

Comprendre le monde, construire l'avenir®

FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

Formation expérimentale



<u>Encadrement</u>: Yann BERTHO Frédérique GIORGIUTTI L3 Physique & Mécanique Année 2012-2013

Modalités

- Les travaux pratiques d'optique s'effectuent en binômes, lors de séances de 4 heures.
- La présence des étudiants est obligatoire et toute absence non justifiée entraine une note nulle au TP concerné. Dans le cas d'une absence justifiée (certificat médical), la moyenne est effectuée sur le nombre de TP auxquels l'étudiant a participé.
- Les comptes rendus sont à rendre à la fin de la séance de TP, il est donc fortement recommandé de lire (préparer) son TP <u>avant</u> la séance. Tout compte rendu remis en retard sera sanctionné par des points de pénalité.
- Le matériel mis à votre disposition pour ces travaux pratiques est utilisé par un grand nombre d'étudiants. Comme tout matériel, il est susceptible de se dégrader avec le temps, de s'user, de tomber en panne ou de nécessiter des entretiens et des réglages. Il vous est demandé de manipuler ce matériel avec douceur et attention, et de signaler tout défaut nécessitant une intervention technique afin de le garder en bon état.

<u>Sommaire</u>

Préliminaire 1 : Équation de Bernoulli	p. 3
Préliminaire 2 : Tube de Pitot	p. 5
Mesure de viscosité	p. 7
Tension superficielle et capillarité	p. 13
Ondes acoustiques	p. 25
Mesure de débit	p. 33
Écoulement laminaire	p. 43
Sillage d'un cylindre	p. 53
Écoulement en milieux poreux	p. 61
Annexe : Calculs d'incertitude	p. 69

Préliminaire 1

Équation de Bernoulli

La relation de Bernoulli est à la base d'un grand nombre d'effets dans lesquels une variation de vitesse dans un écoulement (due par exemple au rétrécissement d'un tube) entraîne une variation de pression en sens inverse. Physiquement, cette relation exprime la conservation de l'énergie pour les fluides **parfaits** ($\nu = 0$), **incompressibles** (div $\vec{v} = 0$) et lorsque les forces en volume \vec{f} dérivent d'un potentiel ϕ ($\vec{f} = -\overline{\text{grad}}\phi$).

La relation de Bernoulli s'obtient en faisant le bilan des forces qui s'exercent sur un élément de fluide de volume V, par application de la loi de Newton

$$m\vec{\gamma} = \sum \vec{F} \,. \tag{1}$$

En intégrant sur le volume, cette équation s'écrit sous une forme plus connue qui porte le nom célèbre d'équation de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{f} + \nu\Delta\vec{v} .$$
⁽²⁾

Pour un fluide parfait en écoulement stationnaire, cette équation devient

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho \phi \right) = 0.$$
 (3)

Le produit scalaire ci-dessus représente la variation temporelle de la quantité $P = \frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho\phi$ au cours d'un déplacement le long d'une ligne de courant (tangente en tous points au vecteur vitesse). En effet,

$$\vec{v} \cdot \vec{grad} P = \frac{d\vec{M}}{dt} \cdot \vec{grad} P = \frac{dP}{dt} = 0,$$
 (4)

où $\frac{dM}{dt}$ représente la vitesse de déplacement d'une particule de fluide le long d'une ligne de courant. On déduit de ceci la première forme de **la relation de Bernoulli** :

 $\frac{1}{2}\rho v^2 + p + \rho \phi =$ Cte le long d'une ligne de courant.

On appelle *p* la pression statique, la quantité $\rho v^2/2$ homogène à une pression est appelée pression dynamique et la somme $p + \rho v^2/2$ est appelée pression totale ou pression de stagnation

•

Préliminaire 2

Le tube de Pitot

Le tube de Pitot est un appareil qui permet de mesurer la vitesse d'un écoulement en un point grâce à la mesure d'une différence de pression. Il représente une application directe de l'équation de Bernoulli (*cf.* préliminaire 1). C'est un appareil simple et bon marché, fiable pour les fluides parfaits. Son fonctionnement peut être schématisé de la manière suivante :

Soit un obstacle cylindrique fixe situé dans un écoulement plan stationnaire d'un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ (Fig. 1). Les génératrices de l'obstacle sont supposées perpendiculaires au plan de l'écoulement. Certaines lignes de courant passent "d'un côté" de l'obstacle, d'autres de "l'autre côté". La séparation se fait par une ligne frontière que rencontre l'obstacle en un point *R* dit "point de stagnation" en lequel la vitesse du fluide est nulle. La pression p_R en ce point peut être mesurée en le reliant à un manomètre.

Soit *M* un point situé sur la ligne de courant rencontrant l'obstacle en *R*. Si *M* est situé suffisamment loin en amont de l'obstacle et si l'écoulement est à vitesse uniforme avant de rencontrer l'obstacle, \vec{v}_M représentera la vitesse de l'écoulement à l'infini amont.

Le tube de Pitot est relié à un manomètre différentiel rempli d'un liquide de masse volumique ρ' . Montrons qu'alors la différence des niveaux du liquide dans le manomètre, qui mesure la différence de pression entre les trous R et A, permet de calculer \vec{v}_M . On a



Figure 1 : Principe du tube de Pitot.

