives :

Exemple : Vitesse de libération

$$Em = Ep(x) + Ec(x) > 0$$

$x = R_T \qquad v_L = v(x = R_T)$

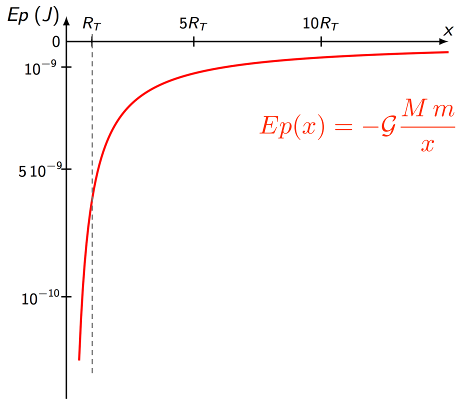
$$\frac{1}{2}mv_L^2 - \mathcal{G}\frac{M_T m}{R_T} = 0$$

$$v_L^2 = 2 \times \mathcal{G}\frac{M_T}{R_T}$$

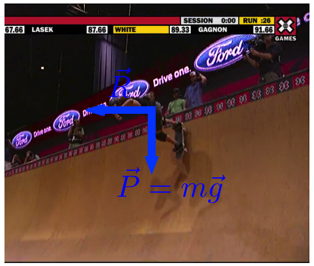
$$v_L = \sqrt{2 \times 6,67\,10^{-11}\frac{5,97\,10^{24}}{6,371\,10^6}}$$

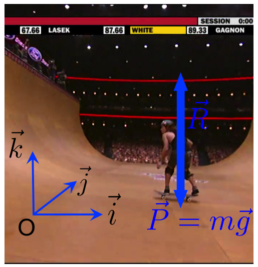
$$\approx \sqrt{12 \times 10^7}$$

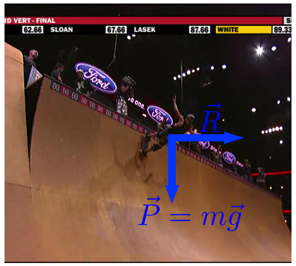
$$v_L \approx 11 \times 10^4 \mathrm{m/s}$$



CHAPITRE IV : ÉNERGIE







Bilan des forces

$\vec{P}$ Force conservative

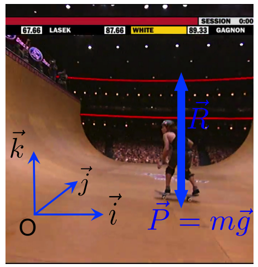
$\vec{R}$ Force conservative (dépend que de la position, travail nul quelque soit le chemin suivi)

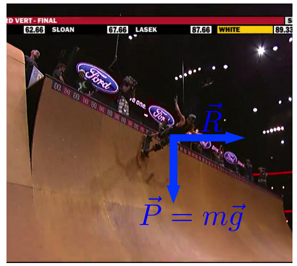
On néglige les frottements

$\Bigg\}\ \dfrac{\mathrm{d}Em}{\mathrm{d}t} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{k} \\ \dfrac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}z} = -m\vec{g}\cdot\vec{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Ep = mg\,z + C^{te} \\ Ep(z=0) = 0 \\ \Rightarrow C^{te} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad Ep = mg\,z$$

CHAPITRE IV : ÉNERGIE





$Ep = mg\,z \qquad Ec = \dfrac{1}{2}mv^2 \qquad Em = \dfrac{1}{2}mv^2(z) + mgz = C^{te}$

Conditions initiales

$v(t=0) = 0 \quad z(t=0) = H \qquad Em(t=0) = Em(z=H) = mgH$

$v(z=0) = ?$

$Em(z=0) = Em(z=H) = mgH \qquad H = 5\,\mathrm{m} \Rightarrow \quad v \approx 10\,\mathrm{m/s}$

$\dfrac{1}{2}mv^2(z=0) = mgH \qquad v(z=0) = \sqrt{2gH}$

Énergie, Équilibre et stabilié

Équilibre :

Définitions :

- **Position d'équilibre :** On dira qu'un point matériel est à l'équilibre si la somme des forces appliquées est nulle (définition de Newton).
  La position M_e du point correspondant est appelée poistion d'équilibre.

Équilibre :

Définitions :

- **Position d'équilibre :** On dira qu'un point matériel est à l'équilibre si la somme des forces appliquées est nulle (définition de Newton).
  La position M_e du point correspondant est appelée poistion d'équilibre.

Équilibre et Énergie potentielle d'un système conservatif :

$$\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x} = -\vec{F} \cdot \vec{i}$$

Équilibre :

Définitions :

- **Position d'équilibre :** On dira qu'un point matériel est à l'équilibre si la somme des forces appliquées est nulle (définition de Newton).
  La position M_e du point correspondant est appelée poistion d'équilibre.

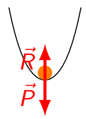
Équilibre et Énergie potentielle d'un système conservatif :

$$\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x} = -\vec{F} \cdot \vec{i}$$

et donc en $x = x_e$ abscisse du point d'équilibre on a :

$$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_e} = 0$$

Bille dans une goulotte



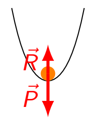
Équilibre

Équilibre :

Définitions :

- **Position d'équilibre :** On dira qu'un point matériel est à l'équilibre si la somme des forces appliquées est nulle (définition de Newton).
  La position M_e du point correspondant est appelée poistion d'équilibre.

Bille dans une goulotte



Équilibre

Équilibre et Énergie potentielle d'un système conservatif :

$$\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x} = -\vec{F} \cdot \vec{i}$$

et donc en $x = x_e$ abscisse du point d'équilibre on a :

$$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_e} = 0$$

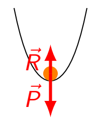
Une position d'équilibre correspond à un extrémum d'énergie potentielle

Équilibre :

Définitions :

- **Position d'équilibre :** On dira qu'un point matériel est à l'équilibre si la somme des forces appliquées est nulle (définition de Newton).
  La position M_e du point correspondant est appelée poistion d'équilibre.

Bille dans une goulotte



Équilibre

Équilibre et Énergie potentielle d'un système conservatif :

$$\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x} = -\vec{F} \cdot \vec{i}$$

et donc en $x = x_e$ abscisse du point d'équilibre on a :

$$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_e} = 0$$

Une position d'équilibre correspond à un extrémum d'énergie potentielle

Exemple: l'oscillateur harmonique:

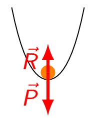
$$Ep(x) = \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 + C \;\Rightarrow\; \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_e} = k(x_e - x_e) = 0$$

Équilibre :

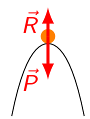
Définitions :

- **Position d'équilibre :** On dira qu'un point matériel est à l'équilibre si la somme des forces appliquées est nulle (définition de Newton).
  La position M_e du point correspondant est appelée poistion d'équilibre.

Bille dans une goulotte



Équilibre



Équilibre

Équilibre et Énergie potentielle d'un système conservatif :

$$\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x} = -\vec{F} \cdot \vec{i}$$

et donc en $x = x_e$ abscisse du point d'équilibre on a :

$$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_e} = 0$$

Une position d'équilibre correspond à un extrémum d'énergie potentielle

Exemple: l'oscillateur harmonique:

$$Ep(x) = \frac{1}{2}k(x - x_e)^2 + C \;\Rightarrow\; \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_e} = k(x_e - x_e) = 0$$

Équilibre :

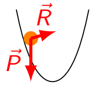
Définitions :

- **Position d'équilibre :** On dira qu'un point matériel est à l'équilibre si la somme des forces appliquées est nulle (définition de Newton).
  La position M_e du point correspondant est appelée position d'équilibre.

Équilibre :

Définitions :

- **Position d'équilibre :** On dira qu'un point matériel est à l'équilibre si la somme des forces appliquées est nulle (définition de Newton).
  La position M_e du point correspondant est appelée position d'équilibre.



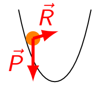
Équilibre

Équilibre :

Définitions :

- **Position d'équilibre :** On dira qu'un point matériel est à l'équilibre si la somme des forces appliquées est nulle (définition de Newton).
  La position M_e du point correspondant est appelée position d'équilibre.

- **Équilibre stable :** M_e est une position d'équilibre stable si quand on écarte le mobile de M_e, le mobile revient à sa position d'équilibre.



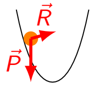
Équilibre stable

Équilibre :

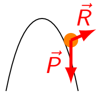
Définitions :

- **Position d'équilibre :** On dira qu'un point matériel est à l'équilibre si la somme des forces appliquées est nulle (définition de Newton).
  La position M_e du point correspondant est appelée position d'équilibre.

- **Équilibre stable :** M_e est une position d'équilibre stable si quand on écarte le mobile de M_e, le mobile revient à sa position d'équilibre.



Équilibre stable



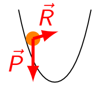
Équilibre instable

Équilibre :

Définitions :

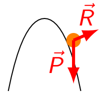
- **Position d'équilibre :** On dira qu'un point matériel est à l'équilibre si la somme des forces appliquées est nulle (définition de Newton).
  La position M_e du point correspondant est appelée position d'équilibre.

- **Équilibre stable :** M_e est une position d'équilibre stable si quand on écarte le mobile de M_e, le mobile revient à sa position d'équilibre.



Équilibre stable

- **Équilibre instable :** M_e est une position d'équilibre instable si quand on écarte le mobile de M_e, le mobile s'écarte de plus en plus de sa position d'équilibre.



