

# THERMIQUE APPLIQUÉE

Frédéric Doumenc

Version 2.1



**Ce texte est la suite immédiate du cours de thermique  
de L2 disponible à l'adresse :**

[http://www.fast.u-psud.fr/~doumenc/la200/CoursThermique\\_L2.pdf](http://www.fast.u-psud.fr/~doumenc/la200/CoursThermique_L2.pdf)

Le document cité ci-dessus contient le chapitre A (Généralités : modes de propagation de la chaleur) ainsi que le début du chapitre B sur la conduction thermique (B-I Equation de la chaleur et B-II Etude du régime stationnaire monodimensionnel).

## Table des matières

<b><i>Bibliographie</i></b> .....	<b>4</b>
<b>B – III Dimensionnement d'une ailette en régime stationnaire</b> .....	<b>5</b>
III – 1 Définition.....	5
III – 2 Champ de température dans une ailette de section constante.....	6
III – 3 Efficacité d'une ailette.....	8
III – 4 Rendement d'une surface ailetée.....	8
III – 5 Démarche générale.....	9
<b>B – IV Problèmes stationnaires bidimensionnels</b> .....	<b>10</b>
IV – 1 Introduction.....	10
IV – 2 Cylindre dans un milieu semi-infini. ....	10
a) Description du problème.....	10
b) Milieu infini.....	11
c) Composition des solutions : champ de température dans le milieu semi-infini.....	12
d) Résistance thermique.....	13
IV – 3 Sphère dans un milieu semi-infini. ....	13
<b>B – V Régime instationnaire monodimensionnel</b> .....	<b>14</b>
V – 1 Introduction. ....	14
V – 2 Diffusivité thermique. ....	14
a) Milieu semi-infini soumis à un échelon de température.....	14
b) Ordres de grandeurs.....	14
c) Solution analytique.....	16
V – 3 Effusivité thermique. ....	18
a) Deux milieux semi-infinis en contact parfait.....	18
b) Solution analytique.....	19
<b><i>C – Introduction à la convection</i></b> .....	<b>21</b>
<b>C – I Ecoulements externes</b> .....	<b>22</b>
I – 1 Couches limites : approche qualitative. ....	22
a) Couche limite hydrodynamique.....	22
b) Couche limite thermique.....	22
c) Transition vers la turbulence.....	23
I – 2 Etude du régime laminaire. ....	24
a) Equations de conservation.....	24
b) Epaisseur de la couche limite hydrodynamique.....	25

c) Epaisseur de la couche limite thermique dans le cas $\delta_H \ll \delta_T$ .....	26
d) Coefficient d'échange thermique dans le cas $Pr \ll 1$ .....	27
e) Coefficient d'échange thermique dans le cas ( $Pr \sim 1$ ou $Pr \gg 1$ ).....	28
I – 3 Régime turbulent. ....	28
<b>C – II Ecoulements internes.....</b>	<b>30</b>
II – 1 Vitesse moyenne. ....	30
II – 2 Température moyenne. ....	30
a) Bilan énergétique global.....	30
b) Température de référence.....	32
II – 3 Conditions aux limites. ....	32
a) Densité de flux uniforme.....	32
b) Température de paroi uniforme.....	33
II – 4 Détermination du coefficient d'échange. ....	33
a) Régime d'entrée et écoulement établi. ....	33
b) Coefficient d'échange en régime laminaire. ....	35
c) Coefficient d'échange en régime turbulent.....	35

## Bibliographie

*Fundamentals of Heat and mass Transfer* – **Frank P. Incropera** et **David P. De Witt**, éd. John Wiley & sons, 1990.

*Initiation aux transferts thermiques* - **Jean-François Sacadura** (coordonnateur), éd. Lavoisier, Paris 1993, 446 pages.

*Transferts thermiques* – **Jean Taine** et **Jean-Pierre Petit**, éd. Dunod, Paris 1995, 422 pages.

*Heat Conduction* – **M. N. Özisik**, éd. John Wiley and sons, New-York, 1993, 692 pages.

*Convection Heat Transfer* – **A. Bejan**, éd. John Wiley and sons, New-York, 1995, 623 pages.

## B – III Dimensionnement d'une ailette en régime stationnaire.

### III – 1 Définition.

Rappelons l'expression de la loi de Newton, qui donne le flux convectif échangé entre un solide de surface  $S$ , de température superficielle uniforme  $T_p$ , et un fluide à la température  $T_f$  :

$$\dot{Q} = h S (T_p - T_f)$$

La façon la plus économique d'augmenter le flux de chaleur  $\dot{Q}$  consiste bien souvent à augmenter  $S$ . Ceci peut être obtenu par la réalisation d'ailettes, solution ayant pour avantage de limiter l'encombrement et l'augmentation de poids qui résultent de l'ajout de matière.

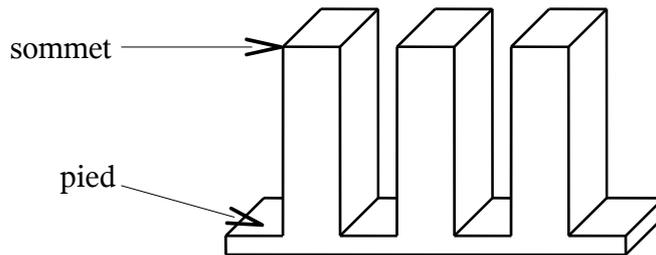


Figure III-1 : exemple de surface ailetée.

Dans les applications, on a besoin de connaître le flux thermique  $\dot{Q}_a$  échangé par une ailette. Or, le champ de température dans l'ailette étant à l'évidence multidimensionnel (en d'autres termes, la température dans l'ailette dépend de plusieurs variables d'espace), le flux thermique s'obtient par intégration sur la surface d'échange  $S_a$  de l'ailette :

$$\dot{Q}_a = \int \int_{S_a} h dS (T_p - T_f) \quad (\text{Eq.III-1})$$

Dans l'absolu, l'évaluation de cette intégrale nécessite de résoudre un problème de conduction thermique multidimensionnel, donc compliqué. Heureusement, dans la plupart des cas, il est possible de supposer que la température est quasi-uniforme sur une section droite de l'ailette. En d'autres termes, on suppose que la température ne dépend que de  $z$ , distance comptée depuis le pied de l'ailette (cf. figure III-2).

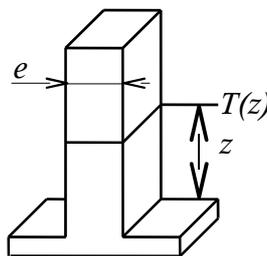


Figure III-2 : hypothèse simplificatrice.

En notant  $e$  la plus petite dimension transversale de l'ailette et  $\lambda$  sa conductivité thermique, cette hypothèse est valable dès lors que la résistance thermique conductive  $e/\lambda$  est très inférieure à la résistance thermique convective  $1/h$ . Le critère de validité s'écrit :

$$Bi = \frac{he}{\lambda} \ll 1$$

$Bi$  est le nombre de Biot (cf. chapitre B-II-2-b). Dans ce qui suit, on admettra que l'hypothèse selon laquelle la température ne dépend que de  $z$  est toujours vérifiée. En outre, on continuera à supposer que l'on se trouve en régime stationnaire.

### III – 2 Champ de température dans une ailette de section constante.

#### a) Conservation du flux thermique.

Appliquons le premier principe de la thermodynamique à une tranche d'épaisseur  $dz$  située à la cote  $z$  (représentée en noir sur la figure III-3).

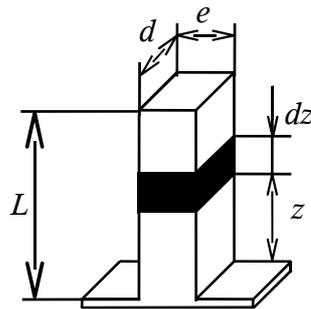


Figure III-3 : définition du système thermodynamique utilisé.

Avec l'hypothèse de régime stationnaire, et en l'absence de tout travail, le premier principe de la thermodynamique impose que la somme algébrique des flux de chaleur qui entrent dans le système doit être nulle (cf. chapitre B-II-1) :

$$-\lambda \frac{dT}{dz} \Big|_z A_z + \lambda \frac{dT}{dz} \Big|_{z+dz} A_{z+dz} + h p dz (T_f - T_z) = 0 \quad (\text{Eq.III-2})$$

Le périmètre de l'ailette est noté  $p$ . La section de l'ailette à la cote  $z$  est notée  $A_z$ . L'ailette étant de section constante, on a :  $A_z = A_{z+dz} = A$ . Dans le cas d'une ailette rectangulaire telle que celle représentée sur la figure III-3, on aurait :  $p = 2(d + e)$  et  $A = e d$ . Pour une ailette de section circulaire de diamètre  $D$ , on aurait  $p = \pi D$  et  $A = \pi D^2/4$ . La suite de l'analyse s'applique à n'importe quelle ailette de section constante.

Le développement de Taylor au 1<sup>er</sup> ordre de la dérivée spatiale de la température s'écrit :

$$\frac{dT}{dz} \Big|_{z+dz} = \frac{dT}{dz} \Big|_z + dz \frac{d^2 T}{dz^2} \Big|_z$$

En injectant cette relation dans la relation III-2, il vient :

$$\frac{d^2 T}{dz^2} = m^2 (T - T_f) \quad \text{avec} \quad m = \sqrt{\frac{h p}{\lambda A}} \quad (\text{Eq.III-3})$$

La quantité  $m$ , homogène à l'inverse d'une longueur, est appelée **module de l'ailette**.

### b) Conditions aux limites.

Le champ de température dans l'ailette s'obtient donc en résolvant l'équation différentielle du 2<sup>ème</sup> ordre III-3, avec les conditions aux limites appropriées en  $z=0$  et  $z=L$ . En général, on peut supposer connue la température au pied de l'ailette :

$$T(z=0) = T_b \quad (\text{Eq.III-4})$$

Au sommet de l'ailette, on peut tenir compte d'un transfert de chaleur convectif, avec le même coefficient d'échange  $h$  que sur les faces latérales. La conservation du flux thermique à l'interface solide/fluide aboutit à :

$$\lambda \frac{dT}{dz} \Big|_{z=L} = h(T_f - T_{z=L}) \quad (\text{Eq.III-5})$$

Mais si l'ailette est suffisamment longue, la surface d'échange au sommet est négligeable devant celle des faces latérales. Il est alors possible de supposer le sommet adiabatique, ce qui a pour effet de simplifier légèrement les calculs. La condition à la limite s'écrit dans ce cas :

$$\frac{dT}{dz} \Big|_{z=L} = 0 \quad (\text{Eq.III-6})$$

Une solution de compromis consiste à supposer le sommet adiabatique (relation III-6), tout en utilisant une longueur corrigée  $L_c = L + e/2$ , ce qui revient à « déplier » le sommet de l'ailette (cf. figure III-4). Cette correction a pour effet de reporter sur les faces latérales la surface d'échange que l'on perd en négligeant les transferts de chaleur au sommet.

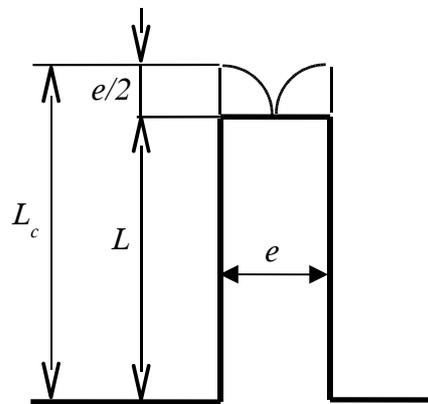


Figure III-4 : correction de longueur.

