

ÉLÉMENTS DE THERMODYNAMIQUE ET THERMIQUE

II - Thermique

Frédéric Doumenc

Version 1.2



Table des matières

Bibliographie.....	3
A – Généralités : modes de propagation de la chaleur.....	4
A-I – Conduction.....	4
A-II – Convection.....	5
II-1 Définition et classification.....	5
II-2 Échanges convectifs entre un fluide et une paroi solide.....	6
A-III – Rayonnement.....	7
III-1 Définitions.....	7
III-2 Flux radiatif entre surfaces opaques séparées par un milieu transparent.....	8
B – Conduction thermique.....	9
B-I – Équation de la chaleur.....	9
I-1 Application du 1er principe à un système incompressible.....	9
I-2 Système à température quasi-uniforme.....	10
I-3 Équilibre thermodynamique local : équation de la chaleur.....	12
I-4 Régime stationnaire.....	15
a) <i>Equation de la chaleur en régime stationnaire.....</i>	<i>15</i>
b) <i>Remarque sur la conservation du flux thermique.....</i>	<i>17</i>
B-II – Étude du régime stationnaire monodimensionnel.....	17
II-1 Résolution des principaux problèmes stationnaires 1D.....	17
a) <i>Géométrie plane.....</i>	<i>17</i>
b) <i>Géométrie cylindrique.....</i>	<i>18</i>
c) <i>Géométrie sphérique.....</i>	<i>20</i>
II-2 Résistance thermique.....	20
a) <i>Définition.....</i>	<i>20</i>
b) <i>Extensions de la notion de résistance thermique.....</i>	<i>22</i>

La suite de ce cours fait partie du module optionnel de **Thermique Appliquée** de L3 (LA3MD). Elle est disponible à l'adresse :

http://www.fast.u-psud.fr/~doumenc/la3md/cours/CoursThermique_L3.pdf

Bibliographie

Introduction to Heat Transfer – **Frank P. Incropera** et **David P. De Witt**, éd. John Wiley & sons, 1990.

Initiation aux transferts thermiques - **Jean-François Sacadura** (coordonnateur), éd. Lavoisier, Paris 1993, 446 pages.

Transferts thermiques – **Jean Taine** et **Jean-Pierre Petit**, éd. Dunod, Paris 1995, 422 pages.

La transmission de la chaleur – vol.1, tome 1: Généralités – La conduction – **André B. De Vriendt**, éd. Gaëtan Morin, 1982.

A – Généralités : modes de propagation de la chaleur.

Dans le cours de thermodynamique, la complexité résultant du couplage entre phénomènes mécaniques et thermiques nous a amené à faire des hypothèses très simplificatrices sur les transferts de chaleur. En général, nous avons supposé qu'une paroi était soit diatherme (parfaitement conductrice), soit adiabatique (parfaitement isolante). Dans ce chapitre, nous allons essayer d'aller plus loin dans l'étude des transferts de chaleur, qui est l'objet de la thermique, mais en se restreignant à des systèmes incompressibles, ou à des situations dans lesquelles les changements de volume sont négligeables. Après un aperçu des différents modes de propagation de la chaleur (que l'on classe habituellement en conduction, convection et rayonnement), on détaillera la conduction en régime stationnaire.

A-I – Conduction.

Le transfert de chaleur par **conduction** correspond à un transfert d'énergie interne dû aux interactions entre les particules qui constituent le système thermodynamique (exemple : chocs de molécules dans les gaz, vibrations dans les solides cristallins, etc). Il est présent dans tous les corps, quel que soit leur état (solide, liquide ou gaz). On peut faire directement l'expérience de ce mode de transfert en tenant à la main un barreau métallique, et en mettant l'autre extrémité au contact d'une flamme. Au bout d'un certain temps, on est obligé de lâcher le barreau, pour éviter de se brûler.

L'expérience du barreau suggère que le flux de chaleur qui se propage par conduction dans la matière est lié aux variations spatiales de température. Joseph Fourier a trouvé expérimentalement, en 1822, la relation entre la densité de flux de chaleur et le champ de température (loi de Fourier) :

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad } T$$

T : température (K) ;

λ : conductivité thermique ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) ;

\vec{q} : vecteur densité de flux thermique ($\|\vec{q}\|$ s'exprime en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$).

Le flux de chaleur \dot{Q} à travers une surface S s'obtient par intégration : $\dot{Q} = \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS$

Le flux de chaleur est donc nul si le champ de température est uniforme (le système est alors dans un état d'équilibre thermique), et augmente avec les variations spatiales de température. Par ailleurs, à gradient de température fixé, le flux est d'autant plus grand que la conductivité thermique λ est élevée. Cette dernière est une caractéristique du corps considéré, de l'état dans lequel il se trouve, et pour un corps et une phase donnés, elle dépend généralement de la température (dans le cas des gaz, elle dépend aussi de la pression). Le tableau suivant donne quelques valeurs de conductivité thermique. Les corps dont la conductivité à la température ambiante est de l'ordre de $0,1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, ou inférieure à cette valeur, peuvent être considérés comme des isolants thermiques. C'est le cas des gaz, généralement mauvais conducteurs de la chaleur. En ce qui concerne les solides, on notera que les bons conducteurs électriques (les métaux tels que le fer ou le cuivre) font aussi de bons conducteurs thermiques.

	Air	Laine de verre	Bois	Verre	Béton plein	Acier doux	Cuivre
λ (W.m ⁻¹ .K ⁻¹)	0,026	0,04	0,23	1,1	1,75	50	380

Tableau I-1 : conductivité thermique de quelques corps, à la température ambiante.

A-II – Convection.

II-1 Définition et classification.

Ce mode de transfert est spécifique aux fluides. En plus du transfert de chaleur par conduction toujours présent dans la matière, il y a dans les fluides un transfert de chaleur provoqué par l'écoulement du fluide, c'est à dire par le mouvement d'ensemble des particules qui le composent. Ce phénomène est appelé **advection** : une masse de fluide qui se déplace transporte avec elle son énergie interne. On peut donc définir la **convection** comme la réunion de deux modes de transfert de chaleur : la conduction, qui s'effectue à l'échelle microscopique, et l'advection, qui est de nature macroscopique. On classe généralement la convection en trois catégories : la convection naturelle, la convection forcée, et la convection mixte.

La convection naturelle

Il y a convection naturelle lorsque le mouvement du fluide est uniquement dû à la poussée d'Archimède induite par les variations de masse volumique au sein du fluide, lesquelles sont la conséquence des variations spatiales de température. L'air chaud, plus léger, tend alors à monter, alors que l'air froid descend. Ce mécanisme se produit dans des situations très diverses : il est responsable de l'homogénéisation de la température dans une pièce d'habitation (transfert de chaleur du radiateur vers les parties froides de la pièce), mais également des courants marins ainsi que de la circulation générale de l'atmosphère terrestre.

La convection forcée

Dans la convection forcée, le fluide doit son mouvement à une cause extérieure (pompe, ventilateur, agitateur, etc.). En convection forcée proprement dite, la poussée d'Archimède est négligeable devant les forces servant à mettre le fluide en mouvement. C'est le cas, par exemple, du refroidissement des moteurs à combustion interne : la pompe à eau pousse le liquide de refroidissement à travers le moteur, puis dans l'échangeur.

La convection mixte

Il existe, comme précédemment, une cause externe au mouvement du fluide, mais insuffisante pour que la poussée d'Archimède puisse être négligée (régime de transition entre la convection libre et la convection forcée). C'est le cas des transferts de chaleur dans un habitacle d'automobile : l'air est soufflé dans l'habitacle par un ventilateur, mais la poussée d'Archimède n'est pas pour autant négligeable, surtout lorsqu'on se place loin des entrées d'air.

II-2 Échanges convectifs entre un fluide et une paroi solide.