Équilibre instable

Stabilité :
On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

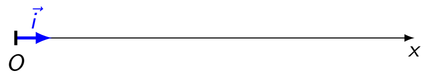
Extremum d'énergie potentielle

On montre que :

- une position d'**équilibre** correspond à un **extremum d'énergie potentielle**.
- l'équilibre est **stable** si la position correspond à un **minimum** d'énergie potentielle
- l'équilibre est **instable** si la position correspond à un **maximum** d'énergie potentielle

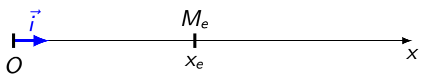
Stabilité :
On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

- Le système est conservatif donc la résultante des forces $\vec{F}$ ne dépend que de la position du mobile (du système)
- On se place dans le cas ou l'énergie potentielle est une fonction que d'une seule variable x : $Ep = Ep(x) \quad \Rightarrow \; \vec{F} = F\vec{i}$



Stabilité :
On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

- Le système est conservatif donc la résultante des forces $\vec{F}$ ne dépend que de la position du mobile (du système)
- On se place dans le cas ou l'énergie potentielle est une fonction que d'une seule variable x : $Ep = Ep(x) \quad \Rightarrow \; \vec{F} = F\vec{i}$
- la position d'équilibre est x_e

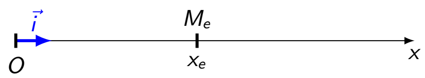


Stabilité :
On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

- Le système est conservatif donc la résultante des forces $\vec{F}$ ne dépend que de la position du mobile (du système)
- On se place dans le cas ou l'énergie potentielle est une fonction que d'une seule variable x : $Ep = Ep(x) \quad \Rightarrow \; \vec{F} = F\vec{i}$
- la position d'équilibre est x_e

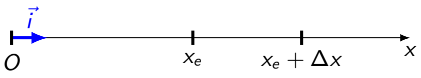
Le mobile est à l'équilibre donc

$$\vec{F} = \vec{0}$$



Stabilité : On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

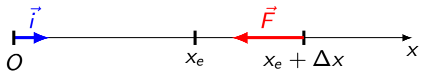
- Le système est conservatif donc la résultante des forces $\vec{F}$ ne dépend que de la position du mobile (du système)
- On se place dans le cas ou l'énergie potentielle est une fonction que d'une seule variable x : $Ep = Ep(x) \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = F\vec{i}$
- La position d'équilibre est x_e



- On écarte le mobile de sa position d'équilbre de Δx

Stabilité : On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

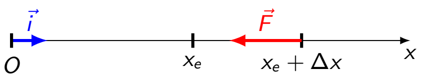
- Le système est conservatif donc la résultante des forces $\vec{F}$ ne dépend que de la position du mobile (du système)
- On se place dans le cas ou l'énergie potentielle est une fonction que d'une seule variable x : $Ep = Ep(x) \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = F\vec{i}$
- La position d'équilibre est x_e



- On écarte le mobile de sa position d'équilbre de Δx
- $\vec{F} \neq \vec{0}$

Stabilité : On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

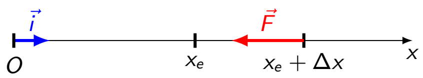
- Le système est conservatif donc la résultante des forces $\vec{F}$ ne dépend que de la position du mobile (du système)
- On se place dans le cas ou l'énergie potentielle est une fonction que d'une seule variable x : $Ep = Ep(x) \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = F\vec{i}$
- La position d'équilibre est x_e



- On écarte le mobile de sa position d'équilbre de Δx
- $\vec{F} \neq \vec{0}$
- Pour que l'équilibre soit stable il faut que la force le ramène vers sa position d'équilibre

Stabilité : On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

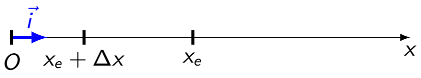
- Le système est conservatif donc la résultante des forces $\vec{F}$ ne dépend que de la position du mobile (du système)
- On se place dans le cas ou l'énergie potentielle est une fonction que d'une seule variable x : $Ep = Ep(x) \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = F\vec{i}$
- La position d'équilibre est x_e



- On écarte le mobile de sa position d'équilbre de Δx
- $\vec{F} \neq \vec{0}$
- Pour que l'équilibre soit stable il faut que la force le ramène vers sa position d'équilibre
- Si $\Delta x > 0$ il faut que $\vec{F} \cdot \vec{i} < 0$

Stabilité :
On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

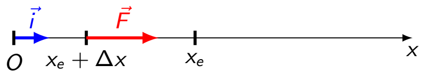
- Le système est conservatif donc la résultante des forces $\vec{F}$ ne dépend que de la position du mobile (système)
- On se place dans le cas ou l'énergie potentielle n'est une fonction que d'une seule variable x : $Ep = Ep(x) \quad \Rightarrow \vec{F} = F\vec{i}$



- On écarte le mobile de sa position d'équilbre de Δx
- $\vec{F} \neq \vec{0}$
- Pour que l'équilibre soit stable il faut que la force le ramène vers sa position d'équilibre
- Si $\Delta x < 0$

Stabilité :
On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

- Le système est conservatif donc la résultante des forces $\vec{F}$ ne dépend que de la position du mobile (système)
- On se place dans le cas ou l'énergie potentielle n'est une fonction que d'une seule variable x : $Ep = Ep(x) \quad \Rightarrow \vec{F} = F\vec{i}$

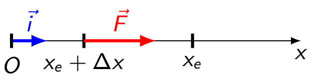


- On écarte le mobile de sa position d'équilbre de Δx
- $\vec{F} \neq \vec{0}$
- Pour que l'équilibre soit stable il faut que la force le ramène vers sa position d'équilibre
- Si $\Delta x < 0$ il faut que $\vec{F} \cdot \vec{i} > 0$

Stabilité et énergie potentielle
On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

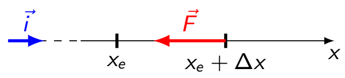
Résumé

$\Delta x < 0$



$\vec{F} \cdot \Delta x \vec{i} < 0$

$\Delta x > 0$



$\vec{F} \cdot \Delta x \vec{i} < 0$

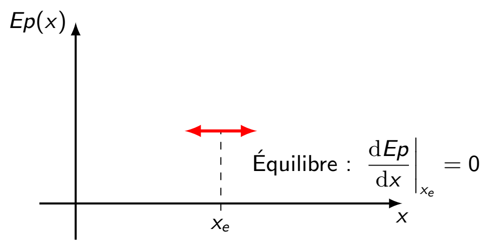
Système conservatif donc $\vec{F}$ dérive d'un potentiel : $\vec{F} = -\dfrac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\vec{i}$

$$\vec{F} \cdot \Delta x \vec{i} < 0 \Leftrightarrow -\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} \vec{i} \cdot \Delta x \vec{i} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} \Delta x > 0$$

Stabilité et énergie potentielle
On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

$$\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} \Delta x > 0$$

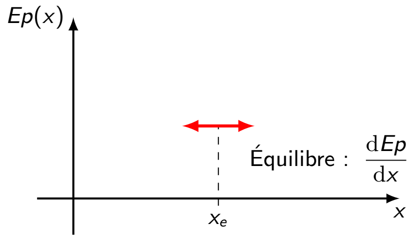


Stabilité et énergie potentielle
On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

$$\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} \quad \Delta x > 0$$

$$\Delta x < 0 \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} < 0$$

$Ep(x)$ est une fonction décroissante pour $x < x_e$



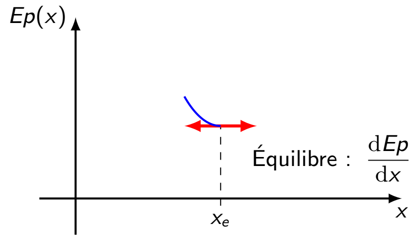
Équilibre : $\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e} = 0$

Stabilité et énergie potentielle
On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

$$\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} \quad \Delta x > 0$$

$$\Delta x < 0 \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} < 0$$

$Ep(x)$ est une fonction décroissante pour $x < x_e$



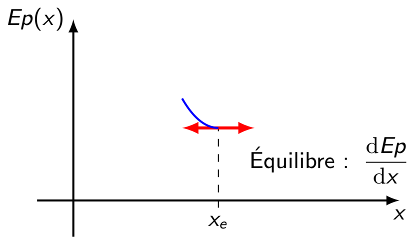
Équilibre : $\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e} = 0$

Stabilité et énergie potentielle
On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

$$\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} \quad \Delta x > 0$$

$$\Delta x < 0 \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} < 0 \qquad \Delta x > 0 \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} > 0$$

$Ep(x)$ est une fonction décroissante pour $x < x_e$



Équilibre : $\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e} = 0$

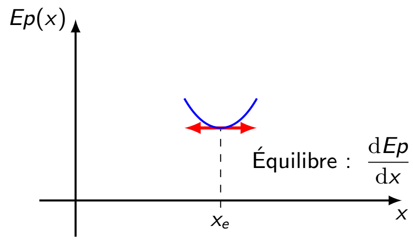
Stabilité et énergie potentielle
On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

$$\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} \quad \Delta x > 0$$

$$\Delta x < 0 \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} < 0 \qquad \Delta x > 0 \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} > 0$$

$Ep(x)$ est une fonction décroissante pour $x < x_e$

$Ep(x)$ est une fonction croissante pour $x > x_e$



Équilibre : $\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e} = 0$

Stabilité et énergie potentielle

On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

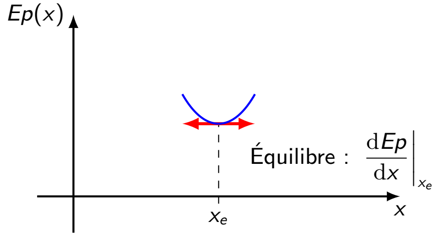
$$\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x}\Delta x > 0$$

$$\Delta x < 0 \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} < 0$$

$Ep(x)$ est une fonction décroissante pour $x < x_e$

$$\Delta x > 0 \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} > 0$$

$Ep(x)$ est une fonction croissante pour $x > x_e$



Équilibre : $\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e} = 0$

x_e correspond à un minimum d'énergie potentielle

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2Ep}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_e} > 0$$

Stabilité :

On ne s'intéresse qu'aux systèmes conservatifs

On peut montrer ce résultat à partir du développement limité de la fonction

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}$$

$$\text{On a : } f(x_e+\Delta x) = f(x_e) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x}\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

On l'applique à la dérivée de l'énergie potentielle :

$$\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x} = \underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e}}_{=0\text{ (équilibre)}} + \left.\frac{\mathrm{d}^2Ep}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_e}\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