### c) Détermination du champ de température.

Calculons à titre d'exemple le profil de température d'une ailette de section constante, dont le pied est à la température  $T_b$ , et le sommet adiabatique. Il faut pour cela résoudre l'équation différentielle III-3 avec les conditions aux limites III-4 et III-6. L'équation différentielle III-3 étant linéaire, sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière quelconque de l'équation complète :

$$T(z) = A ch(mz) + B sh(mz) + T_f$$

Les conditions aux limites III-4 et III-6 permettent de trouver l'expression des constantes d'intégration  $A$  et  $B$  :

$$A = T_b - T_f \quad \text{et} \quad B = -(T_b - T_f) \frac{sh(mL)}{ch(mL)}$$

En utilisant la relation  $ch(mL)ch(mz) - sh(mL)sh(mz) = ch[m(L-z)]$ , on obtient finalement :

$$T(z) = (T_b - T_f) \frac{ch[m(L-z)]}{ch(mL)} + T_f \quad (\text{Eq.III-7})$$

### III – 3 Efficacité d'une ailette.

Une fois le champ de température connu, il est possible d'utiliser la relation III-1 pour obtenir le flux de chaleur échangé par l'ailette. Cependant, il est généralement plus facile d'utiliser la conservation du flux de chaleur (régime stationnaire, travail nul), qui stipule que le flux convectif échangé avec l'air est égal en valeur absolue au flux conductif qui entre au pied de l'ailette :

$$\dot{Q}_a = \lambda A \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} \quad (\text{Eq.III-8})$$

On définit **l'efficacité d'une ailette** comme le rapport du flux qu'elle échange, sur le flux qu'elle échangerait si sa température était uniforme :

$$\eta_a = \frac{\dot{Q}_a}{h S_a (T_f - T_b)} \quad (\text{Eq.III-9})$$

Calculons à titre d'exemple l'efficacité d'une ailette de section constante à sommet adiabatique : l'utilisation simultanée des relations (III-7) et (III-8) conduit au flux échangé :

$$\dot{Q}_a = (T_f - T_b) m \lambda A \tanh(mL) = (T_f - T_b) \sqrt{h p \lambda A} \tanh(mL)$$

On obtient l'efficacité de l'ailette en introduisant cette relation dans la relation III-9 :

$$\eta_a = \frac{\tanh(mL)}{mL} \quad (\text{Eq.III-10})$$

Lorsque la hauteur de l'ailette croît, l'efficacité diminue. Des ailettes démesurément longues accroissent inutilement le poids et l'encombrement, sans améliorer significativement les échanges de chaleur.

### III – 4 Rendement d'une surface ailetée.

**Le rendement d'une surface ailetée** est défini comme le rapport du flux échangé sur toute la surface, sur le flux qui aurait été échangé si la totalité de la surface était à la température  $T_b$  :

$$\eta_o = \frac{\dot{Q}_t}{h S_t (T_f - T_b)} \quad (\text{III-11})$$

$S_t$  : surface d'échange totale (totalité des ailettes + base) ;

$\dot{Q}_t$  : flux thermique au travers de la surface totale  $S_t$ .

Calculons l'expression du rendement d'une surface ailetée. Le flux total s'écrit :

$$\dot{Q}_t = n h S_a \eta_a (T_f - T_b) + h S_b (T_f - T_b)$$

$n$  : nombre d'ailettes sur la surface,

$S_a$  : surface d'échange d'une ailette,

$S_b$  : surface de la base à la température  $T_b$ .

Sachant que :  $S_t = n.S_a + S_b$

On obtient l'expression suivante pour le rendement d'une surface ailetée :

$$\eta_0 = 1 - (1 - \eta_a) \frac{n S_a}{S_t} \quad (\text{III-12})$$

### III – 5 Démarche générale.

Les ailettes couramment utilisées n'ont pas nécessairement une section constante. Le même type d'analyse que celle que nous venons de faire peut aussi être effectuée sur des géométries plus complexes. En pratique, on trouve dans la littérature l'expression de l'efficacité pour les géométries les plus courantes. Le résultat est présenté soit dans un formulaire, soit sous forme d'abaque. Pour plus de détails, on se référera par exemple à « *Fundamentals of heat and mass transfer* », par D.P. De witt et F.P. Incropera.

En conclusion, le calcul du flux échangé par la totalité d'une surface pourvue d'ailettes peut se décomposer en trois étapes.

#### 1 - Calcul de l'efficacité d'une ailette.

Dans la pratique, on n'est que rarement obligé de procéder à la résolution de l'équation III-3, la littérature donnant des abaques ou des formulaires pour les configurations courantes.

#### 2 - Calcul du rendement de la surface, par la relation III-12.

3 – Si la température du pied est connue, la relation III-11 permet de calculer directement le flux thermique échangé. Dans le cas contraire, cette même relation donne l'expression de la résistance thermique de la surface ailetée :

$$R_{th} = \frac{1}{\eta_0 h S_t}$$

Cette résistance thermique tient compte à la fois de la conduction dans les ailettes et des transferts convectifs dans le fluide. Elle peut être composée avec les autres résistances thermiques du problème, pour construire le schéma électrique équivalent.

## B – IV Problèmes stationnaires bidimensionnels.

### IV – 1 Introduction.

Il existe principalement deux méthodes de résolution analytique de l'équation de la chaleur en régime stationnaire multidimensionnel :

- **La méthode des images**, qui consiste à superposer les solutions obtenues pour des problèmes plus simples que celui que l'on veut résoudre, superposition autorisée par la linéarité de l'équation de Laplace. Cette méthode permet de traiter des problèmes en milieu infini ou semi-infini. Elle est identique à celle utilisée en mécanique des fluides pour les écoulements à potentiel (cf. module de mécanique de L2, dynamique des fluides parfaits).
- **La séparation des variables**, qui consiste à rechercher une solution sous la forme de produit de deux fonctions dépendant chacune d'une seule variable d'espace :  $T(x,y)=f(x)g(y)$ .

Nous nous bornerons dans ce cours à donner deux exemples d'application de la méthode des images. La séparation des variables est traitée dans le cours de mathématiques de L3 sur les équations aux dérivées partielles. L'ouvrage de M.N. Özisik « *Heat conduction* », donné dans la bibliographie, contient un exposé complet de l'application de cette méthode à la résolution de l'équation de la chaleur.

### IV – 2 Cylindre dans un milieu semi-infini.

#### a) Description du problème.

On souhaite calculer l'échauffement d'un câble électrique cylindrique, de rayon  $R$  et de longueur  $L$ , enterré parallèlement à la surface du sol à une profondeur  $H$  (cf. figure IV-1). Du fait de l'effet Joule, le câble produit un flux de chaleur  $\dot{Q}$  supposé constant ( $\dot{Q}=R_{el}I^2$ , avec  $R_{el}$  la résistance électrique du câble et  $I$  l'intensité électrique qui le parcourt). La température à la surface du sol est supposée uniforme et égale à  $T_0$ . L'objectif est de calculer la température atteinte par le câble en régime stationnaire.

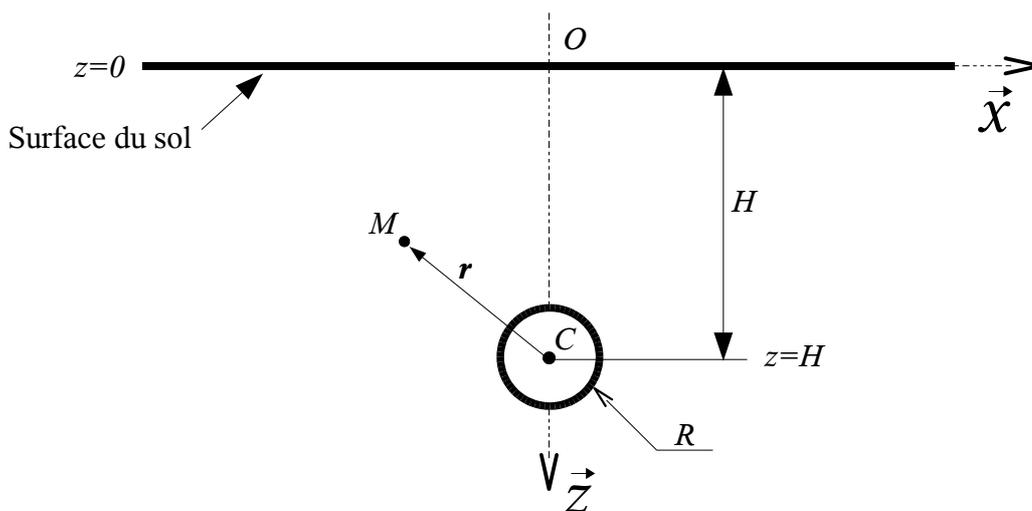


Figure IV-1 : vue en coupe d'un câble électrique enterré. Le centre du câble est situé au point  $C$ , tel que  $\vec{OC}=H\vec{z}$ .

Le rayon du câble est petit devant la profondeur à laquelle il est enterré ( $R \ll H$ ). On suppose en outre que sa longueur est très supérieure à sa profondeur ( $L \gg H$ ), ce qui rend le problème bidimensionnel selon la direction verticale  $\vec{z}$  et la direction horizontale  $\vec{x}$  perpendiculaire à l'axe du câble. On notera  $r$  la distance séparant un point quelconque  $M$  situé dans la terre du centre du câble  $C$ . La traduction mathématique de ce problème est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta T = 0 & \text{pour } z > 0 \text{ et } r > R \quad (\text{IV-1}) \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\dot{Q}}{2\pi R L} & \text{pour } r=R \quad (\text{IV-2}) \\ T(x,z) = T_0 & \text{pour } z=0 \quad (\text{IV-3}) \end{array} \right.$$

L'équation IV-1 est l'équation de la conduction thermique, qui se réduit ici à l'équation de Laplace, parce que nous sommes en régime stationnaire et que la chaleur est le seul mode de transfert d'énergie dans le sol (le courant électrique parcourt la câble, mais pas le sol). Les équations IV-2 et IV-3 sont les conditions aux limites. L'équation IV-2 traduit la conservation de l'énergie à l'interface entre le câble et la terre ( $r=R$ ) : toute la puissance électrique dissipée par effet Joule est injectée dans la terre sous forme de chaleur. Le flux de chaleur est compté positivement s'il passe du câble vers la terre.

### b) Milieu infini.

Commençons par résoudre un problème annexe, celui d'un cylindre situé dans un milieu infini dans toutes les directions (figure IV-2), et cédant à la terre un flux de chaleur  $\dot{Q}$ .

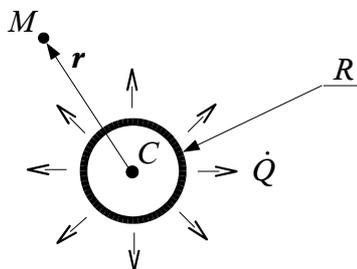


Figure IV-2 : cylindre de rayon  $R$  dans un milieu infini.