Dans les applications, on a la plupart du temps besoin de connaître le flux échangé entre un fluide et une paroi solide (transfert de chaleur des parois du moteur vers le liquide de refroidissement, refroidissement d'un microprocesseur d'ordinateur,...). L'interface entre le fluide et le solide, laquelle est traversée par le flux de chaleur, est appelée **surface d'échange**. Dans tous les problèmes que nous traiterons cette année, nous admettrons que la densité de flux échangée entre une paroi à la température T_p est un fluide à la température T_f est donnée par la loi de Newton :

$$q = h_c (T_p - T_f)$$

Dans cette relation, h_c est le **coefficient d'échange thermique convectif** : c'est le flux de chaleur transféré entre la paroi et le fluide, par unité de surface, et par unité d'écart de température entre la surface et le fluide (h_c s'exprime en Watt par mètre carré et par Kelvin, $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$). Le flux de chaleur sur l'ensemble de la surface d'échange S s'obtient par intégration :

$$\dot{Q} = \iint_S q \, dS = \iint_S h_c (T_p - T_f) \, dS$$

Si le coefficient d'échange et la température de paroi sont uniformes sur toute la surface d'échange, il vient :

$$\dot{Q} = h_c S (T_p - T_f)$$

Remarque : Un coefficient d'échange thermique élevé signifie un « bon » transfert de chaleur entre la paroi et le fluide. Il est alors possible de transférer un flux de chaleur important, avec une petite surface d'échange, et un faible écart de température.

Enfin, notons que le coefficient d'échange h_c peut dépendre d'un grand nombre de paramètres : la géométrie, les propriétés du fluide (conductivité, chaleur spécifique, viscosité), la température, la vitesse du fluide, etc. Sa valeur peut dans certains cas s'obtenir analytiquement, par résolution des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Mais dans beaucoup de cas, l'analyse devient extrêmement ardue, voire impossible. On a alors recours à des relations empiriques, c'est-à-dire fondées sur l'expérience.

Dans tous les problèmes que nous traiterons cette année, nous supposons le coefficient d'échange connu a priori, tout en ayant à l'esprit que, dans les applications, c'est généralement la détermination de h_c qui constitue le problème le plus difficile. Le tableau II-1 donne l'ordre de grandeur de h_c , dans différentes situations.

Convection naturelle	gaz	2 - 25
	liquides	50 - 1000
Convection forcée	gaz	25 - 250
	liquides	50 - 20 000
Convection avec changement de phase ⁽¹⁾		2500 - 100 000

Tableau II-1 : ordre de grandeur du coefficient d'échange thermique convectif h_c (en $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$).

(1) Condensation ou ébullition sur la surface d'échange.

A-III – Rayonnement.

III-1 Définitions.

Dans une certaine gamme de longueurs d'ondes, l'émission d'une onde électromagnétique s'accompagne d'une baisse de l'énergie interne du système, alors que l'absorption provoque une augmentation de cette dernière. On parle alors d'échanges de chaleur par rayonnement thermique, ou de transferts radiatifs. En effet, lorsque deux surfaces sont mises en regard, et séparées par un milieu transparent (le vide ou de l'air), chacune émet un flux radiatif, dont une partie est absorbée par l'autre. Le flux émis étant proportionnel à la puissance 4 de la température absolue, la surface à température la plus élevée émet plus d'énergie qu'elle n'en absorbe, alors que c'est l'inverse pour la surface froide. Il y a par ce moyen transfert de chaleur de la surface chaude vers la surface froide.

Le spectre du rayonnement thermique s'étend de $0,1 \mu\text{m}$ à $100 \mu\text{m}$ (cf. figure III-1). Il inclut donc la lumière visible (entre $0,4$ et $0,8 \mu\text{m}$), en deçà l'ultraviolet (entre $0,1$ et $0,4 \mu\text{m}$), et au-delà l'infrarouge (entre $0,8$ et $100 \mu\text{m}$). La gamme de longueurs d'ondes dans laquelle un corps donné rayonne dépend de sa température. Plus elle est élevée, plus la longueur d'onde est courte. Un objet à 300 K rayonne dans la gamme allant de 5 à $50 \mu\text{m}$, c'est à dire dans l'infrarouge. Lorsque l'on chauffe un métal, il devient rouge vers 800 K : c'est donc à cette température qu'il commence à émettre dans le spectre visible. Le rouge apparaît en premier, car c'est la longueur d'onde visible la plus élevée ($0,8 \mu\text{m}$). Si l'on augmente la température au-delà de 800 K , les autres longueurs d'ondes sont sollicitées, et leur mélange produit une lumière orange, puis blanche si la température est suffisamment élevée (principe de l'ampoule d'éclairage à filament). Le soleil, dont la température de surface est de l'ordre de 5800 K , émet principalement dans un spectre compris entre $0,2$ et 3 microns, qui comprend donc l'ultraviolet, la lumière visible, et l'infrarouge.

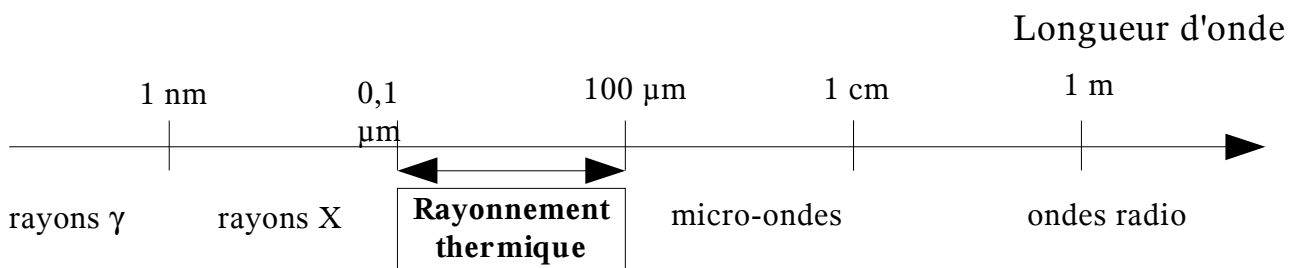


Figure III-1 : spectre des ondes électromagnétiques.

Alors que la convection peut être vue comme de la conduction dans un fluide en écoulement, le rayonnement thermique obéit à des lois physiques radicalement différentes. En particulier, c'est le seul mode de transfert de la chaleur qui traverse le vide (c'est d'ailleurs par ce moyen que le soleil nous communique sa chaleur). Une autre différence réside dans le fait qu'une onde électromagnétique voyage à la vitesse de la lumière, ce qui rend le transfert quasiment instantané, dans la plupart des situations classiques (lorsque l'on ouvre la porte d'un four, on ressent immédiatement une sensation de chaleur sur le visage).

Du point de vue du rayonnement thermique, on peut distinguer trois catégories de milieux.

- Les **milieux transparents** : ils n'absorbent pas de rayonnement thermique, et n'en émettent pas non plus. En toute rigueur, seul le vide est réellement transparent. L'air, sur des distances modérées, peut généralement être considéré comme transparent.

- Les **milieux opaques** : l'absorption ou l'émission s'effectuent sur une épaisseur suffisamment faible pour que l'on puisse la supposer nulle. On considère alors que les phénomènes radiatifs n'ont lieu qu'à la surface du système, et non à l'intérieur. C'est le cas des métaux.

- Les **milieux semi-transparents** : c'est le cas intermédiaire entre les deux précédents. Un corps semi-transparent absorbe une partie du rayonnement thermique qu'il reçoit, et laisse passer l'autre partie. Absorption et émission sont ici des phénomènes volumiques, et non plus surfaciques (ils se produisent à l'intérieur même du système). C'est de loin le cas le plus complexe. On peut citer comme exemple de tels milieux le verre ou les atmosphères de combustion.

III-2 Flux radiatif entre surfaces opaques séparées par un milieu transparent.

Nous nous bornerons dans cette introduction à évoquer le cas d'un petit corps opaque Σ , convexe, situé dans une enceinte de grandes dimensions, et séparé de celle-ci par un milieu transparent. Dans ce cas, on admettra que le flux net radiatif échangé entre le petit corps et l'enceinte s'écrit :

$$\dot{Q}_{rad} = \epsilon \sigma S (T_s^4 - T_e^4) \quad (\text{Eq.III-1})$$

La démonstration de cette relation sortirait du cadre de ce cours. S est la surface du petit corps, T_s sa température (supposée uniforme sur toute la surface S) et T_e la température de l'enceinte. La grandeur sans dimension ϵ est appelée émissivité de la surface. Elle est comprise entre 0 et 1, et caractérise la « capacité » de la surface à émettre du rayonnement thermique. σ est la constante de Stefan, qui vaut $5,670.10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$.