Pour que l'équilibre soit stable il faut que : $\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x}\Delta x > 0$

$$\left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e+\Delta x}\Delta x = \left.\frac{\mathrm{d}^2Ep}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_e}(\Delta x)^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}^2Ep}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_e} > 0 \Leftrightarrow \text{ minimum d'énergie potentielle}$$

Dynamique au voisinage d'un point d'équilibre

- On considère un système conservatif
- On étudie la dynamique au voisinage d'un point d'équilibre: pour $|x - x_e| << 1$

$$Ep(x) = Ep(x_e) + \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e} \times (x-x_e) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2Ep}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_e} \times (x-x_e)^2 \;\; \mathcal{O}(x-x_e)^3$$

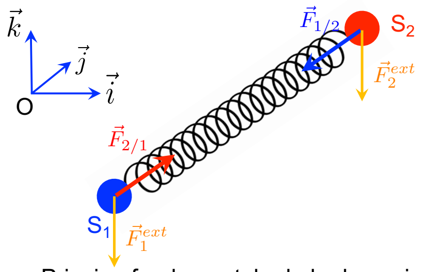
$$\text{Or : } \left.\frac{\mathrm{d}Ep}{\mathrm{d}x}\right|_{x_e} = 0 \;\Rightarrow\; Ep(x) = Ep(x_e) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2Ep}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_e} \times (x-x_e)^2 \;\; \mathcal{O}(x-x_e)^3$$

$$\text{On pose } \left.\frac{\mathrm{d}^2Ep}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_e} = k$$

$$\Rightarrow Ep(x) \approx k(x-x_e)^2 + \underbrace{Ep(x_e)}_{C^{te}}$$

Autour de sa position d'équilibre un système peut être décrit comme un oscillateur harmonique

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS



Référentiel Galiléen

$\overrightarrow{OS_1} = \vec{r}_1$

$\overrightarrow{OS_2} = \vec{r}_2$

3éme loi de Newton : $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$

$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = \vec{f}$

Principe fondamentale de la dynamique:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{2/1} \qquad m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{1/2}$$

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^{ext} - \vec{F}_{1/2} \qquad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{1/2}$$

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_1^{ext} - \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{1/2}$$

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Mouvement du centre de masse et mouvements relatifs

1- Centre de masse

Le centre de masse G d'un système composé de 2 masses m1 et m2 situées respectivement aux points S1 et S2 est tel que:

$$m_1\overrightarrow{GS_1} + m_2\overrightarrow{GS_2} = \vec{0}$$

Position de G :

$$m_1\overrightarrow{GS_1} + m_2\overrightarrow{GS_2} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad m_1(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OS_1}) + m_2(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OS_2}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad m_1\overrightarrow{GO} + m_2\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OS_1} + m_2\overrightarrow{OS_2} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad (m_1 + m_2)\overrightarrow{GO} = -(m_1\overrightarrow{OS_1} + m_2\overrightarrow{OS_2})$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OS_1} + m_2\overrightarrow{OS_2}}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{\vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Mouvement du centre de masse et mouvements relatifs

1- Centre de masse

Le centre de masse G d'un système composé de 2 masses m1 et m2 situées respectivement aux points S1 et S2 est tel que:

$$m_1\overrightarrow{GS_1} + m_2\overrightarrow{GS_2} = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}}$$

Remarques :

- Comme $m_1\|\overrightarrow{GS_1}\| = m_2\|\overrightarrow{GS_2}\|$ G est plus proche de la masse la plus grande
- Si les 2 masses sont égales $m_1 = m_2$ alors le centre de masse se trouve au milieu de $[S_1\, S_2]$
- Si $\dfrac{m_1}{m_2} \to \infty$ alors $G \to S_1$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Mouvement du centre de masse et mouvements relatifs

2- Mouvement du centre de masse

Comme $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ sont des fonctions du temps $\vec{r}_G$ est une fonction du temps.
On cherche donc l'équation différentielle qui régit le mouvement de G

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} \qquad \vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Leftrightarrow (m_1 + m_2)\vec{r}_G = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$$

$$\Leftrightarrow (m_1 + m_2)\dot{\vec{r}}_G = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2$$

$$\Leftrightarrow (m_1 + m_2)\dot{\vec{r}}_G = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Remarque :

on pose : $m_1\vec{v}_1 = \vec{p}_1$

$m_2\vec{v}_2 = \vec{p}_2$

$M = m_1 + m_2$

$\vec{p}_G = M\dot{\vec{r}}_G$

$$\Rightarrow \vec{p}_G = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

G est aussi appelé Centre d'Inertie

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Mouvement du centre de masse et mouvements relatifs

2- Mouvement du centre de masse

$$\Leftrightarrow (m_1+m_2)\vec{r}_G = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_G}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t}$$

Or on avait trouvé : $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_G}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$$

Tout se passe comme si il existait un point matériel de masse M, située en G soumis à la somme des forces extérieures

On obtient donc la position de G à chaque instant en résolvant l'équation différentielle

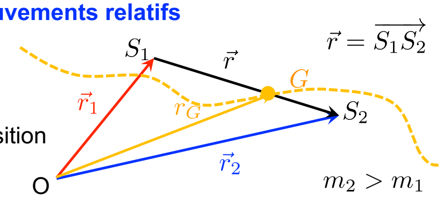
$$\boxed{M\vec{a}_G = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}} \qquad \begin{aligned} M &= m_1 + m_2 \\ \vec{a}_G &= \vec{r}_G \end{aligned}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Mouvement du centre de masse et mouvements relatifs

$$M\vec{a}_G = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$$

On connait à chaque instant la position du centre de masse. On veut déterminer la position des mobiles S_1 et S_2.



3- Mouvement relatif

On va considérer leur positions relatives $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OS_2} - \overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{S_1O} + \overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{S_1S_2}$$

La connaissance de $\vec{r}$ et $\vec{r}_G$ nous permettra de calculer $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$

$$\begin{cases} \vec{r}_G = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} & (1) \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 & (2) \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_G - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_G + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \end{cases}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Mouvement du centre de masse et mouvements relatifs

3- Mouvement relatif

$$\begin{cases} \vec{r}_G = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} & (1) \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 & (2) \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_G - \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_G + \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \vec{r}_1 = \frac{(m_1+m_2)}{m_1}\vec{r}_G - \frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2$$

$$\text{on injecte (2) : } \vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{r}_2 \Rightarrow \vec{r}_1 = \frac{(m_1+m_2)}{m_1}\vec{r}_G - \frac{m_2}{m_1}(\vec{r}_2 + \vec{r}_1)$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)\vec{r}_1 = \frac{(m_1+m_2)}{m_1}\vec{r}_G - \frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{m_1+m_2}{m_1}\vec{r}_1 = \frac{(m_1+m_2)}{m_1}\vec{r}_G - \frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2$$

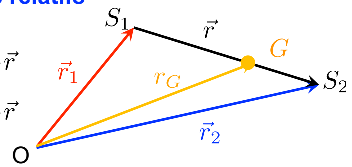
$$\Leftrightarrow \vec{r}_1 = \vec{r}_G - \frac{m_2}{m_1} \times \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_2$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Mouvement du centre de masse et mouvements relatifs

3- Mouvement relatif

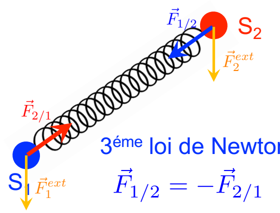
$$\begin{cases} \vec{r}_G = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_G - \dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_G + \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \end{cases}$$



Si on connait à chaque instant la position du centre de masse et la position relative, on peut obtenir la position de chacun des points du système.

Cherchons l'équation différentielle qui régit le « mouvement » de $\vec{r}$

Principe fondamental de la dynamique appliqué à chacun des mobiles S_1 et S_2



3ème loi de Newton

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

$$\begin{cases} m_2\vec{r}_2 = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{1/2} \\ m_1\vec{r}_1 = \vec{F}_1^{ext} - \vec{F}_{1/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_2 = \dfrac{1}{m_2}\vec{F}_2^{ext} + \dfrac{1}{m_2}\vec{F}_{1/2} \\ \vec{r}_1 = \dfrac{1}{m_1}\vec{F}_1^{ext} - \dfrac{1}{m_1}\vec{F}_{1/2} \end{cases}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Mouvement du centre de masse et mouvements relatifs

3- Mouvement relatif

On cherche donc l'équation différentielle donnant $\vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_2}\vec{F}_2^{ext} + \frac{1}{m_2}\vec{F}_{1/2}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 \qquad \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{m_1}\vec{F}_1^{ext} - \frac{1}{m_1}\vec{F}_{1/2}$$

$$\left[\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m_2}\vec{F}_2^{ext} - \frac{1}{m_1}\vec{F}_1^{ext} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{1/2}\right] \times \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$$

On voudrait une formule qui ressemble à : $m\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F}$

$$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1} = \mu \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \Leftrightarrow \boxed{\mu = \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}}$$

µ est la masse réduite du système

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Mouvement du centre de masse et mouvements relatifs

3- Mouvement relatif

$$\left[\ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m_2}\vec{F}_2^{ext} - \frac{1}{m_1}\vec{F}_1^{ext} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{1/2}\right] \times \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1} = \mu \qquad \mu = \frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}$$ masse réduite

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{ext} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{1/2}$$

On pose : $\vec{f}^{ext} = \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{ext} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{ext}$ $\qquad \boxed{\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{f}^{ext} + \vec{F}_{1/2}}$

On obtient une équation de type PFD.
On peut donc considérer qu'on étudie le mouvement d'une particule fictive de position $\vec{r}$ et de masse µ, soumise à l'action des forces $\vec{f}^{ext}$ et $\vec{F}_{1/2}$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Mouvement du centre de masse et mouvements relatifs

3- Mouvement relatif

Conclusion :

- On résout le mouvement du centre de masse G de masse M = m1 + m2 et de position $\vec{r_G}$ soumis uniquement au forces extérieures $\vec{F}_1^{ext}$ et $\vec{F}_2^{ext}$.
- On résout le mouvement relatif $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ de masse µ et soumis aux forces $\vec{f}^{ext} + \vec{F}_{1/2}$