Ce problème est manifestement monodimensionnel en  $r$ . On notera  $\theta(r)$  le champ de température autour du cylindre ( $r > R$ ). On a vu au chapitre B-II-1-b que l'équation de la conduction se réduit alors à :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{pour } r > R$$

et qu'elle admet pour solution :  $\theta(r) = A \ln r + B$

On peut fixer la constante d'intégration  $A$  de façon à ce que le flux au travers du cylindre de rayon  $R$  soit égal à  $\dot{Q}$  :

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_R = \frac{\dot{Q}}{2\pi R L} \Rightarrow A = -\frac{\dot{Q}}{2\pi \lambda L} \Rightarrow \boxed{\theta(r) = -\frac{\dot{Q}}{2\pi \lambda L} \ln r + B} \quad (\text{IV-4})$$

On voit que ce champ de température est aberrant d'un point de vue physique, puisque la température diverge quand la distance au cylindre tend vers l'infini. Mais peu importe, retenons que, sur la plan mathématique, il satisfait à l'équation de Laplace, et remettons à plus tard le calcul de la constante d'intégration  $B$ .

**c) Composition des solutions : champ de température dans le milieu semi-infini.**

Continuons à considérer un milieu infini, mais contenant à présent deux cylindres de même rayon  $R$ , positionnés de façon symétrique par rapport au plan d'équation  $z=0$ . Le premier cylindre, dont le centre  $C$  est à la cote  $z=H$ , échange avec le milieu environnant le flux de chaleur  $\dot{Q}$ , alors que le deuxième cylindre, dont le centre  $C'$  est à la cote  $z=-H$ , échange avec son environnement un flux égal en valeur absolue, mais de signe opposé, soit  $-\dot{Q}$  (cf. figure IV-3). Si le premier cylindre se comporte en source de chaleur, le deuxième se comporte donc en puits.

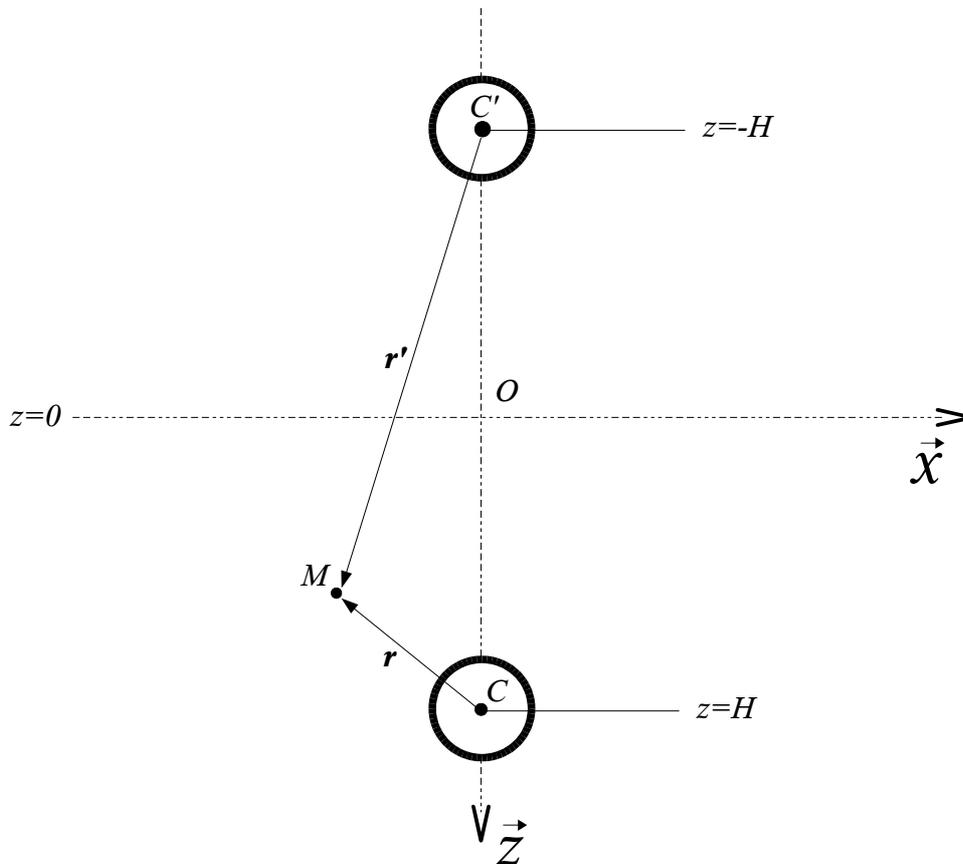


Figure IV-3 : milieu infini avec deux cylindres de rayon  $R$ .

Soit  $r$  la distance d'un point  $M$  quelconque au centre  $C$  du premier cylindre. Si celui-ci était seul, le champ de température dans le milieu environnant serait donné par la relation IV-4 :

$$\theta(r) = -\frac{\dot{Q}}{2\pi\lambda L} \ln r + B$$

De même, en notant  $r'$  la distance de  $M$  au centre du deuxième cylindre, on obtiendrait, si celui-ci était seul, le champ de température :

$$\theta'(r') = +\frac{\dot{Q}}{2\pi\lambda L} \ln r' + B'$$

Additionnons à présent ces deux champs :

$$T(r, r') = \theta(r) + \theta(r') = \frac{\dot{Q}}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r'}{r} + C \quad (\text{IV-5})$$

Ce nouveau champ vérifie l'équation de la conduction (IV-1). C'est une conséquence de la linéarité de l'équation de Laplace :  $(\Delta\theta = 0 \text{ et } \Delta\theta' = 0) \Rightarrow \Delta(\theta + \theta') = 0$ . Voyons s'il est possible de faire en sorte qu'il vérifie aussi les conditions aux limites IV-2 et IV-3. On voit facilement que c'est le cas pour la condition IV-2, à condition de faire intervenir l'hypothèse  $R \ll H$ , laquelle permet de faire l'approximation  $r' \approx 2H = \text{constante}$  lorsqu'on se trouve sur la circonférence du cylindre inférieur, c'est à dire en  $r = R$ . Pour la condition IV-3, il suffit de remarquer que le plan d'équation  $z = 0$  étant un plan de symétrie, les points de ce plan vérifient la relation  $r = r'$ , et on obtient la valeur de la constante d'intégration  $C = T_0$ . Le champ de température solution du problème défini au paragraphe IV-2-a est donc :

$$T(r, r') = \theta(r) + \theta(r') = \frac{\dot{Q}}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r'}{r} + T_0 \quad (\text{IV-6})$$

#### d) Résistance thermique.

Avec l'approximation déjà mentionnée ci-dessus ( $R \ll H \Rightarrow r' \approx 2H$ ), la température à la circonférence du cylindre inférieur s'écrit :

$$T_i = \frac{\dot{Q}}{2\pi\lambda L} \ln \frac{2H}{R} + T_0$$

On en déduit directement l'expression de la résistance thermique entre le cylindre et la surface du sol :

$$R_{th} = \frac{T_i - T_0}{\dot{Q}} = \frac{\ln \frac{2H}{R}}{2\pi\lambda L} \quad (\text{IV-7})$$

#### IV – 3 Sphère dans un milieu semi-infini.

On considère à présent le cas d'une sphère de rayon  $R$ , située à la profondeur  $H$ , et telle que  $R \ll H$ . Le même type d'analyse que précédemment conduit à l'expression de la résistance thermique entre la surface de la sphère et la surface du sol :

$$R_{th} = \frac{1 - \frac{R}{2H}}{4\pi\lambda R} \quad (\text{IV-8})$$

On voit que la notion de résistance thermique se généralise sans peine au cas de problèmes multidimensionnels : elle est en fait intimement liée à la notion de régime stationnaire. On trouvera dans « *Fundamentals of Heat Transfer* » de De Witt et Incropera un formulaire permettant de traiter les problèmes multidimensionnel stationnaires les plus courants, l'expression des résistances thermiques étant obtenue par la méthode des images ou par d'autres méthodes. Par contre, il est très important de garder à l'esprit que la notion de résistance thermique n'a plus cours en régime instationnaire, c'est à dire lorsque le champ de température dépend du temps (thème du chapitre suivant).

## B – V Régime instationnaire monodimensionnel.

### V – 1 Introduction.

Les méthodes de résolution de l'équation de la chaleur en régime instationnaire sont nombreuses : transformation de Boltzmann, séparation des variables, transformation de Laplace, fonctions de Green, etc. Le but de ce cours n'est pas de les passer en revue (les plus courantes figurent au programme du cours de mathématiques de L3), mais plutôt de mettre l'accent sur les aspects physiques d'un phénomène de diffusion, et notamment sur le sens des deux caractéristiques thermophysiques propres au régime instationnaire : la *diffusivité* et l'*effusivité*.

### V – 2 Diffusivité thermique.

#### a) Milieu semi-infini soumis à un échelon de température.

Afin de comprendre le rôle de la diffusivité thermique, considérons un milieu semi-infini initialement à la température  $T_0$ , dont la température de surface est passée instantanément à  $T_1$  à l'instant initial. Il s'agit d'un problème monodimensionnel instationnaire, décrit par le modèle mathématique suivant (cf. paragraphe B-I-3) :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{pour } x > 0 \quad \text{et} \quad t > 0 \quad (\text{V-1})$$

$$\text{Condition initiale :} \quad T(x, 0) = T_0 \quad \text{pour } x > 0 \quad (\text{V-2})$$

$$\text{Conditions aux limites :} \quad T(0, t) = T_1 \quad \text{pour } t > 0 \quad (\text{V-3})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x, t) = T_0 \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (\text{V-4})$$

La température  $T$  dépend de l'abscisse  $x$  et du temps  $t$ . La diffusivité est notée  $\alpha$ . La densité de flux thermique en  $x=0$  est donnée par :

$$q_0(t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (\text{V-5})$$

#### b) Ordres de grandeurs.

Le champ de température attendu à un instant  $t$  donné est représenté sur la figure V-1 (il s'agit d'une photographie du champ prise à un moment de son évolution). Notre intuition nous indique que la brusque variation de la température de surface survenue à l'instant initial a dû perturber le champ de température dans le milieu sur une profondeur  $\delta$  à partir de la surface, laquelle doit vraisemblablement augmenter avec le temps.

Supposons notre intuition correcte, et tentons d'en déduire l'ordre de grandeur de chacun des deux membres de l'équation de la chaleur (V-1), en commençant par le membre de gauche (dérivée temporelle). Dans la zone affectée par la modification de la température de surface,

la température est passée de  $T_0$  (valeur initiale) à une température de l'ordre de  $T_1$ , ceci pendant un temps  $t$ . En notant «  $\sim$  » la relation « *a même ordre de grandeur que* », il vient :

$$\left| \frac{\partial T}{\partial t} \right| \sim \frac{|T_1 - T_0|}{t} \quad (\text{V-6})$$

Faisons de même pour la dérivée spatiale, en commençant par le premier ordre. A un instant  $t$  donné, la température passe de  $T_0$  à  $T_1$  sur une distance de l'ordre de  $\delta$ . On obtient donc :

$$\left| \frac{\partial T}{\partial x} \right| \sim \frac{|T_1 - T_0|}{\delta} \quad (\text{V-7})$$

Pour la dérivée seconde, il suffit d'écrire que, sur une distance de l'ordre de  $\delta$ , la dérivée première varie de zéro jusqu'à l'ordre de grandeur donné ci-dessus. On en tire :

$$\left| \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right| \sim \frac{|T_1 - T_0|}{\delta^2} \quad (\text{V-8})$$

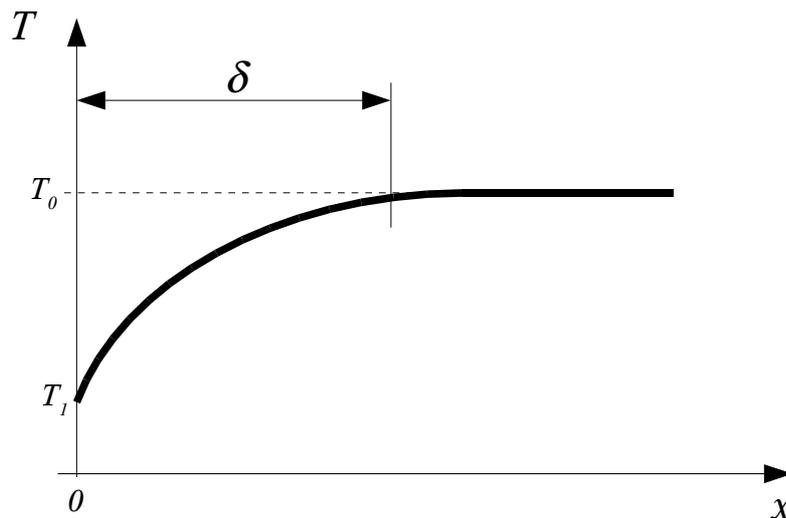


Figure V-1 : champ de température à un instant  $t$  donné.