Lorsque la différence de température entre l'objet et l'enceinte est faible (inférieure à 100 K), on peut linéariser la relation III-1, en faisant l'approximation :

$$T_s^4 - T_e^4 = (T_s^2 + T_e^2)(T_s + T_e)(T_s - T_e) \simeq 4T_m^3(T_s - T_e) \quad \text{avec} \quad T_m = \frac{T_s + T_e}{2} \simeq T_s \simeq T_e$$

Il est alors possible d'exprimer le flux radiatif à partir d'un coefficient d'échange radiatif h_r :

$$\dot{Q}_{rad} \simeq h_r S (T_s - T_e) \quad \text{avec} \quad h_r = 4\epsilon\sigma T_m^3$$

Si par ailleurs la température de la paroi de l'enceinte est la même que celle du fluide entre le corps et l'enceinte, le flux de chaleur total échangé entre le corps Σ et le milieu extérieur, somme du flux convectif et du flux radiatif, peut s'exprimer à partir d'un coefficient d'échange thermique global h_g :

$$\dot{Q}_{tot} = \dot{Q}_{conv} + \dot{Q}_{rad} = h_g S (T_s - T_e) \quad \text{avec} \quad h_g = h_c + h_r$$

Dans le cadre de ce cours, nous supposerons implicitement qu'il est toujours possible de définir un coefficient d'échange global, qui prend en compte à la fois les échanges convectifs et les échanges radiatifs.

B – Conduction thermique.

B-I – Équation de la chaleur.

I-1 Application du 1^{er} principe à un système incompressible.

Considérons un système incompressible, indéformable et immobile Σ . Ce système échange avec le milieu extérieur, au cours d'un temps dt , la chaleur δQ et le travail utile (c'est à dire non mécanique) δW_u . Il est évident qu'il ne peut pas y avoir ici de travail mécanique, puisque le système considéré est indéformable. Par ailleurs, la variation d'énergie totale de Σ au cours de l'intervalle de temps dt se réduit à sa variation d'énergie interne, puisqu'il n'y a pas de variation d'énergie mécanique. Dans ces conditions, le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$dU = \delta Q + \delta W_u \quad (\text{Eq.I-1})$$

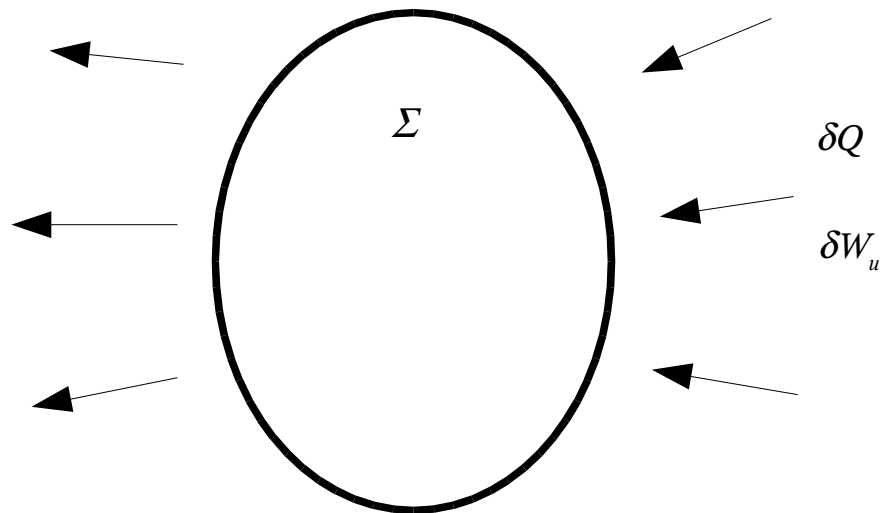


Figure I-1 : système Σ échangeant la chaleur δQ et le travail δW_u avec l'extérieur.

Remarque 1 : la plupart du temps, le travail non mécanique W_u correspond à un travail électrique, lorsque le système Σ est traversé par un courant électrique (câble d'alimentation électrique, fusible,...).

Remarque 2 : compte-tenu des hypothèses retenues, le système Σ peut-être constitué d'un solide, ou d'un fluide au repos pour lequel on peut négliger les effets de dilatation thermique. C'est généralement vrai pour les liquides. Pour les gaz, il faut faire plus attention.

Nous allons voir dans la suite comment cette équation peut permettre de déterminer le champ de température dans le système Σ .

I-2 Système à température quasi-uniforme.

La transformation décrite ci-dessus est nécessairement irréversible. En effet, nous avons vu au chapitre A-I-4-b du cours de thermodynamique qu'un système parcouru par des flux d'énergie était nécessairement hors d'équilibre. C'est le cas du système Σ , traversé par un flux de chaleur (conduction thermique), et éventuellement par des charges électriques (si le travail électrique est non nul). En conséquence, la température de Σ , en toute rigueur, n'est pas définie.

Il y a toutefois des cas pour lesquels les variations spatiales de température à l'intérieur du système Σ restent faibles, suffisamment pour être négligées. Cette hypothèse est valable si les flux échangés avec l'extérieur sont faibles, si le système Σ est de petite taille, et enfin si sa conductivité thermique est élevée (en effet, en vertu de la loi de Fourier, pour une densité de flux donnée, le gradient de température est d'autant plus faible que la conductivité est grande). On parlera alors de **système à température quasi-uniforme**. Avec cette approximation, on peut définir une température T pour le système Σ , et sa variation d'énergie interne pendant un intervalle de temps élémentaire dt s'écrit alors :

$$dU = m c dT$$

avec m masse du système Σ et c sa capacité calorifique massique. Si par ailleurs on suppose que le système Σ est immergé dans un fluide à la température T_f , le flux de chaleur reçu par Σ durant l'intervalle de temps dt s'écrit :

$$\delta Q = h S (T_f - T) dt$$

avec S surface d'échange de Σ . En injectant les expressions de dU et de δQ ci-dessus dans la relation I-1, on obtient une équation différentielle du 1^{er} ordre, dont la résolution nous donnera l'évolution temporelle de la température du système Σ :

$$m c \frac{dT}{dt} = h S (T_f - T) + \dot{W}_u$$

On pose habituellement $\tau = \frac{m c}{h S}$ et l'équation différentielle s'écrit donc :

$$\tau \frac{dT}{dt} = (T_f - T) + \frac{\dot{W}_u}{h S} \quad (\text{Eq.I-2})$$

On peut vérifier que le paramètre τ est homogène à un temps : c'est la **constante de temps**, ou **temps caractéristique** du système Σ . Si l'évolution de Σ tend vers un régime stationnaire, celui-ci sera atteint au bout d'un temps de l'ordre de grandeur de τ .

Remarque : la résolution de l'équation I-2, équation différentielle du 1^{er} ordre en $T(t)$, nécessite évidemment la connaissance de la condition initiale, c'est à dire de la température à l'instant $t=0$.

Validité du modèle du système à température quasi-uniforme.

Le modèle qui vient d'être décrit n'est valable que si l'on peut négliger les variations spatiales de température à l'intérieur du système Σ . Introduisons le nombre de Biot, nombre sans dimension qui, outre le coefficient d'échange h , fait intervenir la taille caractéristique L du système et sa conductivité thermique λ :

$$Bi = \frac{h L}{\lambda}$$

Dans le cas (fréquent) où le travail utile est nul, on admettra que l'approximation qui consiste à négliger les variations spatiales de température est valide si l'on vérifie :

$$\boxed{Bi \ll 1} \quad (\text{Eq.I-3})$$

Sur un plan strictement qualitatif, on voit que cette condition est compatible avec l'intuition, puisqu'elle est vérifiée pour des faibles flux (donc des petits coefficients d'échange), un système de peu d'étendue, et bon conducteur thermique. Le sens physique du nombre de Biot sera précisé au paragraphe B-II-2-b sur les résistances thermiques.