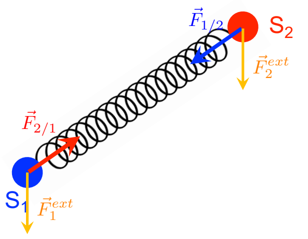
$$\begin{cases} M\ddot{\vec{r}}_G = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} \\ \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{f}^{ext} + \vec{F}_{1/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_G(t) \\ \vec{r}(t) \end{cases}$$

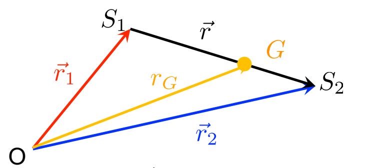
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_G - \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_G + \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \end{cases}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Mouvement du centre de masse et mouvements relatifs

3- Mouvement relatif





$$\vec{r} = \overrightarrow{S_1 S_2} \qquad \vec{F}_{1/2} = -k\vec{r}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^{ext} - \vec{F}_{1/2} \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{1/2} \end{cases} \qquad \begin{cases} M\vec{a}_G = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} \\ \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{f}^{ext} + \vec{F}_{1/2} \end{cases}$$

On avait 2 équations différentielles couplées $\quad$ 2 équations différentielles indépendantes

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Mouvement du centre de masse et mouvements relatifs

3- Mouvement relatif

Remarque : si $\vec{F}_1^{ext}$ et $\vec{F}_2^{ext}$ sont les poids de S_1 et S_2

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{f}^{ext} + \vec{F}_{1/2}$$

$$\vec{f}^{ext} = \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{ext} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{ext}$$

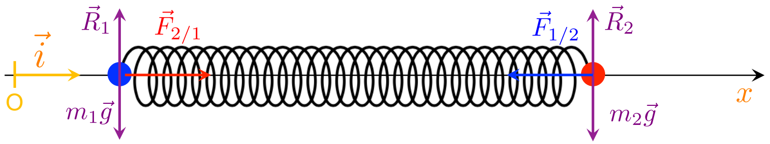
$$\frac{1}{m_1}\vec{F}_1^{ext} = \vec{g} \text{ et } \frac{1}{m_2}\vec{F}_2^{ext} = \vec{g}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m_2}\vec{F}_2^{ext} - \frac{1}{m_1}\vec{F}_1^{ext} = 0 \qquad \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{1/2}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Mouvement du centre de masse et mouvements relatifs

3- Exemple :



CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Référentiel du centre de masse

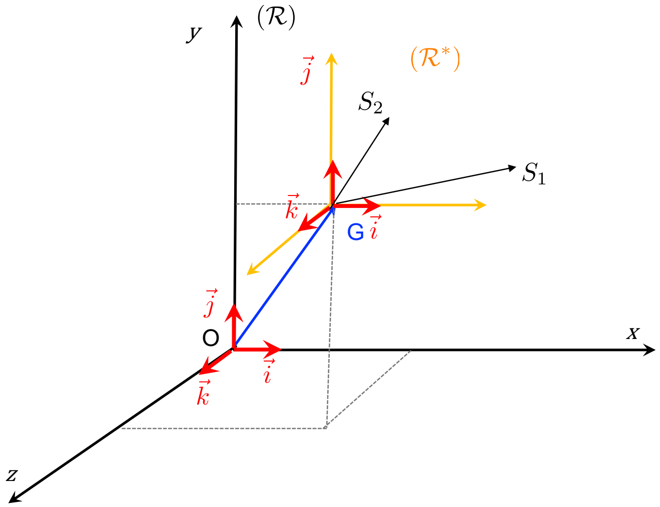
1- Définition : On définit le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$ comme le référentiel qui est en translation par rapport au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ et dans lequel le centre de masse G est immobile.

En général on choisira *G* comme origine de $\mathcal{R}^*$

$\mathcal{R}^*$ en translation cela veut dire que les directions *xyz* mesurées dans $\mathcal{R}^*$ sont fixes dans $\mathcal{R}$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Référentiel du centre de masse



CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Changement de référentiel

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}$ $\qquad \vec{r} = \vec{r}_G + \vec{r}^*$

$\vec{r}_G = x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + z_G\vec{k}$

$\vec{r}^* = \overrightarrow{GM} = x^*\vec{i} + y^*\vec{j} + z^*\vec{k}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

$\vec{r}_1 = \vec{r}_G + \vec{r}_1^*$

$\vec{r}_2 = \vec{r}_G + \vec{r}_2^*$

$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2^* - \vec{r}_1^*$

Le mouvement relatif est le même dans les 2 référentiels

$\vec{v}_1 = \vec{v}_G + \vec{v}_1^*$

$\vec{v}_2 = \vec{v}_G + \vec{v}_2^*$

$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^*$

La vitesse relative est la même dans les 2 référentiels

$\vec{v}_l = \vec{v}_G + \vec{v}_l^*$

$\vec{r}_l = \vec{r}_G + \vec{r}_l^*$ $\qquad l = 1 \text{ ou } 2$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Changement de référentiel

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{r} = \vec{r}_G + \vec{r}^*$

$\vec{r}_G = x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + z_G\vec{k}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}$

$\vec{r}^* = \overrightarrow{GM} = x^*\vec{i} + y^*\vec{j} + z^*\vec{k}$

$\vec{r}_1 = \vec{r}_G + \vec{r}_1^*$

$\vec{r}_2 = \vec{r}_G + \vec{r}_2^*$

$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_2^* - \vec{r}_1^*$

Le mouvement relatif est le même dans les 2 référentiels

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

$\vec{v}_1 = \vec{v}_G + \vec{v}_1^*$ $\qquad \vec{v}_G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_G$

$\vec{v}_2 = \vec{v}_G + \vec{v}_2^*$ $\qquad \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^*$

La vitesse relative est la même dans les 2 référentiels

$\vec{a}_1 = \vec{a}_G + \vec{a}_1^*$ $\qquad \vec{a}_G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}_G$

$\vec{a}_2 = \vec{a}_G + \vec{a}_2^*$ $\qquad \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{a}_2^* - \vec{a}_1^*$

L'accélération relative est la même dans les 2 référentiels

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Quantité de mouvement

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = M\vec{v}_G$

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* + M\vec{v}_G$

$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = M\vec{v}_G^*$

$\vec{v}_G^* = \vec{0}$ $\qquad \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = \vec{0}$ $\qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{p}_2^* = -\vec{p}_1^*$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Quantité de mouvement

On va montrer que : $\vec{p} = \mu\dot{\vec{r}}$ $\qquad \vec{p} = \vec{p}_2^* = -\vec{p}_1^*$

$\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = m_2\left(\vec{v}_2^* + \vec{v}_G\right)$ $\qquad \Leftrightarrow \vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = \vec{p}_2^* + m_2\vec{v}_G$

$$\text{or } \vec{v}_G = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)$$

$$\vec{p}_2^* = m_2\vec{v}_2 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)$$

$$\vec{p}_2^* = -\frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \left(m_2 - \frac{m_2^2}{m_1 + m_2}\right)\vec{v}_2$$

$$\vec{p}_2^* = -\frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_2 \qquad \vec{p}_2^* = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right)$$

$\vec{p}_2^* = \mu\vec{v}$ $\qquad \vec{p}_2^* = \vec{p}$ $\qquad \vec{p}_1^* = -\mu\vec{v}$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Principe fondamental de la dynamique dans le référentiel du CdM

Rappel : $M\vec{a}_G = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$ et $\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{f}^{ext} + \vec{F}_{1/2}$

! Si $\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} \neq \vec{0}$ alors le référentiel du centre de masse n'est pas Galiléen

On ne peut pas appliquer simplement le PFD

Mais $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}^* \Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}^* \Rightarrow \mu\ddot{\vec{r}}^* = \vec{f}^{ext} + \vec{F}_{1/2}$

$$\vec{f}^{ext} = \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{ext} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{ext}$$

Ce n'est pas le PFD mais c'est une équation différentielle qui permet de déterminer $\vec{r}^*$ puis $\vec{r}^*$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Principe fondamental de la dynamique

Remarque :

- Si les forces extérieures sont les poids des points matériels, on a vu que

$$\frac{1}{m_2}\vec{F}_2^{ext} - \frac{1}{m_1}\vec{F}_1^{ext} = 0 \qquad \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{1/2}$$

- Si la résultante des forces extérieures est nulle : $\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} = 0$

$$\vec{f}^{ext} = \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{ext} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{ext} = \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{ext} + \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_2^{ext}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{f}^{ext} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{F}_2^{ext} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{F}_2^{ext}$$

$$\vec{f}^{ext} = \vec{F}_2^{ext}$$

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{f}^{ext} + \vec{F}_{1/2} \qquad \mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_2^{ext}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Principe fondamental de la dynamique

Conclusion :

- Dans le référentiel du centre de masse $\vec{p}_2^* = -\vec{p}_1^*$ il suffit donc d'étudier la dynamique d'une particule
- La dynamique de la particule 2 est la dynamique de la particule fictive $\vec{p}_2^* = \mu\vec{v}$
- Dans le référentiel du centre de masse on peut écrire :

$$\mu\ddot{\vec{r}}^* = \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{ext} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{1/2}$$

- Dans le référentiel du laboratoire on peut écrire :

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{ext} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{1/2}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_G + \vec{v}_1^* \qquad \vec{r}_1 = \vec{r}_G + \vec{r}_1^*$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_G + \vec{v}_2^* \qquad \vec{r}_2 = \vec{r}_G + \vec{r}_2^*$$

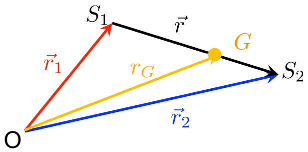
CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Énergie :

- E = E(S_1) + E(S_2)
- Théorème de Koenig : L'énergie cinétique totale est la somme de l'énergie cinétique associée au mouvement du centre de masse et de l'énergie cinétique interne (énergie cinétique associée au mouvement relatif)
- Le travail des forces fait varier les 2 formes de l'énergie cinétique
- Énergie potentielle d'interaction.