Il suffit à présent de porter les relations (V-6) et (V-8) dans l'équation de la chaleur (V-1), pour obtenir l'évolution de la profondeur perturbée  $\delta$  en fonction du temps :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{|T_1 - T_0|}{t} \sim \frac{|T_1 - T_0|}{\delta^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta(t) \sim \sqrt{\alpha t}} \quad (\text{V-9})$$

Par ailleurs, en portant les relations (V-9) et (V-7) dans la relation (V-5), on obtient une estimation de la densité de flux en  $x=0$  :

$$\boxed{|q_0(t)| \sim \lambda \frac{|T_1 - T_0|}{\sqrt{\alpha t}}} \quad (\text{V-10})$$

La relation (V-9) contient deux informations très importantes :

- la perturbation du champ de température opérée en surface se propage au sein du milieu proportionnellement à la racine carrée du temps (donc très rapidement aux temps courts, puis de plus en plus lentement au fur et à mesure que le temps passe).

- un milieu doté d'une diffusivité élevée est un milieu dans lequel une perturbation de température se propage rapidement. Si l'on se souvient de la définition de la diffusivité ( $\alpha = \lambda / \rho c$ ), on voit que, pour être très diffusif, un milieu doit avoir une forte conductivité thermique  $\lambda$ , mais une faible capacité calorifique volumique  $\rho c$ .

La diffusivité thermique de la plupart des corps couramment rencontrés est comprise dans une gamme assez étroite allant approximativement de  $10^{-7}$  à  $10^{-4}$  m<sup>2</sup>/s (soit seulement trois décades). Le tableau V-1 en donne quelques exemples.

	Air	Laine de verre	Bois	Verre	Béton plein	Acier doux	Cuivre
$\alpha$ (m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$7,5 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$

Tableau V-1 : diffusivité thermique de quelques corps, à la température ambiante.

*Remarque 1*: il est intéressant de comparer le tableau ci-dessus avec le tableau des conductivités thermiques donné au chapitre A-I. On voit que l'air, qui a une conductivité thermique très basse, est par contre très diffusif.

*Remarque 2*: on peut se demander ce que représente concrètement un milieu semi-infini. Un mur plan d'épaisseur finie  $e$  pourra être supposé semi-infini tant que la perturbation de température effectuée sur l'une des faces n'a pas encore atteint la face opposée, donc tant que la relation  $\delta \ll e$  reste vérifiée. La relation (V-9) permet d'en déduire que l'approximation de milieu semi-infini est valable aux temps courts, tels que  $t \ll e^2/\alpha$ .

### c) Solution analytique.

Voyons à présent s'il est possible d'aller au-delà des ordres de grandeur, en trouvant la solution exacte du problème de diffusion instationnaire défini par les équations (V-1) à (V-5). Le champ de température est fonction de deux variables indépendantes: l'abscisse  $x$  et le temps  $t$ . L'étude des ordres de grandeur du paragraphe précédent suggère que ce champ de température pourrait (peut-être !) dépendre en fait de la variable unique  $(x/\delta)$ . On va donc tenter de faire le changement de variables suivant, connu sous le nom de transformation de Boltzmann :

$$\eta(x, t) = \frac{x}{\sqrt{\alpha t}}$$

La composition des dérivées permet d'écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{dT}{d\eta} \frac{x}{2t^{3/2}\sqrt{\alpha}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{dT}{d\eta} \frac{1}{\sqrt{\alpha t}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{d\eta^2} \frac{1}{\alpha t}$$

En portant ces relations dans la relation (V-1), on obtient :

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{dT}{d\eta} = 0 \quad (\text{V-11})$$

La condition initiale (V-2) et la condition à la limite (V-4) aboutissent à une seule et même relation (condition nécessaire pour que la méthode marche !) :

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} T(\eta) = T_0 \quad (\text{V-12})$$

Enfin, la condition à la limite (V-3) se transforme en :  $T(0) = T_1$  (V-13)

On est à présent ramené à la résolution de l'équation différentielle linéaire (V-11), du 2<sup>ème</sup> ordre, à coefficients variables, avec ses conditions aux limites (V-12) et (V-13). Cette équation étant incomplète, on commence par faire le changement de variable  $F(\eta) = dT/d\eta$ . On trouve :

$$F(\eta) = \frac{dT}{d\eta} = C \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right)$$

Après une intégration supplémentaire<sup>1</sup> :  $T(\eta) = C_1 \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) + C_2$

Les constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$  sont déterminées par les conditions aux limites (V-12) et (V-13). Après avoir fait le changement de variables dans l'autre sens, on obtient finalement :

$$\boxed{T(x, t) = (T_0 - T_1) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) + T_1} \quad (\text{V-14})$$

Calculons la densité de flux de chaleur à une abscisse quelconque :

$$q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda \frac{(T_0 - T_1)}{\sqrt{\pi \alpha t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right)$$

---

1 La fonction erreur  $\operatorname{erf}(z)$  est définie par :  $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-u^2) du$  . Elle possède les propriétés suivantes :  $\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$  ,  $\operatorname{erf}(0) = 0$  ,  $z \rightarrow +\infty \Rightarrow \operatorname{erf}(z) \rightarrow 1$

On obtient finalement la densité de flux en  $x=0$  :

$$q_0(t) = q(0,t) = \lambda \frac{(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi \alpha t}} \quad (\text{V-15})$$

*Remarque 1.* Comparons cette relation avec la relation (V-10) obtenue au paragraphe V-2-b. On voit que l'étude en ordre de grandeur avait permis d'obtenir la forme correcte de la densité de flux superficielle en fonction du temps, au préfacteur  $1/\sqrt{\pi}$  près, lequel est bien de l'ordre de 1.

*Remarque 2.* La relation (V-14) permet d'établir que l'abscisse d'une isovaleur du champ de température se déplace selon la loi  $x = k\sqrt{\alpha t}$ ,  $k$  étant une constante correspondant à l'isovaleur choisie. La solution analytique exacte confirme donc bien la validité de la relation (V-9), et donc le sens physique de la diffusivité donné au paragraphe V-2-b.

*Remarque 3.* En introduisant une nouvelle propriété thermophysique, l'effusivité  $\epsilon = \sqrt{\lambda \rho c}$ , la relation V-15 devient :

$$q_0(t) = \epsilon \frac{(T_1 - T_0)}{\sqrt{\pi t}}$$

Contrairement au cas du régime stationnaire, la densité de flux ne dépend pas uniquement de la conductivité thermique  $\lambda$ , mais aussi de la capacité calorifique volumique  $\rho c$ , laquelle provient de la variation d'énergie interne du milieu au cours du temps. La notion d'effusivité est précisée au paragraphe suivant.

### V – 3 Effusivité thermique.

#### a) Deux milieux semi-infinis en contact parfait.

La notion d'effusivité peut être explicitée par l'étude du problème suivant. Deux milieux semi-infinis de caractéristiques physiques différentes sont mis en contact à l'instant  $t=0$ . Le contact, supposé parfait, a lieu à l'abscisse  $x=0$ . Le milieu 1 occupe le demi-espace tel que  $x < 0$ , le milieu 2 le demi-espace tel que  $x > 0$  (cf. figure V-2).

On notera  $T_1$  la température dans le milieu 1,  $T_2$  la température dans le milieu 2. Le modèle mathématique correspondant à la situation que l'on vient de décrire est donné ci-dessous.

$$\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \quad \text{pour } x < 0 \text{ et } t > 0 \quad , \quad \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } t > 0$$

$$T_1(x,0) = T_{10} \quad \text{pour } x < 0 \quad , \quad T_2(x,0) = T_{20} \quad \text{pour } x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} T_1(x,t) = T_{10} \quad \text{pour } t \geq 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} T_2(x,t) = T_{20} \quad \text{pour } t \geq 0$$

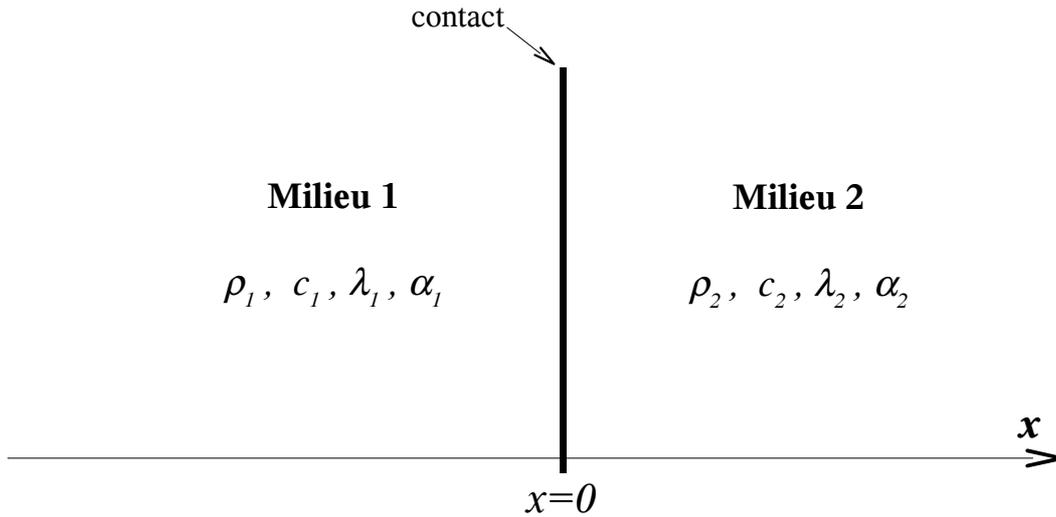


Figure V-2 : deux milieux semi-infinis en contact.

La condition de contact parfait s'écrit :  $T_1(0,t) = T_2(0,t)$

La conservation du flux thermique au contact fournit une relation supplémentaire :

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

### b) Solution analytique.

Le problème défini ci-dessus peut être résolu par la même méthode que celle utilisée au paragraphe V-2 (calcul fait en TD).

$$T_1(x,t) = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} (T_{20} - T_{10}) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_1 t}}\right) + \frac{\epsilon_1 T_{10} + \epsilon_2 T_{20}}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

$$T_2(x,t) = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} (T_{20} - T_{10}) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_2 t}}\right) + \frac{\epsilon_1 T_{10} + \epsilon_2 T_{20}}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

Avec  $\epsilon_1 = \sqrt{\rho_1 c_1 \lambda_1}$  et  $\epsilon_2 = \sqrt{\rho_2 c_2 \lambda_2}$ .