Remarque : le choix de la taille caractéristique L mérite un commentaire. Il s'agit d'un indicateur de la taille du système, en terme d'ordre de grandeur. Généralement, on prend pour L la distance entre le point le plus froid et le point le plus chaud. Pour un cylindre ou une sphère immergés dans un fluide, on prendra donc le rayon comme valeur de L . Certains auteurs préconisent quant à eux de prendre comme taille caractéristique le rapport du volume du système Σ sur sa surface d'échange ($L=V/S$). Dans ce cas, on prendra le demi-rayon d'un cylindre, ou le tiers du rayon d'une sphère. Il est important de comprendre que faire l'un ou l'autre choix pour L est parfaitement indifférent, puisque la relation II-2 ne fait intervenir que l'ordre de grandeur du nombre de Biot.

Exemple I-1 : temps de réponse d'un thermocouple.

Le thermocouple fait partie des capteurs de température les plus utilisés. Il est constitué de deux fils métalliques soudés à leurs extrémités. On forme ainsi une pile, dont la force électromotrice dépend de la température des deux soudures. Connaissant la température d'une des soudures et la fem débitée par la boucle thermoélectrique, il est alors possible de déterminer la température de la deuxième soudure. Supposons que cette soudure, initialement à la température T_0 , soit immergée à l'instant $t=0$ dans un fluide à la température T_f (cf. figure I-2). Au bout de combien de temps peut-on assimiler la température de la soudure à celle du fluide ?

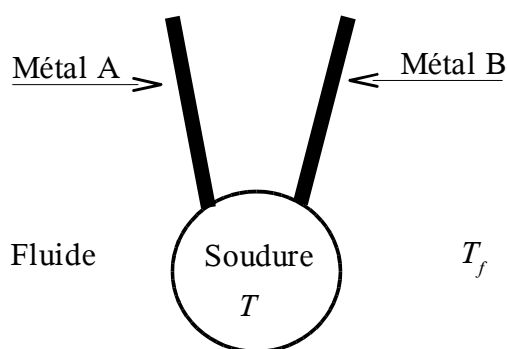


Figure I-2 : soudure de thermocouple immergée dans un fluide

Données :

- diamètre de la soudure (supposée sphérique) : $D=100 \mu\text{m}$
- masse volumique de la soudure : $\rho=8000 \text{ kg.m}^{-3}$
- capacité calorifique massique de la soudure : $c=1000 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- conductivité thermique de la soudure : $\lambda=100 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- coefficient d'échange global : $h=100 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$

Solution

Prenons comme système la soudure, sans les fils qui s'y rattachent. On néglige les transferts de chaleur par conduction dans les fils (supposés de petit diamètre), et le travail électrique apporté au système (la fem débitée par le thermocouple est de l'ordre du millivolt ; de plus, on insère un voltmètre dans la boucle thermoélectrique, ce qui rend l'intensité électrique dans le circuit vraiment très faible). Commençons par vérifier si les variations spatiales du champ de température peuvent se négliger. Le nombre de Biot vaut :

$$Bi = \frac{h D / 2}{\lambda} = 100 \cdot 50 \cdot 10^{-6} / 100 = 5 \cdot 10^{-5} \ll 1$$

L'approximation du système à température quasi-uniforme est donc valable. Le travail électrique étant négligeable, l'équation I-2 s'écrit :

$$\tau \frac{dT}{dt} = (T_f - T) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{\rho V c}{h S} = \frac{\rho D c}{6 h} = \frac{8000 \cdot 10^{-4} \cdot 1000}{6 \cdot 100} = 1,3 \text{ s}$$

La résolution de l'équation différentielle ci-dessus nous donne l'évolution temporelle de la température du thermocouple :

$$T(t) = (T_0 - T_f) \exp(-t/\tau) + T_f$$

Le temps de réponse à 99% d'un thermocouple est par définition le temps t_r tel que la variation de température de la soudure est égal à 99% de sa variation en régime stationnaire :

$$\frac{T(t_r) - T_0}{T_f - T_0} = 0,99$$

Au-delà de ce temps, on peut supposer que la température donnée par le capteur est celle du fluide. En utilisant l'expression trouvée pour $T(t)$ et la définition du temps de réponse, il vient :

$$\frac{T(t_r) - T_0}{T_f - T_0} = 1 - \exp(-t_r/\tau) = 0,99 \Rightarrow \boxed{t_r = -\ln(0,01)\tau \approx 4,6 \tau}$$

L'application numérique donne : $t_r \approx 6,0 \text{ s}$. On pourra donc assimiler la température du capteur à celle de fluide au bout de 6 s environ.

I-3 Équilibre thermodynamique local : équation de la chaleur.

Examinons à présent la cas où le flux thermique qui traverse le système Σ est suffisamment élevé pour générer des gradients de température non négligeables (cf. exemple I-4 du paragraphe A-I-4 du cours de thermodynamique). La température du système Σ n'étant plus définie, il faut changer de système ; on considère à présent un parallélépipède élémentaire inclut dans Σ , de volume dV , de cotés dx , dy et dz , suffisamment petit pour que les variations de température à l'intérieur de dV

soient négligeables, mais suffisamment grand pour contenir un grand nombre de particules (atomes, molécules,..)¹. C'est ce que l'on appelle l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local (cf. figure I-3). On applique à présent le 1^{er} principe de la thermodynamique non plus au système Σ , mais au système dV . L'équation I-1 appliquée à une transformation élémentaire au cours de laquelle la température de dV a varié de dT au cours d'un intervalle de temps dt s'écrit alors :

$$\rho dV c dT = \left(\sum_{i=1}^6 \dot{Q}_i + \omega dV \right) dt \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{dV} \sum_{i=1}^6 \dot{Q}_i + \omega \quad (\text{Eq.I-4})$$

Avec les notations suivantes :

ρ : masse volumique

c : capacité calorifique massique

$\sum_{i=1}^6 \dot{Q}_i$: somme des flux entrant dans le parallélépipède dV au travers de ses six faces.

$\omega = \frac{d\dot{W}_u}{dV}$ puissance volumique cédée à dV du fait des actions non mécaniques.