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Énergie cinétique totale :



$$Ec = Ec_1 + Ec_2$$

on veut faire apparaître $\vec v_G$ et $\vec p = \mu \vec v$

on a montré : $\begin{cases} \vec p_1 = m_1 \vec v_G - \mu \vec v \\ \vec p_2 = m_2 \vec v_G + \mu \vec v \end{cases}$ $\qquad \mu = \dfrac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}$

$$Ec = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}$$

$$Ec = \frac{1}{2m_1}\left(m_1 \vec v_G - \overbrace{\mu \vec v}^{\vec p}\right)^2 + \frac{1}{2m_2}\left(m_2 \vec v_G + \overbrace{\mu \vec v}^{\vec p}\right)^2$$

$$Ec = \frac{1}{2m_1}\left(m_1^2 v_G^2 + p^2 \cancel{- 2m_1 \vec v_G \cdot \vec p}\right) + \frac{1}{2m_2}\left(m_2^2 v_G^2 + p^2 \cancel{+ 2m_2 \vec v_G \cdot \vec p}\right)$$

$$Ec = \frac{1}{2} m_1 v_G^2 + \frac{1}{2m_1} p^2 + \frac{1}{2} m_2 v_G^2 + \frac{1}{2m_2} p^2$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Énergie cinétique totale :

$$Ec = \frac{1}{2} m_1 v_G^2 + \frac{1}{2m_1} p^2 + \frac{1}{2} m_2 v_G^2 + \frac{1}{2m_2} p^2$$

$$Ec = \frac{1}{2} \underbrace{(m_1 + m_2)}_{M} v_G^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)}_{\frac{1}{2\mu}} p^2$$

$Ec = \dfrac{1}{2} M v_G^2 + \dfrac{1}{2\mu} p^2$ ou encore $\boxed{Ec = \dfrac{1}{2M} p_G^2 + \dfrac{1}{2\mu} p^2}$

Énergie cinétique du centre de masse

Énergie cinétique de la particule fictive

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Énergie cinétique totale dans le référentiel du centre de masse :

Le calcul précédent est vrai dans tout référentiel. On peut en particulier écrire :

$$Ec^* = \frac{1}{2M} p_G^{2\,*} + \frac{1}{2\mu} p^{2\,*}$$

$p_G^* = 0 \qquad p^* = p \qquad Ec^* = \dfrac{1}{2\mu} p^2$

Théorème de Koenig :

on note K_G l'énergie cinétique du centre de masse mesurée dans $\mathcal{R}$

$$K_G = \frac{1}{2} M \|\vec v_G\|^2$$

$$\boxed{Ec = Ec^* + K_G}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Théorème de l'énergie cinétique pour le centre de masse :

On a vu : $m_1 \ddot{\vec r}_1 + m_2 \ddot{\vec r}_2 = \vec F_1^{ext} + \vec F_2^{ext}$ $\qquad$ 3[ème] loi de Newton : $\vec F_{1/2} = -\vec F_{2/1}$

$$m_1 \overrightarrow{GS_1} + m_2 \overrightarrow{GS_2} = \vec 0 \quad \Rightarrow \quad \vec r_G = \frac{m_1 \vec r_1 + m_2 \vec r_2}{m_1 + m_2}$$

$\dfrac{\mathrm{d}\vec p_G}{\mathrm{d}t} = \vec F_1^{ext} + \vec F_2^{ext} \qquad \boxed{M \vec a_G = \vec F_1^{ext} + \vec F_2^{ext}} \qquad M = m_1 + m_2$

$$\left(M \frac{\mathrm{d}\vec v_G}{\mathrm{d}t} = \vec F_1^{ext} + \vec F_2^{ext} \right) \times \vec v_G$$

$$M \frac{\mathrm{d}\vec v_G}{\mathrm{d}t} \times \vec v_G = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2} M v_G^2\right] = \frac{d}{\mathrm{d}t} K_G$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}t} K_G = \left(\vec F_1^{ext} + \vec F_2^{ext}\right) \cdot \vec v_G$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Théorème de l'énergie cinétique pour le centre de masse :

$G(t_{ini})$ $G(t_{fin})$

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}K_G = \left(\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}\right) \cdot \vec{v}_G$$

$$\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{d}{\mathrm{d}t}K_G \,\mathrm{d}t = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left(\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}\right) \cdot \vec{v}_G \,\mathrm{d}t$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Théorème de l'énergie cinétique pour le centre de masse :

$G(t_{ini})$ $G(t_{fin})$

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}K_G = \left(\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}\right) \cdot \vec{v}_G$$

$$\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{d}{\mathrm{d}t}K_G \,\mathrm{d}t = \int_{t_{ini})}^{t_{fin}} \left(\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}_G}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t$$

$$\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{d}{\mathrm{d}t}K_G \,\mathrm{d}t = \int_{G(t_{ini})}^{G(t_{fin})} \left(\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}_G$$

$K_G[G(t_{fin})] - K_G[G(t_{ini})]$ $\quad \mathcal{W}_{G[(t_{ini})] \to G[(t_{fin})]}\left(\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}\right)$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Théorème de l'énergie cinétique pour le centre de masse :

$G(t_{ini})$ $G(t_{fin})$

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}K_G = \left(\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}\right) \cdot \vec{v}_G$$

$$\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{d}{\mathrm{d}t}K_G \,\mathrm{d}t = \int_{t_{ini})}^{t_{fin}} \left(\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}_G}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t$$

$$\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{d}{\mathrm{d}t}K_G \,\mathrm{d}t = \int_{G(t_{ini})}^{G(t_{fin})} \left(\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}_G$$

$$\boxed{K_G[G(t_{fin})] - K_G[G(t_{ini})] = \mathcal{W}_{G(t_{ini}) \to G(t_{fin})}\left(\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}\right)}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Théorème de l'énergie cinétique pour S_1 et S_2:

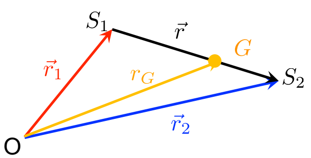
On applique le théorème de l'énergie cinétique à S_1 et S_2

$$\frac{\mathrm{d}Ec_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{2/1} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_1^{ext} \cdot \vec{v}_1$$

$$\frac{\mathrm{d}Ec_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{1/2} \cdot \vec{v}_2 + \vec{F}_2^{ext} \cdot \vec{v}_2$$

$$\frac{\mathrm{d}Ec}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\vec{F}_{1/2} \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}_{\vec{F}_{1/2} \cdot \vec{v}} + \underbrace{\vec{F}_1^{ext} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_2^{ext} \cdot \vec{v}_2}_{\mathcal{P}^{ext}}$$

$$\frac{\mathrm{d}Ec}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Ec_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}Ec_2}{\mathrm{d}t}$$



$$\vec{v} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

On veut faire apparaître K_G

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_G - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v} \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_G + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v} \end{cases}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Théorème de l'énergie cinétique pour S_1 et S_2:

$$\frac{\mathrm{d}Ec}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{1/2}\cdot(\vec{v}_2-\vec{v}_1) + \vec{F}_1^{ext}\cdot\vec{v}_1 + \vec{F}_2^{ext}\cdot\vec{v}_2 \qquad \begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_G - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v} \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_G + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}Ec}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{1/2}\cdot\vec{v} + \vec{F}_1^{ext}\cdot\left(\vec{v}_G - \underbrace{\frac{m_2}{m_1+m_2}}_{\frac{\mu}{m_1}}\vec{v}\right) + \vec{F}_2^{ext}\cdot\left(\vec{v}_G + \underbrace{\frac{m_1}{m_1+m_2}}_{\frac{\mu}{m_2}}\vec{v}\right)$$

$$\mu = \frac{m_1\, m_2}{m_1+m_2}$$

$$\frac{\mathrm{d}Ec}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{1/2}\cdot\vec{v} + \left(\vec{F}_1^{ext}+\vec{F}_2^{ext}\right)\cdot\vec{v}_G - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{ext}\cdot\vec{v} + \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{ext}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}K_G = \left(\vec{F}_1^{ext}+\vec{F}_2^{ext}\right)\cdot\vec{v}_G \qquad \vec{f}^{ext} = \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{ext} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{ext} \qquad \text{(T11)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Ec}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}K_G}{\mathrm{d}t} + \left(\vec{F}_{1/2}+\vec{f}^{ext}\right)\cdot\vec{v}}$$

Forme locale

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\mathrm{d}Ec}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\mathrm{d}K_G}{\mathrm{d}t} + \left(\vec{F}_{1/2}+\vec{f}^{ext}\right)\cdot\vec{v}\;\mathrm{d}t$$

$$Ec(t_{fin}) - Ec(t_{ini}) = \Delta K_G + \mathcal{W}_{\vec{r}_{ini}\to\vec{r}_{fin}}(\vec{F}_{1/2}+\vec{f}^{ext})$$

ΔK_G est la variation d'énergie cinétique du centre de masse

$$K_G[G(t_{fin})] - K_G[G(t_{ini})] = \mathcal{W}_{G(t_{ini})\to G(t_{fin})}\left(\vec{F}_1^{ext}+\vec{F}_2^{ext}\right)$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Théorème de l'énergie cinétique pour le centre de masse :

$$Ec = \frac{1}{2M}p_G^2 + \frac{1}{2\mu}p^2 \qquad Ec^* = \frac{1}{2\mu}p^2 \qquad K_G = \frac{1}{2}M\|\vec{v}_G\|^2$$

Théorème de Koenig : $Ec = Ec^* + K_G$

Or on vient de trouver que $\frac{\mathrm{d}Ec}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}K_G}{\mathrm{d}t} + \left(\vec{F}_{1/2}+\vec{f}^{ext}\right)\cdot\vec{v}$

$$Ec = K_G + Ec^* \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}Ec^*}{\mathrm{d}t} + \cancel{\frac{\mathrm{d}K_G}{\mathrm{d}t}} = \cancel{\frac{\mathrm{d}K_G}{\mathrm{d}t}} + \left(\vec{F}_{1/2}+\vec{f}^{ext}\right)\cdot\vec{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}Ec^*}{\mathrm{d}t} = \left(\vec{F}_{1/2}+\vec{f}^{ext}\right)\cdot\vec{v}$$

$$\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\mathrm{d}Ec^*}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \left(\vec{F}_{1/2}+\vec{f}^{ext}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

$$Ec^*(t_{fin}) - Ec^*(t_{ini}) = \mathcal{W}_{\vec{r}_{ini}\to\vec{r}_{fin}}\left(\vec{f}+\vec{f}^{ext}\right)$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse :

Remarques :

- Le théorème de l'énergie cinétique ne s'applique que dans un référentiel Galiléen
- Le théorème de Koenig permet de décomposer la variation de l'énergie cinétique en deux contributions :
  - la variation de l'énergie cinétique du centre de masse
    $$K_G = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\|\vec{v}_G\|^2$$
  - la variation de l'énergie cinétique associée au mouvement relatif (qui est aussi la variation de l'énergie cinétique du système dans le référentiel du centre de masse)
    $$Ec^* = \frac{1}{2}\mu\|\vec{v}\|^2$$
- Le travail de la somme des forces extérieures $\left(\vec{F}_1^{ext}+\vec{F}_2^{ext}\right)$ ne peut que donner ou retirer de l'énergie cinétique au centre de masse.