Les grandeurs  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  qui apparaissent dans la solution analytique sont appelées **effusivités** des milieux 1 et 2. L'effusivité est par définition la racine carrée du produit de la conductivité thermique  $\lambda$  par la capacité calorifique volumique  $\rho c$ . Son unité est le  $J.m^{-2}.K^{-1}.s^{-1/2}$ . Son sens physique apparaît clairement lorsqu'on calcule la température de contact  $T_c$  entre les deux milieux :

$$T_c = T_1(0,t) = T_2(0,t) = \frac{\epsilon_1 T_{10} + \epsilon_2 T_{20}}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

On constate que la température de contact est indépendante du temps. Elle est donnée par la moyenne des températures initiales des deux milieux, pondérées par les effusivités. On en déduit que le milieu qui a la plus forte effusivité tend à imposer sa température à l'autre. Le tableau V-2 contient la valeur de l'effusivité de quelques milieux.

	Air	Laine de verre	Bois	Verre	Béton plein	Acier doux	Cuivre
$\epsilon$ ( $J.m^{-2}.K^{-1}.s^{-1/2}$ )	5,5	30	$6.10^2$	$1,3.10^3$	$2.10^3$	$1,2.10^4$	$3,5.10^4$

Tableau V-2 : effusivité thermique de quelques corps à la température ambiante.

*Remarque* : le modèle décrit ci-dessus permet de comprendre pourquoi, à température égale, certains matériaux semblent plus froids que d'autres au toucher. La conductivité thermique de la peau humaine est de  $0,37 W.m^{-1}.K^{-1}$ . En assimilant sa masse volumique et sa chaleur spécifique à celles de l'eau, on peut estimer l'effusivité de la peau à environ  $1200 J.m^{-2}.K^{-1}.s^{-1/2}$ . La température d'un doigt est d'environ  $32^{\circ}C$ . Comparons les températures de contact dans le cas où le doigt est posé sur un objet en bois ou bien sur un objet en cuivre, tous deux à  $20^{\circ}C$ . Dans le cas du bois, la température de contact est donnée par :

$$T_c = \frac{1200 \times 32 + 600 \times 20}{1200 + 600} = 28,0^{\circ}C$$

Alors qu'on obtient dans le cas du cuivre :

$$T_c = \frac{1200 \times 32 + 35000 \times 20}{1200 + 35000} = 20,4^{\circ}C$$

La sensation de chaud ou de froid n'est donc pas uniquement liée à la température de l'objet touché, mais aussi à ses caractéristiques thermophysiques. Pour la même raison, la gravité des brûlures provoquées par le contact avec une surface chaude dépendra non seulement de sa température, mais aussi de son effusivité (une surface métallique chaude étant bien plus dangereuse, à température égale, qu'un isolant thermique tel que bois ou laine de verre).

## C – Introduction à la convection.

Dans tous les problèmes que nous avons traités jusqu'à présent, nous avons supposé que le coefficient d'échange thermique intervenant dans la loi de Newton était connu a priori. Or, dans la plupart des applications de la thermique, la détermination du coefficient d'échange est précisément la partie la plus délicate. En effet, dans les transferts de chaleur par convection, à la **conduction thermique** déjà présente dans les solides s'ajoute **l'advection**, transfert d'énergie induit par l'écoulement, ce qui introduit un niveau de complexité supplémentaire.

De façon générale, le but de ce chapitre est la détermination du coefficient d'échange thermique. On notera  $h$  le **coefficient d'échange local** en un point de la surface d'échange. Notons que  $h$  n'est pas nécessairement uniforme, il est susceptible de varier dans l'espace. Rappelons la loi de Newton :

$$q = h (T_f - T_p)$$

avec  $q$  la densité de flux thermique locale au point considéré,  $T_f$  la température du fluide (dont la définition exacte dépend du problème traité, nous y reviendrons par la suite),  $T_p$  la température de paroi locale. Dans le cas d'une surface isotherme, le flux transféré sur la totalité de la surface s'obtient par intégration :

$$\dot{Q} = (T_f - T_p) \int \int_S h dS$$

On peut alors définir un **coefficient d'échange moyen** sur la surface d'échange :

$$\bar{h} = \frac{1}{S} \int \int_S h dS$$

L'expression du flux de chaleur devient :  $\dot{Q} = \bar{h} S (T_f - T_p)$

Dans les applications, c'est ce coefficient d'échange moyen  $\bar{h}$  qui va nous intéresser, car c'est lui qui permet le calcul du flux de chaleur  $\dot{Q}$ , transféré sur la totalité de la surface d'échange.

On a vu dans le chapitre A-2 (cours de L2) que la convection pouvait se classer en convection naturelle, forcée, ou mixte. Dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons au cas de la convection forcée. Le chapitre C-I est consacré au traitement des **écoulements externes** (la paroi solide est immergée dans un milieu fluide infini), et le chapitre C-II aux **écoulements internes** (le milieu fluide est borné, comme dans le cas où l'écoulement a lieu à l'intérieur d'un tube).

## C – I Ecoulements externes.

### I – 1 Couches limites : approche qualitative.

#### a) Couche limite hydrodynamique.

Considérons une plaque plane placée dans un écoulement parallèle, tel que la vitesse au niveau du bord d'attaque est uniforme et égale à  $u_\infty$ . L'adhérence du fluide à la paroi ( $u=0$  en  $y=0$ ) provoque l'apparition d'une zone d'épaisseur  $\delta_H(x)$ , dans laquelle existe un gradient de vitesse. Cette zone est appelée **couche limite hydrodynamique**. Au delà de l'épaisseur  $\delta_H(x)$ , la vitesse de l'écoulement n'est plus modifiée de façon significative, et conserve la valeur  $u_\infty$  (en pratique, on peut adopter pour  $\delta_H(x)$ , par exemple, la valeur de  $y$  telle que  $u = 0,99 u_\infty$ ).

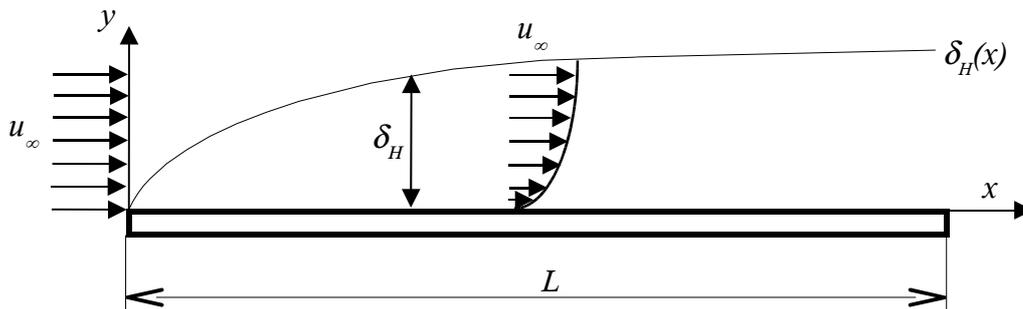


Figure II-1 : couche limite hydrodynamique.

L'apparition de cette couche limite est responsable de l'effort exercé par le fluide sur la plaque (trainée). La contrainte de cisaillement  $\tau_s$  au niveau de la plaque ( $y=0$ ), est donnée par la relation :

$$\tau_s = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

avec  $\mu$  la viscosité dynamique.

#### b) Couche limite thermique.

Supposons à présent que la température du fluide  $T_\infty$  au niveau du bord d'attaque diffère de celle de la plaque  $T_p$  (supposée isotherme dans ce qui suit). On assiste alors à l'apparition d'une **couche limite thermique**, c'est à dire d'une zone dans laquelle le gradient de température perpendiculaire à la paroi est non nul. Pour fixer les idées, supposons que la plaque soit plus chaude que le fluide. Elle cède alors de la chaleur aux particules fluides qui sont à son contact, qui elles-mêmes communiquent une partie de cette énergie aux particules des couches supérieures, et ainsi de suite. De là l'apparition d'un gradient thermique. Au delà d'une épaisseur  $\delta_T$ , que l'on appelle épaisseur de couche limite thermique, le gradient peut être supposé nul, et la température du fluide égale à  $T_\infty$ , température au niveau du bord d'attaque (en pratique, on peut adopter pour  $\delta_T$  la valeur de  $y$  telle que :  $(T_p - T)/(T_p - T_\infty) = 0,99$ ).

D'après la loi de Fourier, la densité de flux locale au niveau de la plaque (c'est à dire en  $y=0$ ) a pour composante normale à la plaque :

$$\vec{q} \cdot \vec{y} = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

avec  $\lambda$  la conductivité thermique du fluide. Si l'on adopte  $T_f = T_\infty$  dans la loi de Newton, la définition du coefficient d'échange local  $h$  prend la forme ci-dessous :

$$h = \frac{\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{(T_\infty - T_p)} \quad (\text{I-1})$$

*Remarque :* on a donc adopté  $T_f = T_\infty$  dans la loi de Newton, ce qui est toujours le cas pour les écoulements externes, c'est-à-dire les écoulements tels que l'on peut trouver une distance à la paroi au delà de laquelle ni le champ de vitesse ni le champ de température ne subissent l'influence de la paroi.

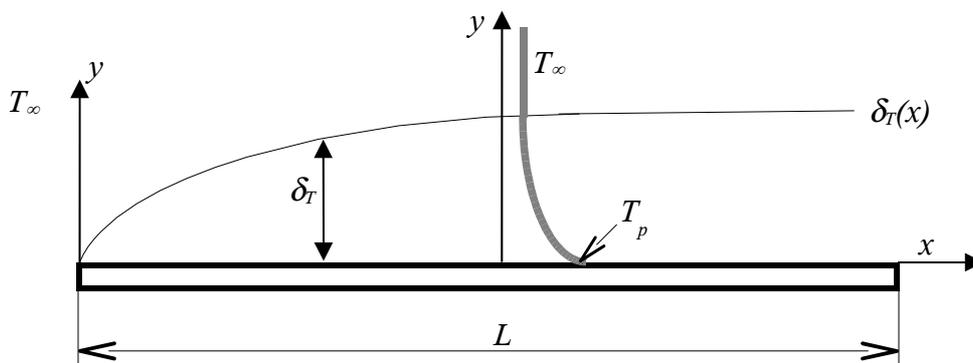


Figure II-2 : couche limite thermique (le dessin correspond au cas  $T_p > T_\infty$ ).

En remplaçant les termes de la relation (I-1) par leur ordre de grandeur, on obtient un résultat très important :

$$\bar{h} \sim \frac{\lambda \frac{T_\infty - T_p}{\delta_T}}{T_\infty - T_p} \Rightarrow \bar{h} \sim \frac{\lambda}{\delta_T} \quad (\text{I-2})$$

On reconnaît ici la conductance d'un mur plan d'épaisseur  $\delta_T$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . Le coefficient d'échange est donc **la conductance de la couche limite thermique**.