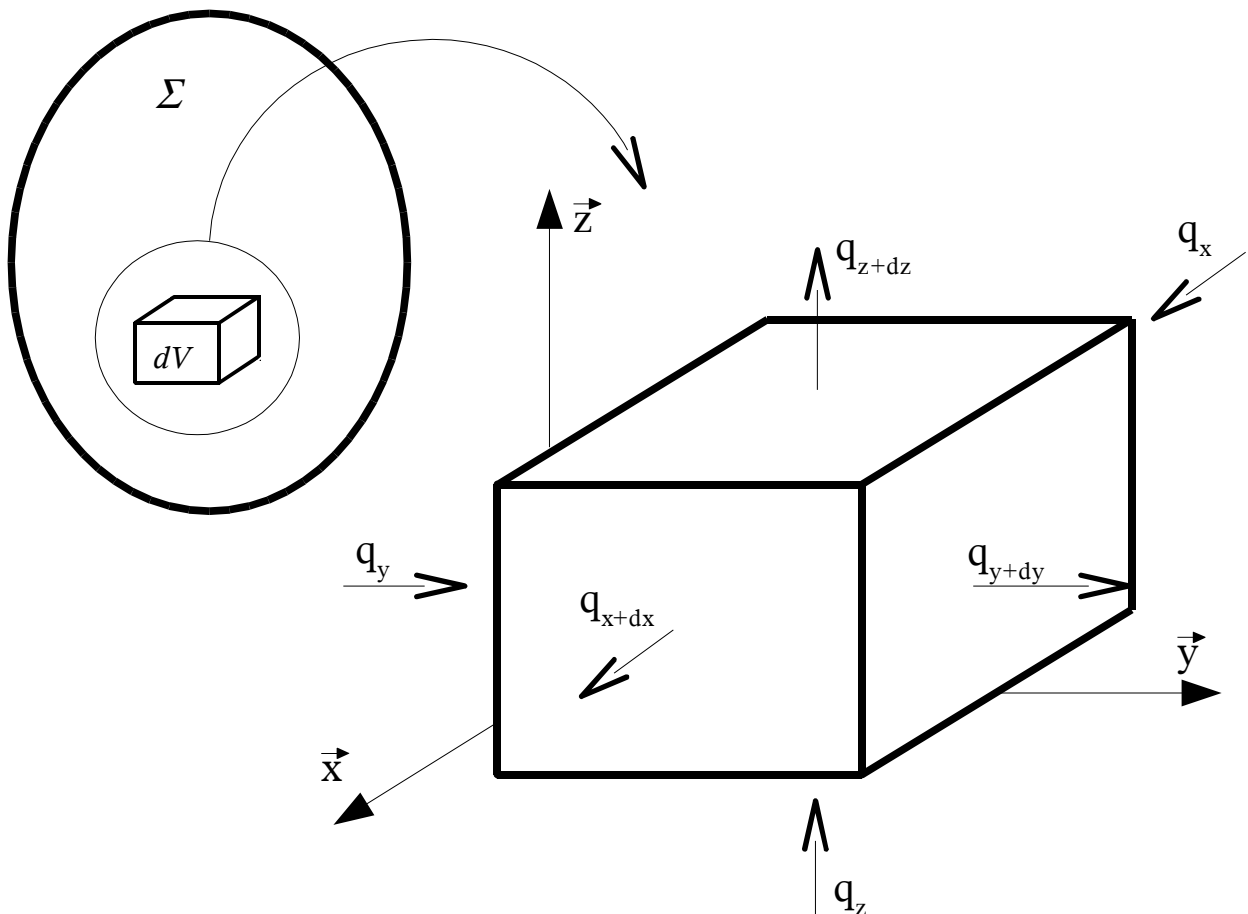


Figure I-3 : équilibre thermodynamique local et volume de contrôle.

1 Condition nécessaire à la définition de variables d'état, cf. Thermodynamique A-I-1.

Il faut à présent calculer la somme des flux qui entrent dans le volume de contrôle. Le parallélépipède dV possède deux faces orthogonales à l'axe \vec{x} , l'une située à l'abscisse x , et l'autre à l'abscisse $x+dx$. On appellera q_x la projection sur l'axe \vec{x} du vecteur densité de flux à travers la face située à l'abscisse x . De même, q_{x+dx} sera la projection sur l'axe \vec{x} du vecteur densité de flux à travers la face située à l'abscisse $x+dx$. En suivant la même logique pour les quatre autres faces, on définira de même les densités de flux q_y , q_{y+dy} , q_z et q_{z+dz} . La somme de tous les flux de chaleur entrant dans le système dV s'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^6 \dot{Q}_i = q_x dy dz - q_{x+dx} dy dz + q_y dx dz - q_{y+dy} dx dz + q_z dx dy - q_{z+dz} dx dy$$

En divisant les deux membres par $dV=dx dy dz$, il vient :

$$\frac{1}{dV} \sum_{i=1}^6 \dot{Q}_i = - \left[\frac{(q_{x+dx} - q_x)}{dx} + \frac{(q_{y+dy} - q_y)}{dy} + \frac{(q_{z+dz} - q_z)}{dz} \right] = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right)$$

On reconnaît dans cette dernière expression la divergence du vecteur densité de flux. En effet :

$$\text{div}(\vec{q}) = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$$

Et on obtient finalement :

$$\frac{1}{dV} \sum_{i=1}^6 \dot{Q}_i = -\text{div}(\vec{q}) \quad (\text{Eq.I-5})$$

La divergence du vecteur densité de flux est donc, au signe près, la somme algébrique des flux thermiques qui entrent dans un élément de volume dV , ramenée à cet élément de volume. Une divergence nulle indique une somme algébrique nulle : les flux qui entrent dans l'élément de volume sont exactement compensés par ceux qui en sortent.

Si l'on porte la relation I-5 dans l'équation I-4, il vient :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}(\vec{q}) + \omega \quad (\text{Eq.I-6})$$

En reliant le vecteur densité de flux thermique au champ de température par la loi de Fourier, on obtient enfin l'équation de la chaleur :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \vec{\text{grad}} T) + \omega$$

En coordonnées cartésiennes, cette équation s'écrit :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \omega(x, y, z, t)$$

On voit que l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles. Sa résolution donne le champ de température dans le système Σ en fonction des variables d'espace x, y, z et du temps t . Pour cela, il faut toutefois connaître deux choses :

- la condition initiale, c'est à dire le champ de température à l'instant initial ;
- les conditions aux limites, c'est à dire des informations sur les transferts de chaleur à la frontière du système Σ . Ces informations peuvent être de trois types : la température, la densité de flux, ou une relation entre la température et la densité de flux.

Enfin, l'équation de la chaleur se simplifie si la conductivité thermique peut être supposée constante. Dans ce cas, on obtient :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega}{\rho c} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$$

La grandeur α est la diffusivité thermique du système. Elle s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Par ailleurs, on reconnaît dans le membre de droite de l'équation de la chaleur le laplacien du champ de température, que l'on notera ΔT . Lorsque la conductivité thermique est constante, l'équation de la chaleur s'écrit donc :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T + \frac{\omega}{\rho c}} \quad (\text{Eq.I-7})$$

La résolution de l'équation de la chaleur n'est généralement pas chose facile. Dans certains cas (géométrie complexe, capacité calorifique ou conductivité thermique fonctions de la température,...), on a recours aux méthodes numériques (différences finies, éléments finis).

I-4 Régime stationnaire.

a) Equation de la chaleur en régime stationnaire.

Un système thermique est dit en régime stationnaire lorsque son champ de température ne dépend plus du temps. C'est un cas d'une grande importance pratique, car il introduit une simplification considérable dans l'équation de la conduction thermique, tout en permettant de traiter bon nombre d'applications (détermination de la puissance de chauffage d'une habitation, d'un four, températures maximums atteintes dans un moteur d'automobile,...).

En régime stationnaire, en supposant la conductivité constante, l'équation de la chaleur se réduit à l'équation de Poisson :

$$\boxed{\Delta T + \frac{\omega}{\lambda} = 0}$$

Si de plus le travail échangé est nul (c'est à dire si les transferts d'énergie se réduisent aux transferts de chaleur), on obtient l'équation de Laplace :

$$\boxed{\Delta T = 0} \quad (\text{Eq.I-8})$$

On donne ci-dessous l'expression de l'équation de Laplace dans les différents systèmes de coordonnées :

Coordonnées cartésiennes :
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{Eq.I-9})$$

Coordonnées cylindriques (cf. figure I-4) :
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{Eq.I-10})$$

Coordonnées sphériques (cf. figure I-5) :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = 0 \quad (\text{Eq.I-11})$$

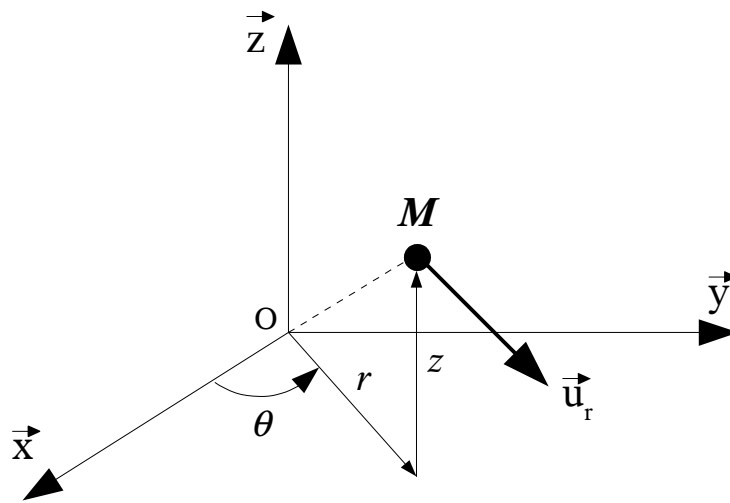


Figure I-4 : coordonnées cylindriques.

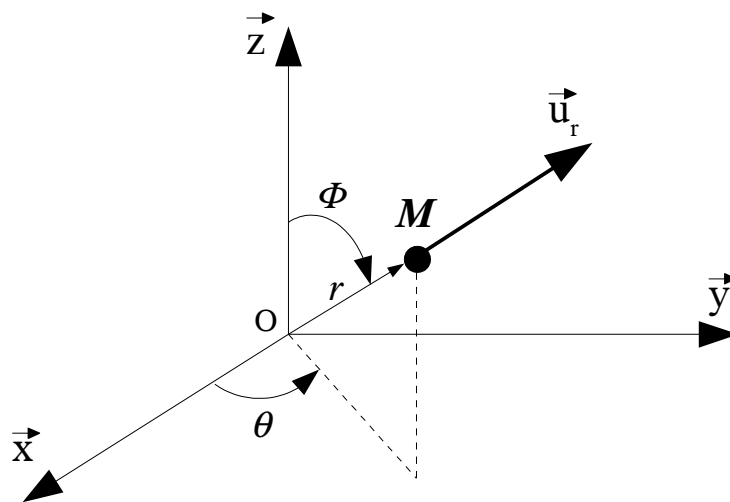


Figure I-5 : coordonnées sphériques.

b) Remarque sur la conservation du flux thermique.