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Théorème de l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse :

Remarques :

❖ Le travail de la force intérieure $\vec{f}$ ne peut faire varier que l'énergie cinétique du mouvement relatif
Mais ce n'est pas réciproque : le travail des forces extérieures fait aussi varier l'énergie cinétique du mouvement relatif.

$$Ec^*(t_{fin}) - Ec^*(t_{ini}) = \mathcal{W}_{\vec{r}_{ini}\to\vec{r}_{fin}}\left(\vec{f} + \vec{f}^{ext}\right)$$

$$\vec{f}^{ext} = \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{ext} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{ext}$$

❖ Lorsque la somme des forces extérieures est non nulle $\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} \neq \vec{0}$ le mouvement du centre de masse n'est pas rectiligne et uniforme; Le référentiel du centre de masse n'est donc pas Galiléen et de manière générale, on ne peut pas appliquer le théorème de l'énergie cinétique. C'est uniquement parce que c'est le référentiel du centre de masse que cla est possible, moyennant quelques adaptation.

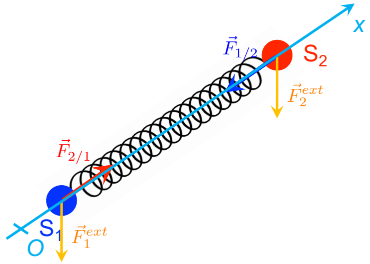
CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Énergie potentielle d'interaction:

On suppose que :

- $\vec{F}_{1/2}$ est conservative (elle ne dépend que de $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$)
- $\vec{F}_{1/2}$ ne dépend que de $\vec{r}$

On pourra alors lui associer une énergie potentielle qui ne dépend que de $\vec{r}$ qu'on appellera énergie potentielle d'interaction



Cas des mobiles liés par un ressort

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad \vec{r} = r\vec{i} \qquad \vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i}$$

$$\vec{F}_{1/2} = -k(x_2 - x_1)\vec{i} \qquad x_2 > x_1$$

$$\vec{F}_{1/2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2\vec{i}$$

$\frac{\partial}{\partial x_2}$ est la dérivée partielle par rapport à x_2

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Énergie potentielle d'interaction :

$$\vec{F}_{1/2} = -\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2\vec{i} \qquad \boxed{\vec{F}_{1/2} = -k(x_2 - x_1)\vec{i}}$$

$\frac{\partial}{\partial x_2}$ est la dérivée partielle par rapport à x_2

Rappel : pour la dérivation partielle les autres variables sont considérée comme constante

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}k(x - C^{te})^2$$

$$= \frac{1}{2}k \times 2 \times (x - C^{te}) \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x - C^{te})$$

$$= k(x - C^{te})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 = k(x_2 - x_1)$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Énergie potentielle d'interaction :

$$\vec{F}_{2/1} = k(x_2 - x_1)\vec{i} \qquad \vec{F}_{2/1} \stackrel{?}{=} -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2}k\,(x_2 - x_1)^2\right)\vec{i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2}k\,(x_2 - x_1)^2\right) = \frac{1}{2}k \times 2 \times (x_2 - x_1) \times \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\underbrace{x_2}_{constante} - x_1\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2}k\,(x_2 - x_1)^2\right) = -k \times (x_2 - x_1)$$

$$\vec{F}_{2/1} = -\left(-k \times (x_2 - x_1)\right)\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{F}_{2/1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2}k\,(x_2 - x_1)^2\right)\vec{i}}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Énergie potentielle d'interaction :

On suppose que :

- $\vec{F}_{1/2}$ est conservative (elle ne dépend que de $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$)
- $\vec{F}_{1/2}$ ne dépend que de $\vec{r}$

On pourra alors lui associer une énergie potentielle qui ne dépend que de $\vec{r}$ qu'on appellera énergie potentielle d'interaction

il existe $Ep(r)$ telle que $\vec{F}_{1/2} = -\dfrac{\mathrm{d}Ep(r)}{\mathrm{d}r}$ $\qquad \vec{r} = r\vec{i}$

Comme $r = (x_2 - x_1)$ on peut montrer que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \dfrac{\partial}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial}{\partial x_1}$

$$\vec{F}_{1/2} = -\frac{\partial}{\partial x_2} Ep(x_2 - x_1)\vec{i} \qquad \vec{F}_{2/1} = -\frac{\partial}{\partial x_1} Ep(x_2 - x_1)\vec{i}$$

Ep est appelée l'énergie potentielle d'interaction associée à la force $\vec{F}_{2/1}$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Théorème de l'énergie mécanique

On se place dans le cas où : $\vec{f}^{ext} = \dfrac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{ext} - \dfrac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{ext} = 0$

On a vu que : $\dfrac{\mathrm{d}Ec^*}{\mathrm{d}t} = \left(\vec{F}_{1/2} + \vec{f}^{ext}\right) \cdot \vec{v}$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}Ec^*}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{1/2} \cdot \vec{v}$$

$$\int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \frac{\mathrm{d}Ec^*}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{t_{ini}}^{t_{fin}} \vec{F}_{1/2} \cdot \vec{v}\ \mathrm{d}t$$

$$\boxed{Ec^*(t_{fin}) - Ec^*(t_{ini}) = \mathcal{W}_{\vec{r}_{ini} \to \vec{r}_{fin}}\left(\vec{F}_{1/2}\right)}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Théorème de l'énergie mécanique

$$Ec^*(t_{fin}) - Ec^*(t_{ini}) = \mathcal{W}_{\vec{r}_{ini} \to \vec{r}_{fin}}\left(\vec{F}_{1/2}\right)$$

$$\vec{F}_{1/2} = \vec{f}_c + \vec{f}_{nc}$$

$$\vec{f}_c \to Ep$$

$$Ec^*(t_{fin}) - Ec^*(t_{ini}) = Ep(\vec{r}_{ini}) - Ep(\vec{r}_{fin}) + \mathcal{W}_{\vec{r}_{ini} \to \vec{r}_{fin}}\left(\vec{f}_{nc}\right)$$

$$Ec^*(t_{fin}) - Ec^*(t_{ini}) - Ep(\vec{r}_{ini}) + Ep(\vec{r}_{fin}) = \mathcal{W}_{\vec{r}_{ini} \to \vec{r}_{fin}}\left(\vec{f}_{nc}\right)$$

$$\boxed{Em^*(t_{fin}) - Em^*(t_{ini}) = \mathcal{W}_{\vec{r}_{ini} \to \vec{r}_{fin}}\left(\vec{f}_{nc}\right)}$$

Remarque : Lorsque toutes les forces intérieures sont conservatives, ou du moins lorsqu'elles ne travaillent pas (et toujours si $\overrightarrow{f^{ext}} = \vec{0}$), l'énergie mécanique du mouvement relatif (= Em*) est conservée.

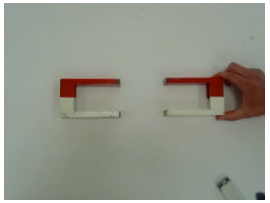
CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

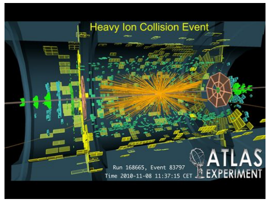
Collisions

Définitions :

L'interaction entre 2 particules sera appelée collision si :

- Les forces intérieures sont de portée finie
  Au-delà d'une certaine distance les particules n'interagissent pas





- Aux instants initial et final les particules sont suffisamment éloignées pour qu'elle n'interagissent pas.