### c) Transition vers la turbulence.

Essayons d'aller un peu plus loin dans la description qualitative des couches limites. L'écoulement sur la première partie de la plaque est régulier : chaque particule fluide suit une ligne de courant bien déterminée, l'écoulement est **laminaire**. Si la longueur de la plaque se prolonge au delà d'une certaine valeur que nous noterons  $x_c$  (distance critique), on observe une déstabilisation de l'écoulement, qui devient **turbulent**. Une zone intermédiaire, appelée zone de transition, s'étend entre les zones laminaire et turbulente. Le coefficient d'échange  $h$  que nous recherchons n'est évidemment pas le même dans les deux régimes.

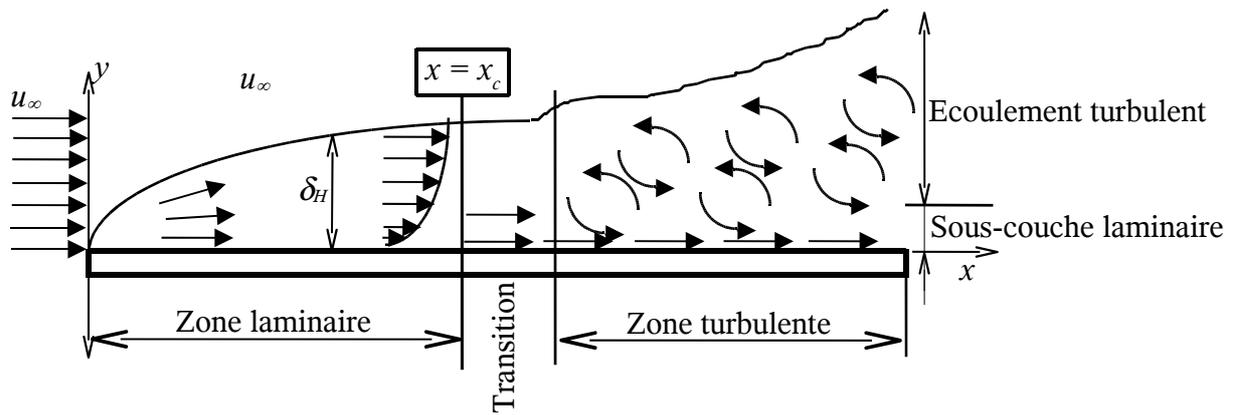


Figure II-3 : transition entre les régimes laminaire et turbulent.

## I – 2 Etude du régime laminaire.

### a) Equations de conservation.

Dans toute cette partie, nous retiendrons les hypothèses ci-dessous, sauf spécification contraire.

**H1 - Fluide newtonien incompressible.**

**H2 - Régime stationnaire.**

**H3 - Propriétés physiques du fluide constantes (donc indépendantes de la température).**

**H4 - Forces volumiques (dont le poids) négligeables.**

**H5 - Dissipation visqueuse négligeable.**

Avec ces hypothèses, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent respectivement, en coordonnées cartésiennes et pour un problème bidimensionnel selon les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  (cf. cours de mécanique des fluides de L3) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I-3a})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I-3b})$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I-3c})$$

Le vecteur vitesse est noté  $\vec{V} = u \vec{x} + v \vec{y}$ , la pression  $p$ , la masse volumique  $\rho$  et la viscosité cinématique  $\nu = \mu/\rho$ .

Notre but étant de déterminer le transfert de chaleur dans le fluide, nous allons avoir besoin d'une nouvelle équation de conservation, celle de l'énergie. On l'obtient de la même façon que l'équation de la conduction thermique, en appliquant le premier principe de la thermodynamique à un petit volume de matière. Contrairement au cas de la conduction thermique dans un solide, nous avons à présent affaire à un système ouvert, puisque le fluide

s'écoule. En négligeant la dissipation visqueuse, et en supposant qu'il n'y a pas de travaux autres que mécaniques, on obtient l'équation suivante :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I-4})$$

L'équation (I-4) traduit un équilibre entre l'advection (membre de gauche) et la diffusion (membre de droite). En particulier, on vérifie que si le champ de vitesse s'annule ( $u=v=0$ ), l'advection disparaît, et l'équation (I-4) se réduit à l'équation de Laplace, c'est à dire à l'équation de la conduction thermique en régime stationnaire.

Par ailleurs, on remarquera la ressemblance entre l'équation de conservation de l'énergie (I-4) d'une part et les équations de conservation de la quantité de mouvement (I-3b) et (I-3c) d'autre part. La remarque ci-dessus s'applique donc aussi aux équations de conservation de la quantité de mouvement. En effet, le transfert de cette dernière se fait par advection (membre de gauche) ou diffusion (membre de droite), et la viscosité cinématique  $\nu$  est en fait la diffusivité associée au transfert de quantité de mouvement, comme la diffusivité thermique  $\alpha$  l'est au transfert de chaleur. D'ailleurs, ces deux grandeurs jouent non seulement le même rôle dans les équations (I-3) et (I-4), mais elles s'expriment aussi dans la même unité : le  $\text{m}^2/\text{s}$ . Cette analogie entre les équations de conservation explique que les phénomènes hydrodynamiques et thermiques présentent des comportements très similaires dont, notamment, la formation de couches limites, que l'on peut observer dans les deux cas.

### b) Epaisseur de la couche limite hydrodynamique.

Nous allons à présent essayer de trouver l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique, à partir des équations (I-3) (conservation de la masse et de la quantité de mouvement). L'équation I-3a s'écrit, en termes d'ordres de grandeur :

$$\frac{u_\infty}{L} \sim \frac{\nu}{\delta_H} \quad (\text{I-5})$$

Comme l'épaisseur de la couche limite est très petite devant la longueur de la plaque ( $\delta_H \ll L$ ), on en déduit que la composante du vecteur vitesse normale à la plaque est très inférieure à la composante parallèle à la plaque ( $v \ll u_\infty$ ).

Exploitions à présent les équations de conservation de la quantité de mouvement. Le gradient de pression peut être supprimé de ces équations en prenant la dérivé partielle de (I-3b) par rapport à  $y$ , celle de (I-3c) par rapport à  $x$ , puis en soustrayant membre à membre. Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \nu \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \nu \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \nu \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \nu \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial x}$$

En tenant compte de la relation (I-5) ainsi que des inégalités  $\delta_H \ll L$  et  $v \ll u_\infty$ , la relation ci-dessus s'écrit, en termes d'ordres de grandeur :  $\frac{u_\infty^2}{L \delta_H} \sim \nu \frac{u_\infty}{\delta_H^3}$

On en tire facilement le résultat recherché :

$$\delta_H \sim \sqrt{\frac{\nu L}{u_\infty}} \quad (\text{I-6})$$

Enfin, on peut mettre ce résultat sous forme adimensionnelle, en introduisant le nombre de **Reynolds**  $Re_L = \frac{u_\infty L}{\nu}$  :

$$\frac{\delta_H}{L} \sim Re_L^{-1/2} \quad (\text{I-7})$$

Remarque : nous avons supposé pour arriver à ce résultat que l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique était très inférieure à la longueur de la plaque. D'après la relation ci-dessus, ce n'est vrai que si  $ReL \gg 1$ . Le cas des petits nombres de Reynolds ( $ReL \ll 1$ , inertie négligeable devant les frottements) qui, concrètement, correspond à l'écoulement lent d'un fluide très visqueux, ne sera pas envisagé ici.

### c) Epaisseur de la couche limite thermique dans le cas $\delta_H \ll \delta_T$

Dans ce qui suit, on se place dans le cas où l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique est très faible devant celle de la couche limite thermique. On peut alors supposer qu'en tout point de cette dernière, l'écoulement est celui que l'on trouve à l'infini loin de la plaque. En d'autres termes :  $u(x,y) \approx u_\infty = \text{constante}$ , et  $v \approx 0$ . Dans ces conditions, l'équation I-4 se simplifie :

$$\frac{u_\infty}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

On peut la simplifier encore en utilisant un argument basé sur les ordres de grandeur, et sur le fait que l'épaisseur de la couche limite thermique est très petite devant la longueur de la plaque ( $\delta_T \ll L$ ). En effet :

$$\left| \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right| \sim \frac{|T_p - T_\infty|}{L^2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right| \sim \frac{|T_p - T_\infty|}{\delta_T^2}$$

Comme  $\delta_T \ll L$ , on en déduit :  $\left| \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|$ , et l'équation de conservation de l'énergie se simplifie encore :

$$\frac{u_\infty}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{I-8})$$

A partir de cette équation, on obtient facilement l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite thermique :

$$\delta_T \sim \sqrt{\frac{\alpha L}{u_\infty}} \quad (\text{I-9})$$

Ce résultat peut se mettre sous forme adimensionnée en introduisant le nombre de Prandtl, rapport de la viscosité cinématique sur la diffusivité thermique ( $Pr = \nu/\alpha$ ) :

$$\frac{\delta_T}{L} \sim (Re_L Pr)^{-1/2}$$

Pour obtenir ce résultat, nous avons supposé que l'épaisseur de la couche limite thermique était d'une part très inférieure à la longueur de la plaque, et d'autre part très supérieure à l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique. La première hypothèse impose comme condition de validité  $(Re_L Pr) \gg 1$ . La deuxième implique :

$$\frac{\delta_H}{\delta_T} \sim Pr^{1/2} \ll 1$$

Le rapport de la viscosité cinématique  $\nu$  sur la diffusivité thermique  $\alpha$  est donc un nombre sans dimension appelé le nombre de **Prandtl**. Ce nombre ne dépend que de la nature du fluide. On a  $Pr \ll 1$  pour les métaux liquides,  $Pr \gg 1$  pour la plupart des autres liquides (eau, huiles, solvants organiques,...), et  $Pr \sim 1$  pour l'air. Une analyse plus détaillée permettrait de montrer que le rapport de l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique sur l'épaisseur de la couche limite thermique est une fonction de ce nombre et que, plus précisément :

$$Pr \ll 1 \Rightarrow \frac{\delta_H}{\delta_T} \ll 1 \quad (\text{cf. analyse ci-dessus})$$

$$Pr \sim 1 \Rightarrow \frac{\delta_H}{\delta_T} \sim 1$$

$$Pr \gg 1 \Rightarrow \frac{\delta_H}{\delta_T} \gg 1$$

L'épaisseur de la couche limite hydrodynamique est donc inférieure à celle de la couche limite thermique dans les métaux liquides, et supérieure dans les autres liquides. Dans le cas important de l'air, les deux couches ont approximativement la même épaisseur.

#### d) Coefficient d'échange thermique dans le cas $Pr \ll 1$

Dans le cas particulier  $Pr \ll 1$ , on obtient facilement l'ordre de grandeur du coefficient d'échange en combinant les relations (I-1) (définition de  $h$ ) et (I-9) (ordre de grandeur de  $\delta_T$ ) :

$$\bar{h} \sim \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\alpha L}} \quad (\text{I-10})$$

Ce résultat peut être obtenu sous forme adimensionnée en introduisant le nombre de **Nusselt**

$\bar{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{\lambda}$  en plus du nombre de Reynolds  $Re_L = \frac{u_\infty L}{\nu}$  et du nombre de Prandtl  $Pr = \nu/\alpha$  :

$$\bar{Nu}_L \sim (Re_L Pr)^{1/2} \quad (\text{I-11})$$

La solution exacte du problème peut être obtenue facilement en remarquant que sur le plan formel, l'équation (I-8) est analogue à l'équation de la conduction thermique (B-V-1). Comme l'analogie s'étend aussi aux conditions aux limites ( $T(x,y=0)=T_p$ ,  $T(x,y=+\infty)=T_\infty$ ,  $T(x=0,y)=T_\infty$ ), on en déduit le champ de température dans la couche limite :

$$\boxed{\frac{T(x,y)-T_p}{T_\infty-T_p} = \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2}\sqrt{\frac{u_\infty}{\alpha x}}\right)} \quad (\text{I-12})$$

On obtient l'expression exacte du coefficient d'échange local en combinant cette relation avec la relation (I-1) :

$$h(x) = \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\pi \alpha x}}$$

Finalement, le coefficient d'échange moyen sur la partie laminaire de la plaque s'obtient par intégration:

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\alpha L}}$$

Ce qui donne, sous forme adimensionnée :

$$\boxed{\bar{Nu}_L = 1,128 (Re_L Pr)^{1/2}} \quad (\text{I-13})$$

Rappelons que cette relation est valable en régime laminaire, lorsque  $Pr \ll 1$ .