L'équation I-1, application du 1^{er} principe au système Σ , peut s'écrire :

$$\dot{Q} = \frac{dU}{dt} - \dot{W}_u \quad (\text{Eq.I-12})$$

Si l'on fait les deux hypothèses suivantes :

1 - régime stationnaire $\Rightarrow \frac{dU}{dt} = 0$

2 - la chaleur est la seule forme de transfert d'énergie $\Rightarrow \dot{W}_u = 0$

On voit d'après la relation I-12 que le flux global qui traverse la frontière du système Σ est nul :

$$\dot{Q} = 0 \Rightarrow \boxed{\iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS = 0} \quad (\text{Eq.I-13})$$

Avec les deux hypothèses ci-dessus, la somme algébrique des flux thermiques qui entrent dans le système Σ est donc nulle (autrement dit, le flux thermique qui entre dans le système est égal à celui qui en sort). On dit qu'il y a **conservation du flux thermique**.

Remarque 1 : pour que le flux thermique ne soit pas conservatif, il suffit que le système Σ ne soit pas en régime stationnaire, ou qu'il soit le siège d'autres transferts d'énergie que la chaleur (ce qui est le cas, par exemple, s'il est parcouru par un courant électrique).

Remarque 2 : si l'on part à présent de la relation I-6, et que l'on applique les mêmes hypothèses que ci-dessus (régime stationnaire et chaleur seul mode de transfert d'énergie), il vient :

$$\text{div}(\vec{q}) = 0$$

Compte-tenu de ce que nous avons dit sur la divergence au paragraphe B-1-3, cette relation traduit elle aussi la conservation du flux thermique. C'est la forme locale de la conservation du flux, alors que la relation I-13 est la forme globale. Ces deux formulations sont strictement équivalentes : on peut passer directement de l'une à l'autre par le théorème d'Ostrogradski.

B-II – Étude du régime stationnaire monodimensionnel.

II-1 Résolution des principaux problèmes stationnaires 1D.

a) Géométrie plane.

On considère un mur plan dont les dimensions latérales sont très supérieures à son épaisseur e (effets de bord négligeables), et soumis sur ses faces à des conditions aux limites uniformes. L'objectif poursuivi est double : déterminer le champ de température dans le mur, ainsi que le flux de chaleur qui le traverse. Soit \vec{x} la direction orthogonale au mur (cf. figure II-1). Avec les hypothèses énoncées ci-dessus, la température ne dépend que de l'abscisse x . On dit que le problème est monodimensionnel (ou 1D) en x . Cette configuration se rencontre dans un très grand nombre d'applications : murs d'une habitation, parois d'un four, etc. Dans ces conditions, l'équation qui donne le champ de température devient très simple, puisque d'après I-9 il vient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

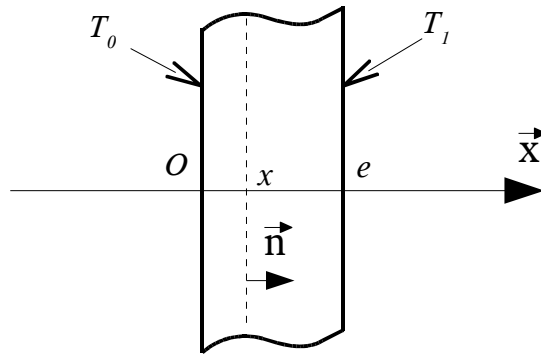


Figure II-1 : mur plan

Si l'on note T_0 la température en $x=0$ et T_1 la température en $x=e$, le champ de température dans le mur s'écrit :

$$T(x) = T_0 + \frac{(T_1 - T_0)}{e} x$$

La température dans le mur varie linéairement avec x . Cherchons à présent le flux thermique qui traverse le mur. La densité de flux en un point du mur est donnée par la loi de Fourier, en tenant compte du fait que seule la composante sur \vec{x} du gradient de température est non nulle :

$$\vec{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{x} = -\lambda \frac{(T_1 - T_0)}{L} \vec{x}$$

Le flux à travers une surface plane S orthogonale à \vec{x} , situé à une abscisse x quelconque entre 0 et e (représentée en pointillés sur la figure II-1), s'obtient par intégration :

$$\dot{Q} = - \iint_S \lambda \frac{(T_1 - T_0)}{L} \vec{x} \vec{n} dS$$

Pour la normale à la surface, on a le choix entre $\vec{n} = \vec{x}$ et $\vec{n} = -\vec{x}$. Ce choix est arbitraire : il ne fait que fixer le signe de \dot{Q} . Avec $\vec{n} = \vec{x}$ (\dot{Q} positif si le transfert de chaleur se fait dans le sens de \vec{x}), et en se souvenant que le champ de température est monodimensionnel, il vient :

$$\dot{Q} = \lambda S \frac{(T_0 - T_1)}{e} \quad (\text{Eq.II-1})$$

On voit que le flux ne dépend pas de l'abscisse x à laquelle se trouve la surface S . Le flux qui entre dans le système en $x=0$ est donc égal au flux qui en ressort en $x=e$: on vérifie donc bien la conservation du flux énoncée au paragraphe I-4-b.

b) Géométrie cylindrique.

Considérons à présent un cylindre creux, d'axe de révolution (O, \vec{z}) , de rayon intérieur r_0 et de rayon extérieur r_1 , petits devant sa longueur L , et supposons là aussi que les conditions aux limites sont uniformes sur les parois intérieures et extérieures. Les coordonnées cylindriques s'imposent d'elles-mêmes, et la température ne dépend plus que de r , distance à l'axe (O, \vec{z}) . En pratique, cette configuration est celle d'un tube à l'intérieur duquel circule un fluide.

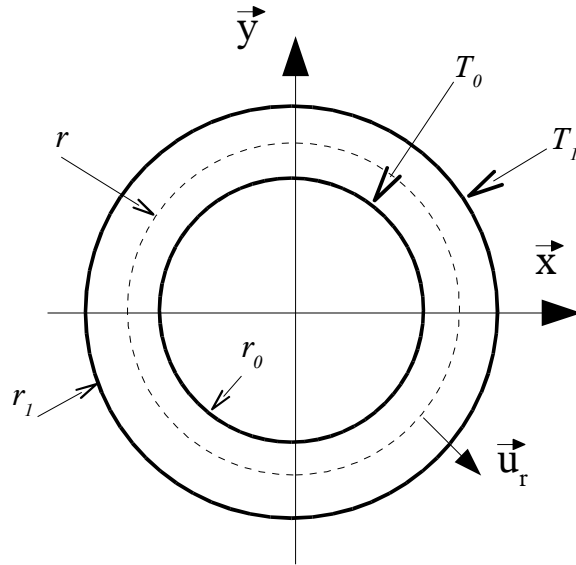


Figure II-2 : cylindre creux

Avec les hypothèses ci-dessus, l'équation I-10 devient : $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial T}{\partial r}) = 0$

Sa résolution nous donne la température en fonction de r : $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{A}{r} \Rightarrow T(r) = A \ln r + B$

On note T_0 la température de la paroi intérieure et T_1 la température de la paroi extérieure, ce qui permet d'expliciter les constantes d'intégration :

$$T(r) = \frac{T_1 - T_0}{\ln \frac{r_1}{r_0}} \ln \frac{r}{r_0} + T_0$$

La température dans un cylindre creux varie donc de façon logarithmique avec le rayon. Cherchons à présent le flux qui traverse le cylindre. La densité de flux s'écrit (cf. définition du vecteur \vec{u}_r sur les figures I-4 et II-2) :

$$\vec{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r = -\lambda \frac{(T_1 - T_0)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

Calculons le flux au travers d'une surface cylindrique S de rayon arbitraire r compris entre r_0 et r_1 (représentée en pointillés sur la figure II-2) :

$$\dot{Q} = \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS = - \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L \lambda \left[\frac{(T_1 - T_0)}{\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right)} \frac{1}{r} \right] \vec{u}_r \cdot \vec{n} (r d\theta dz)$$

La température ne dépendant que de r , elle est uniforme sur toute la surface S . Pour la normale à l'élément de surface dS , on a le choix entre $\vec{n}=\vec{u}_r$ et $\vec{n}=-\vec{u}_r$. On choisit arbitrairement la première possibilité, ce qui fait que le flux de chaleur est positif, par convention, s'il va de la paroi intérieure vers la paroi extérieure. On obtient finalement :

$$\dot{Q} = 2\pi\lambda L \frac{(T_0 - T_1)}{\ln(r_1/r_0)} \quad (\text{Eq.II-2})$$

Là encore, le résultat est indépendant du rayon r choisi pour la surface S . Le flux qui entre par la paroi intérieure du cylindre est égal à celui qui ressort par la paroi extérieure.

c) Géométrie sphérique.