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

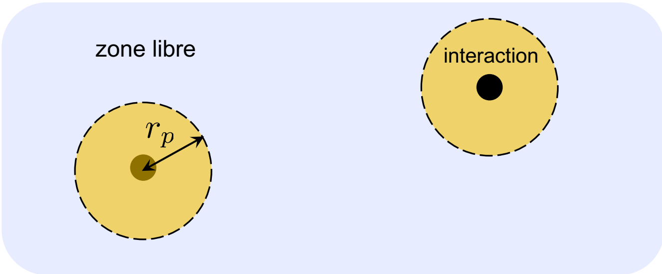
Collision

Il faut définir une zone d'interaction et donc une distance au-delà de laquelle les particules n'interagissent pas. On appelle cette distance r_p, la portée de l'interaction (collision).

$$\text{zone d'interaction } = \{r \in \mathbb{R};\ |r| < r_p\}$$

Par opposition on appelle la zone libre, la zone dans laquelle les particules n'interagissent pas (ne se voient pas).

$$\text{zone libre } = \{r \in \mathbb{R};\ |r| \geq r_p\}$$



CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Collision

Il faut définir une zone d'interaction et donc une distance au-delà de laquelle les particules n'interagissent pas. On appelle cette distance r_p, la portée de l'interaction (collision).

$$\text{zone d'interaction } = \{r \in \mathbb{R};\ 0 \leq r < r_p\}$$

Par opposition on appelle la zone libre, la zone dans laquelle les particules n'interagissent pas (ne se voient pas).

$$\text{zone libre } = \{r \in \mathbb{R};\ r \geq r_p\}$$

Avant et après la collision les particules sont dans la zone libre $\Longrightarrow$ les particules sont isolées : Les forces intérieures sont nulles

Si on suppose en plus que le système est isolé (pas de forces extérieures)

$$\vec{F}_1^{ext} = \vec{F}_2^{ext} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{f}^{ext} = \vec{0} \qquad \vec{f}^{ext} = \frac{\mu}{m_2}\vec{F}_2^{ext} - \frac{\mu}{m_1}\vec{F}_1^{ext}$$

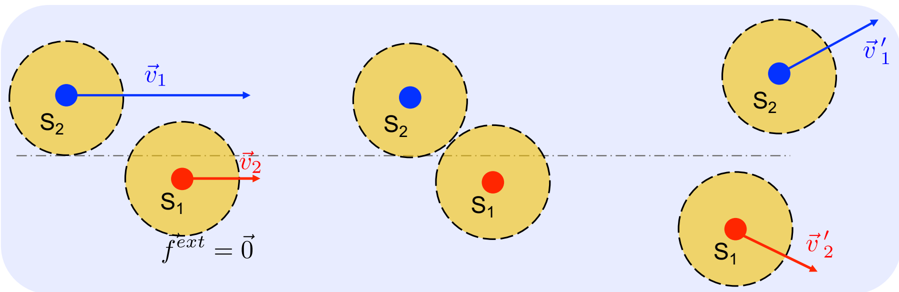
$\Rightarrow$ Le mouvement des particules dans la zone libre est rectiligne et uniforme

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Collision : Système isolé $\left(\vec{f}^{ext} = \vec{0}\right)$

$$M\vec{\ddot{r}}_G = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} = \sum \vec{F}^{ext} \qquad \vec{r}_G \text{ : position du centre de masse } G$$

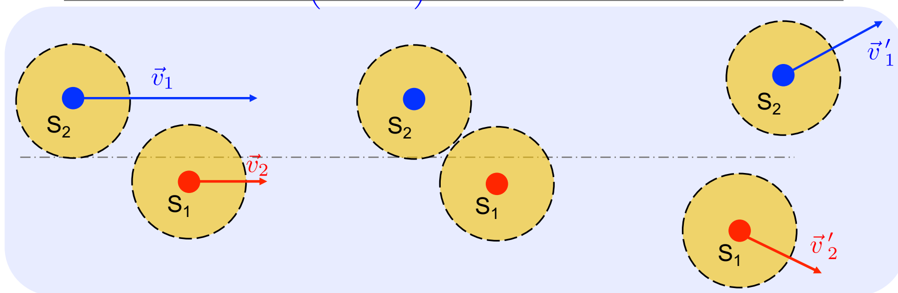
$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}_G = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ \sum \vec{F}^{ext} = \vec{0} \end{array}\right\} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_G}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_G = \overrightarrow{C^{te}} \quad \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{C^{te}}$$



avant collision — collision — après collision

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Collision : Système isolé $\left(\vec{f}^{ext} = \vec{0}\right)$



avant collision — collision — après collision

On note :

$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ $\quad$ $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$

Les vitesses et quantités de mouvement avant la collision

$\vec{v}'_1$ et $\vec{v}'_2$ $\quad$ $\vec{p}'_1$ et $\vec{p}'_2$

Les vitesses et quantités de mouvement après la collision

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Collision : Système isolé – Conservation de la quantité de mouvement

$$M\ddot{\vec{r}}_G = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} = \sum \vec{F}^{ext} \qquad \vec{r}_G \text{ : position du centre de masse } G$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}_G = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ \sum \vec{F}^{ext} = \vec{0} \end{array}\right\} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{p}_G}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_G = \overrightarrow{C^{te}} \quad \Leftrightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{C^{te}}$$

La quantité de mouvement du système est constante au cours de l'interaction

$$\boxed{\vec{p}\,'_1 + \vec{p}_2\,' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2}$$

La quantité de mouvement du système est conservée lors d'une collision

Remarque : Dans le référentiel du centre de masse cette conservation est triviale puisque dans le référentielle du centre de masse la quantité de mouvement totale est toujours nulle

- Dans le référentiel du centre de masse $\vec{p}_2^* = -\vec{p}_1^*$ il suffit donc d'étudier la dynamique d'une particule

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Collision : Système isolé – Conservation de l'énergie

$$Em = Ec + Ep$$

Dans la zone libre $Ep = 0$ (les particules n'interagissent pas)

Pour obtenir la relation entre l'énergie du système avant et après le choc, on utilise le théorème de l'énergie cinétique

$$Ec = Ec^* + K_G$$

Théorème de l'énergie cinétique pour un système isolé s'écrit :

$$Ec(t_{fin}) - Ec(t_{ini}) = Ec^*(t_{fin}) - Ec^*(t_{ini}) = \mathcal{W}_{\vec{r}_{ini}\to\vec{r}_{fin}}\left(\vec{f}\right)$$

$$\vec{f} = \vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

La variation d'énergie cinétique est uniquement due à la variation de l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse (pour un système isolé)

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Collision : Système isolé – Conservation de l'énergie

$$\vec{f} = \vec{f}_c + \vec{f}_{nc}$$

$$Ec(t_{fin}) - Ec(t_{ini}) = Ec^*(t_{fin}) - Ec^*(t_{ini}) = \mathcal{W}_{\vec{r}_{ini}\to\vec{r}_{fin}}\left(\vec{f}_c\right) + \mathcal{W}_{\vec{r}_{ini}\to\vec{r}_{fin}}\left(\vec{f}_{nc}\right)$$

$$Ec(t_{fin}) - Ec(t_{ini}) = Ec^*(t_{fin}) - Ec^*(t_{ini}) = Ep(\vec{r}_{ini}) - Ep(\vec{r}_{fin}) + \mathcal{W}_{\vec{r}_{ini}\to\vec{r}_{fin}}\left(\vec{f}_{nc}\right)$$

Avant et après le choc $\vec{f} = \vec{0}$ $\qquad Ep(\vec{r}_{ini}) = Ep(\vec{r}_{fin}) = 0$

$$Ec(t_{fin}) - Ec(t_{ini}) = Ec^*(t_{fin}) - Ec^*(t_{ini}) = \mathcal{W}_{\vec{r}_{ini}\to\vec{r}_{fin}}\left(\vec{f}_{nc}\right)$$

$$\boxed{Ec(t_{fin}) - Ec(t_{ini}) = Ec^*(t_{fin}) - Ec^*(t_{ini}) = \mathcal{W}_{\vec{r}_{ini}\to\vec{r}_{fin}}\left(\vec{f}_{nc}\right)}$$

Pendant la collision $\vec{f} = \vec{f}_c + \vec{f}_{nc} \neq \vec{0}$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Collision : Système isolé – Énergie disponible

La variation d'énergie cinétique totale du système est la variation d'énergie dans le référentiel du centre de masse

$$\Delta Ec = \Delta Ec^* = E'c^* - Ec^*$$

L'énergie cinétique du centre de mase ne varie pas tout au long de la trajectoire
$$\Delta K_G = 0$$

Théorème de Koenig : $\boxed{Ec = Ec^* + K_G}$

$$E'c = E'c^* + K_G$$

$$E'c^* \geq 0 \qquad E'c \geq K_G$$

$$E_{dispo} = Ec^* = \frac{1}{2}\mu v^2 = Ec - K_G$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Collision : Système isolé – Conservation de l'énergie

Exemple : Réactions chimiques endoénergétiques

Ce sont des réactions qui nécessitent un minimum d'énergie $E_{\min}$ pour avoir lieu

$$E_{dispo} > E_{min}$$

$$E_{dispo} = Ec^* = Ec - K_G$$

$$\Leftrightarrow Ec > E_{min} + \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2}_{K_G}$$

Lors d'une collision K_G ne varie pas et ne peut donc pas être utilisé

$$E_{dispo} = Ec^* = Ec - K_G = 0$$

Remarque :
Lorsque toute l'énergie disponible est "consommée" lors du choc alors Ec* = 0

$$E_{dispo} = Ec^* = Ec - K_G = 0$$

$Ec^* = 0$ les particules sont immobiles dans le référentiel du centre de masse

$$\boxed{\vec{v}_1{}' = \vec{v}_2{}' = \vec{v}_G}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Collision : Système isolé – Conservation de l'énergie

Choc complètement mou : $\vec{v}_1{}' = \vec{v}_2{}' = \vec{v}_G$

Démonstration :

$$E'c^* = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_1(v_1'^*)^2 + \frac{1}{2}m_2(v_2'^*)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (v_1'^*)^2 = (v_2'^*)^2 = 0$$

$$m_1\vec{v}_1'{}^* + m_2\vec{v}_2'{}^* = \vec{0} \qquad \vec{v}_1' = \vec{v}_1'{}^* + \vec{v}_G$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2'{}^* + \vec{v}_G$$

$$\vec{v}_1{}' = \vec{v}_2{}' = \vec{v}_G$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Collision : Système isolé – collisions élastiques

Définition :
Une collision est élastique si l'énergie cinétique du système est conservée au cours du choc (pour un système isolé)

$$Ec' = Ec$$

$\Leftrightarrow$ Les forces intérieures sont conservatives

$$Ec(t_{fin}) - Ec(t_{ini}) = Ec^*(t_{fin}) - Ec^*(t_{ini}) = \mathcal{W}_{\vec{r}_{ini}\to\vec{r}_{fin}}\left(\vec{f}_{nc}\right)$$

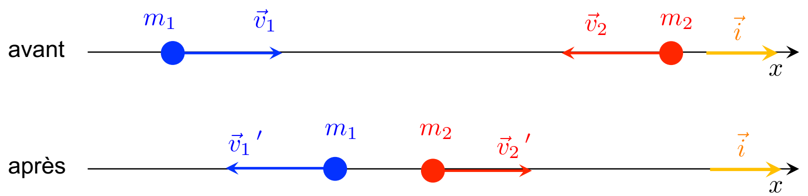
$$Ec(t_{fin}) - Ec(t_{ini}) = Ec^*(t_{fin}) - Ec^*(t_{ini}) = 0$$