### e) Coefficient d'échange thermique dans le cas ( $Pr \sim 1$ ou $Pr \gg 1$ )

Contrairement au cas précédent, il faut tenir compte des variations de la vitesse dans la couche limite thermique. Il faut donc commencer par résoudre le problème hydrodynamique pour obtenir le champ de vitesse, puis l'insérer dans l'équation de conservation de l'énergie (I-4) avant de pouvoir la résoudre. Malgré les simplifications basées sur le faible rapport d'aspect des couches limites ( $\delta_H \ll L$  et  $\delta_T \ll L$ ), la résolution n'est que semi-analytique (autrement dit, il faut recourir à des solutions numériques à certaines étapes). Tous calculs faits, le nombre de Nusselt moyen sur la partie laminaire de la plaque est donné par :

$$\boxed{\bar{Nu}_L = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}} \quad (\text{I-14})$$

Cette relation est valable en régime laminaire, pour  $Pr \geq 0,6$ .

## I – 3 Régime turbulent.

L'expérience montre que la distance critique  $x_c$  marquant la fin de la zone laminaire s'obtient pour un nombre de Reynolds valant approximativement  $5.10^5$  (cette valeur peut varier avec l'état de surface de la plaque, ainsi que le niveau de turbulence de l'écoulement incident). La transition entre les deux régimes s'obtient donc pour :

$$\frac{u_{\infty} x_c}{\nu} \simeq 5.10^5 \quad (\text{I-15})$$

Contrairement au régime laminaire, la résolution analytique des équations de conservation n'est plus possible, et même la simulation numérique de l'écoulement est assez lourde à réaliser. On a donc recours à des corrélations empiriques, c'est à dire basées sur de multiples expériences, au cours desquelles on fait varier les différents paramètres du problème. On obtient le résultat suivant pour le nombre de Nusselt local dans la zone turbulente :

$$Nu_x = 0,0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3} \quad (\text{I-16})$$

Cette corrélation est valable pour  $0,6 < Pr < 60$  et  $Re_{xc} < Re_x < 10^8$ .

La zone turbulente étant précédée d'une zone laminaire, le coefficient d'échange moyen sur l'ensemble de la plaque s'obtient en intégrant successivement sur les deux zones :

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \left( \int_0^{x_c} h_{lam} dx + \int_{x_c}^L h_{turb} dx \right) = \frac{x_c}{L} [\bar{h}_{lam}(x_c) - \bar{h}_{turb}(x_c)] + \bar{h}_{turb}(L)$$

Les relations (I-14) et (I-16) permettent d'obtenir :

$$\bar{Nu}_L = (0,037 Re_L^{4/5} - A) Pr^{1/3} \quad \text{avec} \quad A = 0,037 Re_{x_c}^{4/5} - 0,664 Re_{x_c}^{1/2}$$

En supposant  $Re_{x_c} \approx 5.10^5$ , il vient finalement :

$$\boxed{\bar{Nu}_L = (0,037 Re_L^{4/5} - 871) Pr^{1/3}} \quad (\text{I-17})$$

Cette corrélation étant basée sur les relations (I-14) et (I-16), elle est valable pour  $0,6 < Pr < 60$  et  $Re_{xc} < Re_L < 10^8$ . Si  $Re_{xc} > Re_L$ , l'écoulement est laminaire sur la totalité de la plaque, et il faut utiliser la relation (I-14). Enfin, tout ce qui précède est valable pour une plaque à température uniforme. Il existe dans la littérature des corrélations pour d'autres types de conditions aux limites, comme par exemple une densité de flux uniforme.

## C – II Écoulements internes.

### II – 1 Vitesse moyenne.

Nous passons à présent aux écoulements internes, c'est à dire s'effectuant dans un milieu confiné. On peut citer comme exemple un écoulement entre deux plaques planes parallèles espacées d'une certaine distance, ou bien dans un tube. Dans ce qui suit, nous nous attacherons plus particulièrement au cas du tube de section circulaire, à cause de son importance pratique évidente (dans les échangeurs de chaleur, par exemple). Les hypothèses sont les mêmes que celles retenues au chapitre C-I (fluide newtonien incompressible, régime stationnaire, propriétés physiques constantes, forces volumiques négligeables).

De façon générale, dans le cas des écoulements internes, il n'existe plus loin des parois solides d'écoulement non perturbé, dont la vitesse  $u_\infty$  nous avait servi de référence dans l'étude des écoulements externes. On adoptera donc comme vitesse de référence la vitesse moyenne sur la section  $A$  perpendiculaire à l'écoulement :

$$u_m = \frac{1}{A} \int \int_A u \, dA$$

Pour un fluide incompressible, le débit massique s'écrit :  $\dot{m} = \rho u_m A$ . Par conséquent, si la section  $A$  est constante, la vitesse moyenne  $u_m$  l'est aussi (conservation de la masse).

Le régime d'écoulement, laminaire ou turbulent, est déterminé par la connaissance du nombre de Reynolds défini de la façon suivante (cf. cours de Mécanique des Fluides de L3) :

$$\text{Re}_D = \frac{u_m D}{\nu}$$

On rappelle que l'expérience de Reynolds montre que l'écoulement laminaire correspond à un nombre de Reynolds allant de 0 à 2300. La turbulence est considérée comme pleinement développée au delà de 10 000. Entre 2300 et 10 000 s'étend la zone de transition.

### II – 2 Température moyenne.

#### a) Bilan énergétique global.

Appliquons le 1<sup>er</sup> principe de la thermodynamique au système ouvert constitué d'une tranche de fluide d'épaisseur  $dx$ , située à une abscisse  $x$  quelconque. En plus des hypothèses habituelles, déjà mentionnées, nous supposerons qu'il n'y a pas de travail mécanique autre que celui des forces de pression, que les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de pesanteur sont négligeables, et que l'on peut aussi négliger le transfert de chaleur par conduction dans la direction de l'axe du tube, devant l'advection. Dans ces conditions, et en tenant compte du fait que la vitesse et la température (et donc l'enthalpie massique), varient sur une section de l'écoulement, le bilan énergétique s'écrit :

$$\int \int_A \rho u(x+dx, r, \theta) h(x+dx, r, \theta) \, dA - \int \int_A \rho u(x, r, \theta) h(x, r, \theta) \, dA = d\dot{Q} \quad (\text{II-1})$$

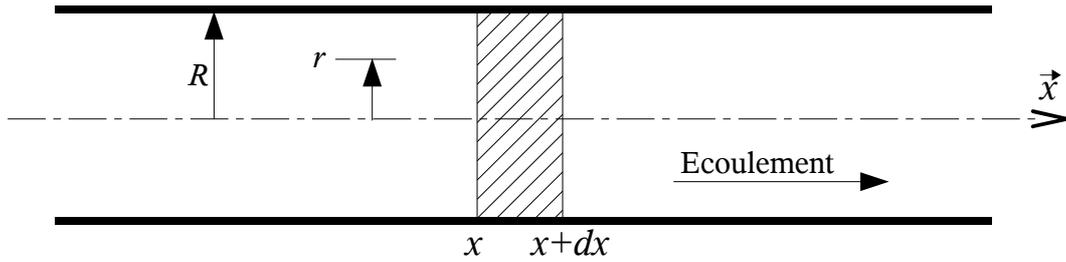


Figure II-1 : bilan énergétique sur une tranche de fluide.

On note  $(x, r, \theta)$  les coordonnées cylindriques du point considéré,  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $u$  la composante axiale du vecteur vitesse,  $h$  l'enthalpie massique du fluide, et  $d\dot{Q}$  le flux de chaleur cédé par le tube au fluide, sur le tronçon élémentaire d'épaisseur  $dx$ . Dans ce qui suit, nous allons distinguer deux cas, celui du gaz parfait et celui du liquide incompressible.

1<sup>er</sup> cas : gaz parfait.

La variation d'enthalpie massique d'un gaz parfait s'écrit :  $dh = c_p dT$ . En supposant  $c_p$  constant, on a :  $h(T) = c_p T + C$ , avec  $C$  constante d'intégration arbitraire. En portant cette relation dans (II-1), et après avoir invoqué la conservation de la masse pour éliminer  $C$ , il vient :

$$\int \int_A \rho u(x+dx, r, \theta) c_p T(x+dx, r, \theta) dA - \int \int_A \rho u(x, r, \theta) c_p T(x, r, \theta) dA = d\dot{Q}$$

Cette relation suggère d'introduire une température moyenne sur la section, définie comme suit :

$$T_m = \frac{1}{\int \int_A \rho u c_p dA} \int \int_A \rho u c_p T dA = \frac{1}{\dot{m}} \int \int_A \rho u T dA \quad (\text{II-2})$$

Imaginons un écoulement dont la température serait uniforme sur une section  $A$  et égale à  $T_m$ , cet écoulement transporterait la même enthalpie que l'écoulement réel. Avec cette définition de la température moyenne, le bilan énergétique sur la tranche de fluide d'épaisseur  $dx$  devient :

$$\boxed{\dot{m} c_p dT_m = d\dot{Q}} \quad (\text{II-3})$$

2<sup>ème</sup> cas : liquide incompressible.

La variation d'enthalpie massique s'écrit à présent :  $dh = c dT + dp/\rho$ , avec  $c=c_p=c_v$ . On a donc :  $h(T,p) = c T + p/\rho + C$ . En portant cette relation dans (II-1), et en négligeant les variations de pression sur la section du tube, on obtient :

$$\boxed{\dot{m} c dT_m = d\dot{Q} - \frac{\dot{m}}{\rho} dp} \quad (\text{II-4})$$

avec  $T_m = \frac{1}{\dot{m}} \int \int_A \rho u T dA$  .

La variation de pression  $dp$  est toujours négative (perte de charge due aux frottements). Il ressort donc de la relation (II-4) qu'en l'absence de transfert de chaleur (tube adiabatique,  $d\dot{Q} = 0$ ), un liquide qui circule dans un tube s'échauffe toujours, du fait des frottements (phénomène appelé dissipation visqueuse). Cependant, il suffit d'ouvrir le robinet d'eau froide chez soi pour se convaincre que cet effet est généralement très faible, et qu'il peut donc être négligé dans la plupart des cas. On obtient donc pour un liquide incompressible :

$$\boxed{\dot{m} c dT_m \approx d\dot{Q}} \quad (\text{II-5})$$

Comme  $c=c_p=c_v$  dans le cas d'un fluide incompressible, on voit que la relation (II-3) s'applique en fait aussi bien aux gaz parfaits qu'aux fluides incompressibles. Il faut simplement se souvenir que, dans le cas des liquides incompressibles, elle nécessite une approximation supplémentaire (négliger la dissipation visqueuse).