Enfin, le dernier type de géométrie 1D classique est la sphère creuse, de rayon intérieur r_0 et de rayon extérieur r_1 . En supposant le transfert de chaleur monodimensionnel en r , c'est à dire indépendant de θ et Φ (définis sur la figure I-5), l'équation I-11 devient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

La démarche étant rigoureusement la même que précédemment, on se bornera à donner les résultats. En notant T_0 la température de la paroi intérieure et T_1 la température de la paroi extérieure, on obtient pour le champ de température :

$$T(r) = (T_1 - T_0) \frac{\frac{r_0}{r} - 1}{\frac{r_0}{r_1} - 1} + T_0$$

et pour le flux :

$$\dot{Q} = 4\pi\lambda \frac{(T_0 - T_1)}{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}} \quad (\text{Eq.II-3})$$

II-2 Résistance thermique.

a) Définition.

Les relations II-1, II-2 et II-3 peuvent toutes se mettre sous la forme suivante :

$$(T_0 - T_1) = R_{th} \dot{Q} \quad (\text{Eq.II-4})$$

R_{th} est appelée **résistance thermique** du système (unité : K.W^{-1}). Elle quantifie la « résistance » que le système oppose au passage de la chaleur. Son expression dépend de la géométrie considérée :

- mur plan :
$$R_{th} = \frac{e}{\lambda S} \quad (\text{Eq.II-5})$$

- cylindre creux :
$$R_{th} = \frac{\ln \frac{r_1}{r_0}}{2\pi\lambda L} \quad (\text{Eq.II-6})$$

- sphère creuse :
$$R_{th} = \frac{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}}{4\pi\lambda} \quad (\text{Eq.II-7})$$

La relation II-4 présente une analogie avec la loi d'Ohm en électricité. C'est pourquoi on parle d'**analogie électrique** : la température et le flux de chaleur jouent respectivement dans ce problème le même rôle que le potentiel et le courant en électricité (on notera au passage que la conservation du flux thermique est analogue à la conservation du courant électrique). On peut donc adopter pour les résistances thermiques la même représentation que pour les résistances électriques (figure II-3), construire le **schéma électrique équivalent**, et appliquer les mêmes règles de composition qu'en électricité (addition des résistances en série et des conductances en parallèle). Un exemple est présenté à la fin du chapitre.

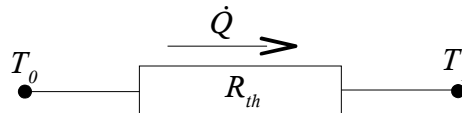


Figure II-3 : représentation d'une résistance thermique (analogie électrique)

Remarque 1 : on a beaucoup utilisé dans le cours de thermodynamique les notions de paroi diatherme et de paroi adiabatique. Une paroi diatherme est le cas limite idéal d'une paroi à résistance thermique nulle, alors qu'une paroi adiabatique est le cas limite idéal d'une paroi à résistance thermique infinie.

Remarque 2 : considérons un cylindre creux de faible épaisseur $e=r_1-r_0$ (cylindre mince). On peut alors faire l'approximation : $r_0 \approx r_1 \Rightarrow \ln \frac{r_1}{r_0} \approx \frac{r_1-r_0}{r_0} = \frac{e}{r_0}$. En notant par ailleurs que la surface d'échange d'un cylindre mince vaut : $S=2\pi r_0 L$, l'expression de sa résistance thermique donnée par la relation II-6 devient :

$$R_{th} = \frac{\ln \frac{r_1}{r_0}}{2\pi\lambda L} \approx \frac{e}{\lambda S}$$

La résistance thermique d'un cylindre mince peut donc être approchée par celle d'une paroi plane de même épaisseur et de même surface. On pourrait facilement démontrer que ce résultat est aussi valable pour une sphère creuse mince et, de façon plus générale, pour une surface gauche dont le rayon de courbure local est toujours très supérieur à son épaisseur.

Remarque 3 : dans le cas du mur plan, on trouve également la relation suivante (à comparer avec II-4 et II-5) :

$$(T_0 - T_1) = R_{th} q \quad \text{et} \quad R_{th} = \frac{e}{\lambda} \quad \text{en K.m}^2.\text{W}^{-1}$$

En effet, pour la géométrie plane, on peut aussi définir la résistance thermique comme le rapport de l'écart de température sur la densité de flux, et non sur le flux. Cette formulation est rendue possible pour le mur plan car dans ce cas la densité de flux est la même sur les deux faces du système (conséquence de l'égalité des surfaces d'échange en $x=0$ et $x=e$).

b) Extensions de la notion de résistance thermique.

On peut étendre la notion de résistance thermique à d'autres phénomènes, par exemple aux échanges convectifs entre une paroi solide et un fluide. En effet, la loi de Newton vue au paragraphe A-II-2 peut s'écrire en définissant une résistance convective R_{conv} :

$$(T_p - T_f) = R_{conv} \dot{Q} \quad \text{avec} \quad R_{conv} = \frac{1}{hS}$$

Remarque : signification du nombre de Biot

On rappelle la définition du nombre de Biot, vue au paragraphe B-I-2 : $Bi = \frac{he}{\lambda}$

Pour comprendre son sens physique, considérons une paroi solide plane d'épaisseur e , de conductivité thermique λ , en contact avec un fluide à la température T_f sur l'une de ses faces (surface S , coefficient d'échange h). La température de cette face est notée T_{p1} , celle de la face opposée T_{p0} . (cf. figure II-4).

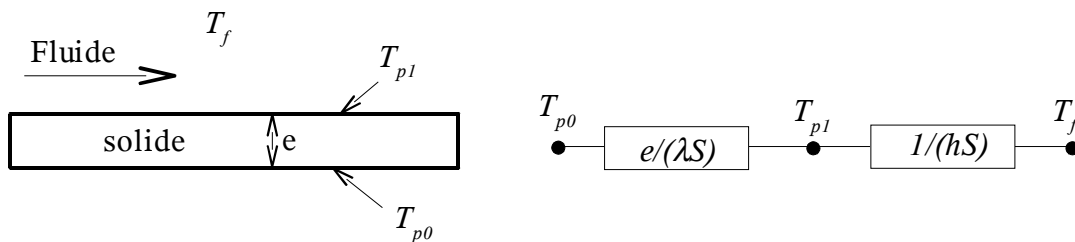


Figure II-4 : paroi solide en contact avec un fluide et schéma électrique équivalent.

Calculons le rapport de l'écart de température dans le solide sur l'écart de température dans le fluide :

$$\frac{T_{p0} - T_{p1}}{T_{p1} - T_f} = \frac{\frac{e}{\lambda S} \dot{Q}}{\frac{1}{hS} \dot{Q}} = \frac{he}{\lambda} = Bi$$

Le nombre de Biot compare donc la variation de température dans le solide à la variation de température dans le fluide. Un nombre de Biot petit devant 1 indique que le champ de température dans le solide peut être considéré comme quasi-uniforme ($T_{p0} \approx T_{p1}$). Un nombre de Biot grand devant 1 indique au contraire que le fluide impose sa température au solide ($T_{p1} \approx T_f$).