2 équations : **2 inconnues**

$$\begin{cases} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' \\ Ec_1 + Ec_2 = Ec_1' + Ec_2' \end{cases} \qquad \vec{p}_1{}' \text{ et } \vec{p}_2{}'$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Exemples de collisions 1D : Chocs élastiques



On connait $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ on cherche $\vec{p}_1{}'$ et $\vec{p}_2{}'$

Le plus simple est de se placer dans le référentiel du centre de masse $\mathcal{R}^*$

$$\vec{v}_l{}' = \vec{v}_l{}'^* + \vec{v}_g \qquad l = 1, 2$$

Dans $\mathcal{R}^*$ les vitesses des particules s'expriment en fonction de la vitesse relative

$$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Exemples de collisions 1D :

Chocs élastiques : utilisation du référentiel du centre de masse

$$\vec{v}_l\,' = \vec{v}_l\,'^* + \vec{v}_g \qquad l = 1,2$$

$$\frac{\mathrm{d}K_G}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow v_G^2 = C^{te}$$ à 1 dimension $$\Rightarrow \vec{v}_G = \overrightarrow{C^{te}}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_l' = \vec{v}_l$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Exemples de collisions 1D :

Chocs élastiques : utilisation du référentiel du centre de masse

Dans $\mathcal{R}^*$

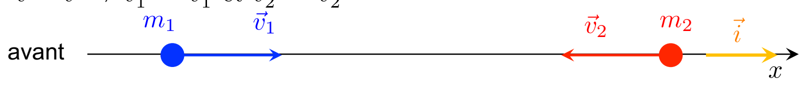
$$Ec*' = Ec*$$

$$\Leftrightarrow \quad Ec^* = \frac{1}{2\mu}p^2$$

$$\Leftrightarrow Ec^* = \frac{1}{2}\mu v^2$$

2 possibilités : $v = v'$ ou $v = -v'$ $\qquad (v = v^*)$

$\bullet v = v' \Rightarrow v_1'^* = v_1^*$ et $v_2'^* = v_2^*$



Les particules se passent à travers : pas possible

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

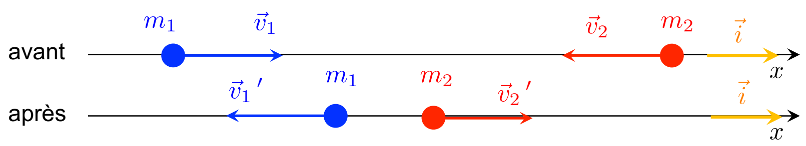
Exemples de collisions 1D :

Chocs élastiques : utilisation du référentiel du centre de masse

Dans $\mathcal{R}^*$ $\quad Ec*' = Ec* \Leftrightarrow Ec^* = \frac{1}{2}\mu v^2$

2 possibilités : $v = v'$ ou $v = -v'$

$\bullet v = -v' \Rightarrow v_1'^* = -v_1^*$ et $v_2'^* = -v_2^*$

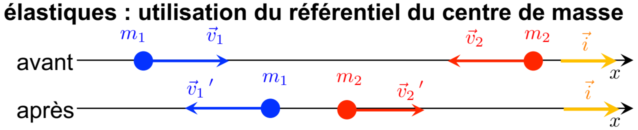


Dans le référentiel du centre de masse une collision 1D retourne les vitesse sans changer leurs normes

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Exemples de collisions 1D :

Chocs élastiques : utilisation du référentiel du centre de masse



$$v_1'^* = -v_1^* \text{ et } v_2'^* = -v_2^*$$

$$\begin{cases} v_1'\,^* = -\dfrac{\mu}{m_1}v' \\ v_2'\,^* = +\dfrac{\mu}{m_2}v' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1'\,^* = -\dfrac{\mu}{m_1}(-v) \\ v_2'\,^* = +\dfrac{\mu}{m_2}(-v') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1'\,^* = +\dfrac{m_2}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) \\ v_2'\,^* = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) \end{cases}$$

Composition des vitesses (Changement de référentiel)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1' = +\dfrac{m_2}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) + v_G \\ \\ v_2' = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) + v_G \end{cases}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Exemples de collisions 1D : Chocs élastiques

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1' = +\dfrac{m_2}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) + v_G \\[2ex] v_2' = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) + v_G \end{cases} \quad \text{où } v_G = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}v_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1' = +\dfrac{m_2}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) + \dfrac{m_1}{m_1+m_2}v_1 + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}v_2 \\[2ex] v_2' = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) + \dfrac{m_1}{m_1+m_2}v_1 + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}v_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1' = -\dfrac{m_2}{m_1+m_2}v_1 + \dfrac{m_1}{m_1+m_2}v_1 + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}v_2 \dfrac{m_2}{m_1+m_2}v_2 \\[2ex] v_2' = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}v_2 + \dfrac{m_2}{m_1+m_2}v_2 + \dfrac{m_1}{m_1+m_2}v_1 + \dfrac{m_1}{m_1+m_2}v_1 \end{cases}$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Exemples de collisions 1D : Chocs élastiques

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1' = +\dfrac{m_2}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) + v_G \\[2ex] v_2' = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}(v_2 - v_1) + v_G \end{cases} \quad \text{où } v_G = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}v_2$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} v_1' = +\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 + \dfrac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 \\[2ex] v_2' = -\dfrac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2 + \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 \end{cases}}$$

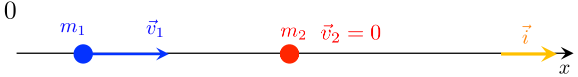
CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Exemples de collisions 1D : Chocs élastiques

Remarques :

- Si $v_2 = 0$

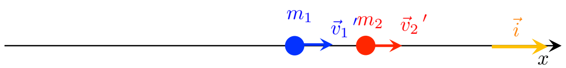
avant



$$\Rightarrow \begin{cases} v_1' = +\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 + \cancel{\dfrac{2m_2}{m_1+m_2}v_2} \\[2ex] v_2' = -\cancel{\dfrac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2} + \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} v_1' = +\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 \\[2ex] v_2' = +\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 \end{cases}$$

$m_1 > m_2$ $\quad v_1'$ est du même signe que v_1

$m_1 > m_2$



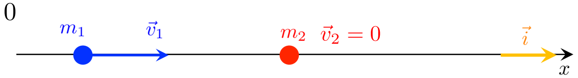
CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Exemples de collisions 1D : Chocs élastiques

Remarques :

- Si $v_2 = 0$

avant



$$\Rightarrow \begin{cases} v_1' = +\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 + \cancel{\dfrac{2m_2}{m_1+m_2}v_2} \\[2ex] v_2' = -\cancel{\dfrac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2} + \dfrac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} v_1' = +\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 \\[2ex] v_2' = +\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 \end{cases}$$

$m_2 > m_1$ alors la vitesse après choc de m_1 est l'opposée de sa vitesse avant choc
S_2 est immobile donc S_1 rebondit sur S_2.

$m_2 > m_1$

$m_2 >> m_1$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

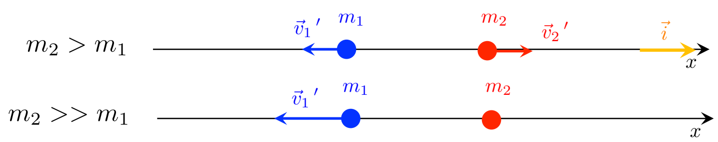
Exemples de collisions 1D : Chocs élastiques

Remarques :

- Si $v_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1' = +\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \cancel{\dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2} \\ v_2' = -\cancel{\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2} + \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} v_1' = -v_1 \\ v_2' = 0 \end{cases}$$

$m_2 > m_1$ alors la vitesse après choc de m_1 est l'opposée de sa vitesse avant choc S_2 est immobile donc S_1 rebondit sur S_2.



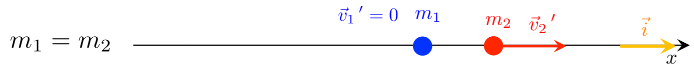
CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Exemples de collisions 1D : Chocs élastiques

Remarques :

- Si $v_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1' = +\cancel{\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}} v_1 + \cancel{\dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2} \\ v_2' = -\cancel{\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2} + \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} v_1' = 0 \\ v_2' = v_1 \end{cases}$$

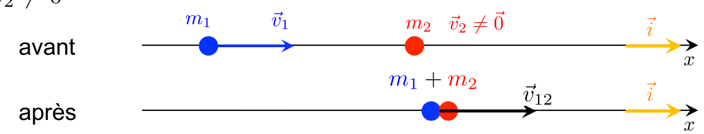


CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Exemples de collisions 1D :

Chocs mous : $E'c^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1{}' = \vec{v}_2{}' = \vec{v}_G$

$\vec{v}_2 \neq \vec{0}$



$\vec{v}_{12}$ vitesse après le choc

La conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{12}$$

$$\Leftrightarrow v_{12} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

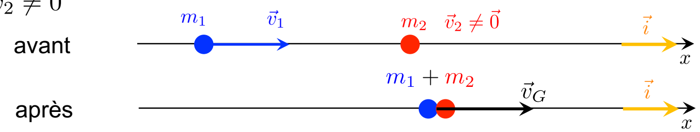
$$\Leftrightarrow v_{12} = v_G$$

CHAPITRE V : SYSTÈMES À 2 CORPS

Exemples de collisions 1D :

Chocs mous : $E'c^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1{}' = \vec{v}_2{}' = \vec{v}_G$

$\vec{v}_2 \neq \vec{0}$



Variation d'énergie cinétique :

On pourrait faire ca $\Delta Ec = Ec' - Ec = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{12}^2 - \left(\dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \dfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \right)$

$\vec{v}_{12}$ vitesse après le choc

Théorème de Koenig $\quad Ec = Ec^* + K_G \quad Ec^* = \dfrac{1}{2}\mu v^2 \quad E'c^* = 0 \quad E'c = K_G$

$$\Delta Ec = Ec' - Ec = -Ec^* = -\frac{1}{2}\mu v^2$$