### **b) Température de référence.**

On a avec la température le même problème qu'avec la vitesse : il n'y a plus dans les écoulements internes de température  $T_\infty$ , correspondant à l'écoulement non perturbé. On prendra donc comme température de référence la température moyenne  $T_m$ , définie par la relation (II-2). La loi de Newton s'écrit alors :

$$\boxed{q = h(T_p - T_m)} \quad (\text{II-6})$$

avec  $q$  la densité de flux thermique locale à la paroi,  $h$  le coefficient d'échange local, et  $T_p$  la température de paroi locale.

## **II – 3 Conditions aux limites.**

### **a) Densité de flux uniforme**

Cette situation correspond au cas où une résistance électrique est bobinée sur la paroi intérieure du tube. En notant  $\dot{W}_{elec}$  la puissance électrique de la totalité de l'élément chauffant, le flux de chaleur transféré sur la tranche de fluide d'épaisseur  $dx$  s'écrit :

$$d\dot{Q} = \dot{W}_{elec} \frac{dx}{L}$$

avec  $L$  la longueur du tube. L'équation (II-3) nous donne le profil de température moyenne du fluide dans le tube :

$$\frac{dT_m}{dx} = \frac{\dot{W}_{elec}}{L \dot{m} c_p} \quad \Rightarrow \quad T_m(x) = \frac{x}{L} \frac{\dot{W}_{elec}}{\dot{m} c_p} + T_{me}$$

avec  $T_{me}$  la température moyenne du fluide à l'entrée du tube. La température moyenne à la sortie du tube s'obtient facilement :

$$T_{ms} = T_m(L) = \frac{\dot{W}_{elec}}{\dot{m} c_p} + T_{me}$$

En conclusion, dans ce type de problème (densité de flux uniforme), le bilan énergétique donne l'évolution de la température du fluide dans le tube. Il faut ensuite déterminer la température de paroi du tube, grâce à la loi de Newton :

$$T_p(x) = \frac{\dot{W}_{elec}}{hS} + T_m(x)$$

avec  $h$  le coefficient d'échange local et  $S$  la surface d'échange du tube ( $S = \pi DL$  pour un tube de section circulaire).

### b) Température de paroi uniforme.

C'est le cas d'un tube constitué d'un bon conducteur thermique. Dans ce cas, le bilan énergétique (II-3) et la loi de Newton (II-5) aboutissent à une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre, dont la solution donne le profil  $T_m(x)$  :

$$\dot{m} c_p dT_m = h p dx (T_p - T_m) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT_m}{dx} = \frac{h p}{\dot{m} c_p} (T_p - T_m)$$

avec  $p$  le périmètre du tube ( $p = \pi D$  pour une section circulaire). Cette équation est à variables séparables :

$$\int_{T_{me}}^{T_{ms}} \frac{dT_m}{T_m - T_p} = -\frac{p}{\dot{m} c_p} \int_0^L h dx \quad \Rightarrow \quad \frac{T_{ms} - T_p}{T_{me} - T_p} = \exp\left(-\frac{\bar{h} S}{\dot{m} c_p}\right)$$

Dans ce type de problème (température de paroi uniforme), la relation ci-dessus donne la température de sortie, et le flux total échangé est obtenu en intégrant la relation (II-3) sur l'ensemble du tube :

$$\dot{Q} = \dot{m} c_p (T_{ms} - T_{me})$$

## II – 4 Détermination du coefficient d'échange.

### a) Régime d'entrée et écoulement établi.

La figure II-1 représente l'écoulement d'un fluide à l'entrée d'un tube de section circulaire, de diamètre  $D$ . Comme pour la plaque plane, l'adhérence du fluide à la paroi provoque l'apparition d'une couche limite hydrodynamique, qui tend à se développer au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'entrée du tube. Mais contrairement aux écoulements externes, la couche limite ne peut pas s'étendre indéfiniment : elle est limitée par le rayon du tube. Pour  $x = x_e$ , cette couche limite occupe toute la section du tube et pour  $x > x_e$ , on parle d'écoulement établi pour la vitesse. En régime laminaire, la longueur d'établissement de la couche limite hydrodynamique est donnée par :

$$\frac{x_e}{D} = 0,05 \cdot \text{Re}_D \quad (\text{II-7})$$

En régime turbulent, la longueur d'entrée ne dépend quasiment pas du nombre de Reynolds, et vaut approximativement 10 à 60 diamètres :

$$10 \leq \frac{x_e}{D} \leq 60 \quad (\text{II-8})$$

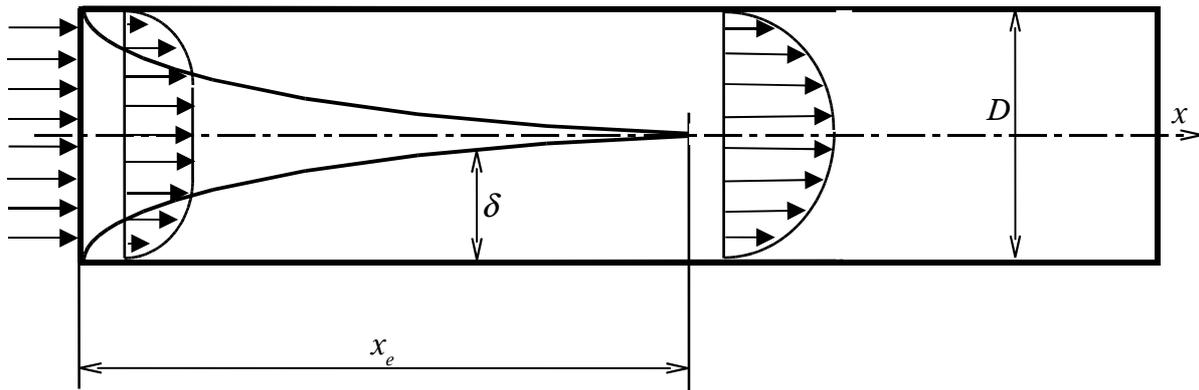


Figure II-1 : régime d'entrée de tube.

Lorsque le fluide est à une température différente de celle du tube, on assiste également à la formation d'une couche limite thermique, qui elle aussi finit par occuper toute la section du tube. La longueur d'établissement de la couche limite thermique, notée  $x_{e,t}$ , peut être obtenue, en régime laminaire, à partir de  $x_e$  et du nombre de Prandtl :

$$\frac{x_{e,t}}{x_e} = Pr$$

En régime turbulent, la longueur d'établissement thermique dépend très peu du nombre de Prandtl : elle est du même ordre que la longueur d'entrée hydrodynamique ( $x_{e,t} \approx x_e$ ).

De façon générale, la démarche couramment employée consiste à calculer d'abord le coefficient d'échange pour l'écoulement établi, puis à effectuer une correction d'entrée de tube. S'agissant du coefficient d'échange local  $h$ , cette correction d'entrée n'est pas nécessaire dès lors que l'abscisse à laquelle on se situe est supérieure aux longueurs d'établissement hydrodynamique et thermique ( $x > x_e$  et  $x > x_{e,t}$ ). En ce qui concerne le coefficient d'échange moyen  $\bar{h}$ , on peut se passer de correction dès lors que la longueur du tube est très supérieure aux longueurs d'établissement ( $L \gg x_e$  et  $L \gg x_{e,t}$ ). Nous ne traiterons dans ce cours que le problème de l'écoulement établi. Pour les corrections d'entrée de tube, se reporter aux ouvrages cités en référence.

## b) Coefficient d'échange en régime laminaire.

En régime laminaire, et pour un écoulement établi, la température varie de façon régulière entre la paroi du tube et son centre. Dans ces conditions, l'ordre de grandeur du coefficient d'échange s'obtient en remplaçant  $\delta_T$  par  $D$  dans la relation (I-6) du chapitre I-2b :

$$h \sim \frac{\lambda}{D}$$

En introduisant le nombre de Nusselt  $Nu_D = \frac{hD}{\lambda}$ , cette relation s'écrit sous forme adimensionnée :

$$Nu_D \sim 1$$

La résolution rigoureuse des équations de conservation (que nous ne détaillerons pas ici) permet d'affiner ce résultat. Dans le cas d'une densité de flux uniforme, on obtient :

$$Nu_D = 4,36$$

Pour un tube de température uniforme, on a un résultat légèrement différent :

$$Nu_D = 3,66$$

Ces résultats sont valables pour un tube de section circulaire, en régime laminaire ( $Re_D < 2300$ ), et pour un écoulement établi ( $x > x_e$  et  $x > x_{e,i}$ ).

## c) Coefficient d'échange en régime turbulent.

L'analyse précédente n'est plus valable en régime turbulent. En effet, la turbulence homogénéise la température au cœur de l'écoulement, et on observe par contre un fort gradient thermique près des parois. Comme pour la plaque plane, on a recours à des corrélations empiriques. Celles-ci sont en assez grand nombre. On n'en citera que deux. Tout d'abord, la corrélation de Dittus-Boelter (la plus simple) :

$$Nu_D = 0,023 Re_D^{4/5} Pr^n$$

avec  $n=0,4$  dans le cas du chauffage ( $T_p > T_m$ ) et  $n=0,3$  dans le cas du refroidissement ( $T_p < T_m$ ). Comme d'habitude avec les corrélations empiriques, il faut faire très attention au domaine de validité, qui correspond aux gammes de paramètres explorées lors des expériences réalisées pour les établir. La corrélation de Dittus-Boelter est valable dans les conditions suivantes, avec un incertitude sur le résultat de l'ordre de 25% :

$$\begin{array}{l} 0,7 \leq Pr \leq 160 \\ 10\,000 \leq Re_D \\ 10 \leq x/D \end{array}$$

Citons aussi la corrélation de Gnielinski, plus récente :

$$Nu_D = \frac{(f/8)(Re_D - 1000) Pr}{1 + 12,7(f/8)^{1/2}(Pr^{2/3} - 1)}$$

qui fait intervenir le coefficient de perte de charge  $f$ , que l'on peut obtenir à partir de l'abaque de Moody (cf. cours de mécanique des fluides de L3), ou en résolvant l'équation de Colebrook :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re_D \sqrt{f}} \right)$$

Le coefficient de perte de charge  $f$  dépend de la rugosité du tube  $\epsilon$  et du nombre de Reynolds  $Re_D$  (notons que l'équation de Colebrook nécessite une résolution numérique, cf. cours de Méthodes Numériques de L3). Il reste à préciser le domaine de validité de la corrélation de Gnielinski, plus large que celui de Dittus-Boelter :

$$\begin{array}{l} 0,5 \leq Pr \leq 2000 \\ 3000 \leq Re_D \leq 5 \cdot 10^6 \\ 10 \leq x/D \end{array}$$

L'incertitude associée à la corrélation de Gnielinski est de l'ordre de 10%. Plus précise que la corrélation de Dittus-Boelter, elle permet en outre de tenir compte de l'effet de la rugosité du tube, au travers du coefficient de perte de charge  $f$  (cet effet, qui est négligeable en régime laminaire, peut être significatif en régime turbulent).

Ces deux corrélations sont valables pour une densité de flux uniforme aussi bien que pour une température de paroi uniforme. Si la section du tube n'est pas circulaire, on peut tout de même les appliquer en première approximation, en remplaçant le diamètre du tube par son diamètre hydraulique  $D_h = 4A/p$  (avec  $A$  la section du tube et  $p$  son périmètre).