On utilise également la notion de résistance thermique pour décrire les transferts de chaleur entre deux solides en contact mutuel. En effet, une surface solide possède une rugosité qui peut aller de quelques dixièmes à quelques centaines de microns. La conséquence est que la surface réelle de contact entre les deux solides ne représente que quelques pourcent de la surface totale (cf. figure II-5). Or, l'espace disponible entre les points de contact est occupé par un fluide (par exemple de l'air) qui peut avoir une conductivité thermique plus faible que celle des deux solides. A l'échelle

macroscopique (c'est à dire à une échelle spatiale très supérieure à la rugosité des surfaces), cela entraîne une discontinuité de la température lorsque l'on passe d'un solide à l'autre. Par définition, la résistance de contact R_c relie le « saut » de température à la densité de flux thermique q qui traverse le contact :

$$(T_{p1} - T_{p2}) = R_c q$$

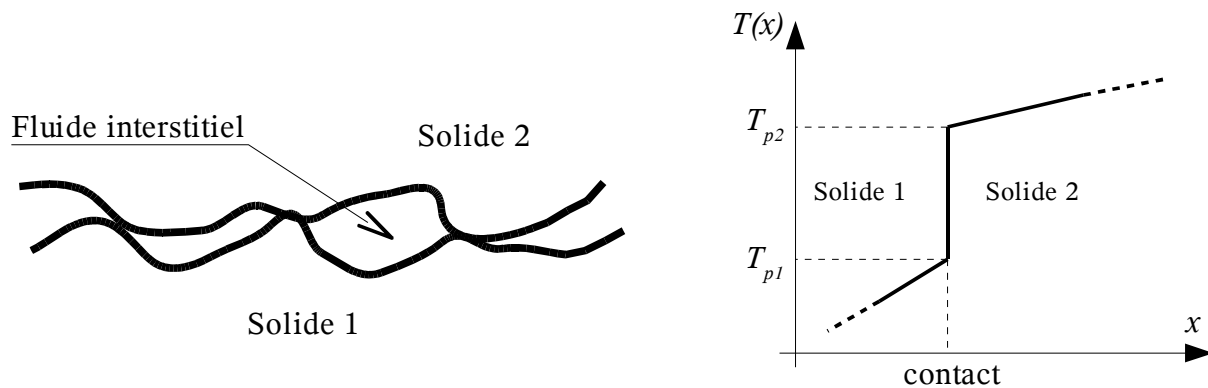


Figure II-5 : contact entre deux solides

Une résistance de contact dépend d'un grand nombre de paramètres (nature des solides et du fluide interstitiel, défauts géométriques et rugosité des surfaces, pression de contact, etc.). Il est très difficile de prédire par le calcul sa valeur dans une situation donnée. L'ordre de grandeur vaut typiquement 10^{-3} à 10^{-6} $\text{K.m}^2.\text{W}^{-1}$. Une résistance de contact est généralement négligeable lorsque l'un des deux solides au moins est un mauvais conducteur thermique. On peut alors faire l'hypothèse de **contact parfait** ($R_c=0 \Rightarrow T_{p1}=T_{p2}$). Il n'en va pas de même lorsque les deux solides sont de bons conducteurs thermiques (contact entre deux parois métalliques, par exemple). La résistance thermique totale de l'ensemble des deux solides peut alors être quasiment égale à celle du contact.

Exemple II-1 : mur composite (exemple de synhèse).

Un élément de paroi de four, de longueur L , est composé de deux plaques planes métalliques d'épaisseur e_1 , de hauteur H_1 et de conductivité thermique λ_1 . Elles sont séparées par un isolant thermique d'épaisseur e_2 , de hauteur H_2 , et de conductivité thermique λ_2 . L'espacement e_2 entre les plaques est garanti par deux cales identiques de hauteur H_3 et de conductivité thermique λ_3 , situées de part et d'autre de l'isolant ($H_1 = H_2 + 2H_3$). La face extérieure de l'élément de paroi est en contact avec le milieu extérieur à la température T_e . Le coefficient d'échange global sur cette face est noté h_e . De la même façon, on note T_i la température de l'air à l'intérieur du four. Le coefficient d'échange global sur la face de l'élément de paroi située à l'intérieur du four est noté h_i . On tiendra compte d'une résistance de contact R_c entre les cales et les plaques métalliques.

On souhaite déterminer le flux qui traverse l'élément de paroi, de façon à pouvoir dimensionner la puissance de chauffage du four.

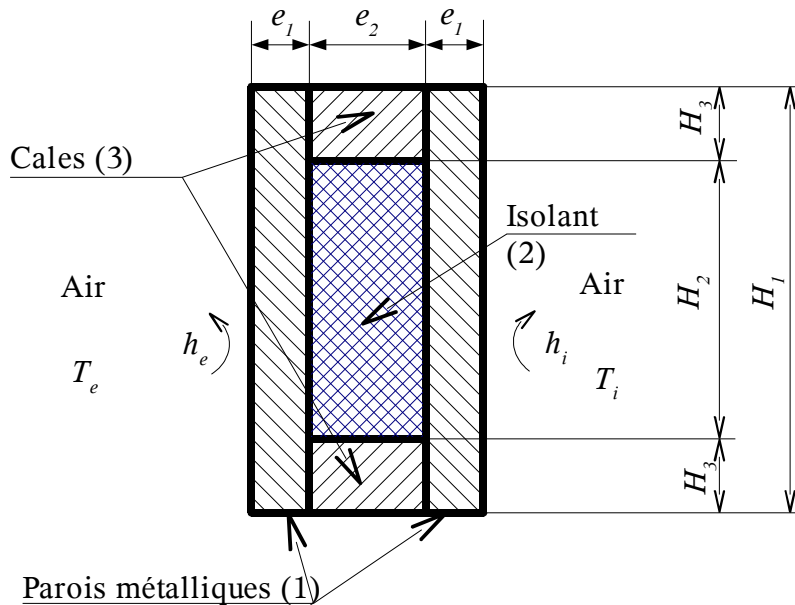


Figure II-6 : mur composite

Les surfaces d'échange s'écrivent : $S_1 = L H_1$ $S_2 = L H_2$ $S_3 = L H_3$

Le schéma électrique équivalent est donné sur la figure II-7. Il comporte l'expression de toutes les résistances thermiques intervenant dans le modèle.

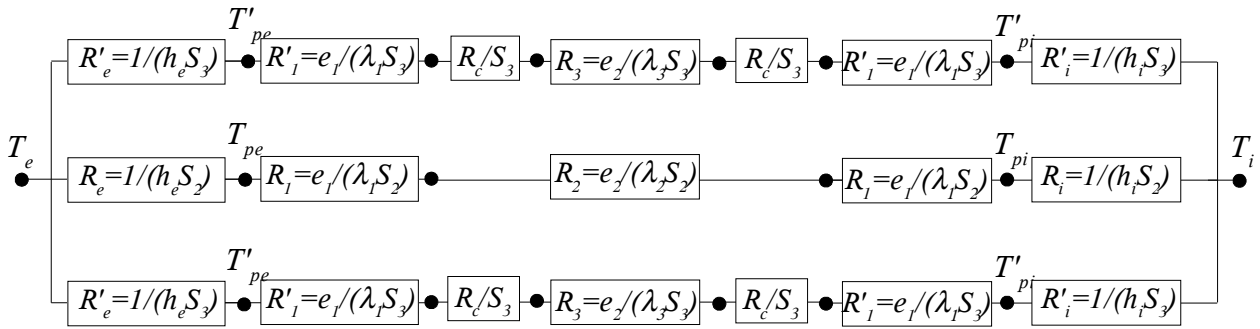


Figure II-7 : schéma électrique équivalent du mur composite.

On en déduit la résistance totale entre les températures T_e et T_i :

$$R_{tot} = \left(\frac{2}{R'_e + 2R'_1 + 2R'_c + R'_3 + R'_i} + \frac{1}{R_e + 2R_1 + R_2 + R_i} \right)^{-1}$$

Le flux thermique qui traverse l'élément de paroi s'écrit donc :

$$\dot{Q} = \frac{T_e - T_i}{R_{tot}}$$