La relation de Bernoulli appliquée à la ligne de courant MR permet d'écrire

$$p_R = p_M + \frac{1}{2}\rho v_M^2, \qquad (6)$$

où p_R est égale à la pression de stagnation ou pression totale et p_A est la pression statique en paroi.

La pression en A à la surface du tube est pratiquement égale à la pression en A' (juste au dessus de la couche limite). Si le nombre de Reynolds est élevé, la pression en A' est pratiquement égale à la pression en M'. En effet, $p_{A'} + \frac{1}{2}\rho v_{A'}^2 = p_{M'} + \frac{1}{2}\rho v_{M'}^2$ et $v_{A'} \approx v_{M'}$. Enfin, les pressions en M et M' sont pratiquement égales. Finalement l'égalité des pressions en A et M, et les équations (5) et (6) permettent de calculer v_M :

$$v_{M} = \sqrt{2\frac{\left(\rho' - \rho\right)}{\rho}gh} \,. \tag{7}$$

MESURE DE VISCOSITÉ

I - QUELQUES ÉLÉMENTS DE RHÉOLOGIE

La mesure de la viscosité d'un fluide fait partie de la *rhéologie*, qui est la science des écoulements de la matière.

Dans la suite, on notera :

- η la *viscosité dynamique* d'un liquide. L'unité S.I. est le Pa.s, parfois appelé Poiseuille (1Pl=1Pa.s), une autre unité commune étant le Poise (1Po = 0,1Pa.s),
- $v = \eta / \rho$ la *viscosité cinématique*, où ρ est la masse volumique du liquide. L'unité S.I. est le m².s⁻¹, une autre unité commune étant le Stokes avec 1St= 1cm².s⁻¹ = 10⁻⁴ m².s⁻¹.

On remarquera que la viscosité cinématique ν a la dimension d'un coefficient de transport : c'est le coefficient de diffusion de la quantité de mouvement à travers le fluide.



Fig. 1.

Considérons un fluide de viscosité η compris entre deux plaques solides parallèles de surface *S* séparées par une petite épaisseur *e*. La plaque inférieure est fixe tandis que la plaque supérieure est mobile. Appliquons une force *F* à la plaque supérieure dans la direction *x* : chaque élément de fluide est alors soumis à la contrainte tangentielle $\tau = F/S$. Sous l'effet de cette contrainte, le fluide est mis en mouvement. En régime stationnaire, c'est-à-dire quand le gradient de vitesse à la paroi supérieure a eu le temps de diffuser vers la paroi inférieure en envahissant tout le fluide, le profil de vitesse v(z) est linéaire ("écoulement de Couette plan"): la vitesse à la paroi supérieure est la vitesse *V* de la plaque, et la vitesse à la paroi inférieure est nulle, car en général il y a non glissement aux parois. Le gradient de vitesse, encore appelé "taux de cisaillement"¹, est $\dot{\gamma} = V/e = dv/dz$.

¹ Le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est la dérivée temporelle du taux de déformation $\gamma = \frac{dx}{dz}$.

Mesure de viscosité

La relation entre la contrainte et le taux de cisaillement est une relation linéaire pour les fluides visqueux, dont le coefficient de proportionnalité est la viscosité dynamique du fluide :

$$\tau = \eta \frac{dv}{dz} = \eta \dot{\gamma} \tag{1}$$

La viscosité η est donc égale au rapport $\tau / \dot{\gamma}$. La courbe $\tau(\dot{\gamma})$, appelée "rhéogramme", présente des allures différentes suivant selon la nature des fluides.

Un fluide est dit **newtonien** si sa viscosité est constante en fonction du taux de cisaillement (Fig. 2(a)). C'est le cas de nombreux liquides simples, tels que l'eau ou le glycérol.

Un fluide est dit **rhéofluidifiant** si sa viscosité diminue lorsque le taux de cisaillement augmente (Fig. 2(b)). C'est le cas par exemple des bonnes peintures qui sont fluides à l'étalement mais plus visqueuses sur le mur, évitant ainsi les "coulures".

Un fluide est dit **rhéoépaississant** si sa viscosité augmente lorsque le taux de cisaillement augmente (Fig. 2(c)). C'est le cas par exemple d'une suspension concentrée de maïzéna.

Un fluide est dit **à seuil** s'il faut dépasser un seuil en contrainte τ_s avant qu'il ne puisse s'écouler (Fig. 2(d)). C'est le cas par exemple du fluide injecté au niveau du train de tige dans un forage pétrolier.

Il existe évidemment des fluides présentant des mélanges de ces différents comportements, ainsi que des fluides dont le comportement en écoulement dépend de leur histoire, ce qui se manifeste par exemple par un hystérésis dans le rhéogramme (les courbes correspondant à une montée et à une descente en taux de cisaillement ne se superposent pas).



Fig. 2.

Il y a plusieurs types de viscosimètres. Les plus couramment utilisés sont les viscosimètres capillaires et les viscosimètres à cylindres rotatifs.

II. VISCOSIMÈTRE A CYLINDRES ROTATIFS (COUETTE CYLINDRIQUE)

Le principe de ce viscosimètre est dû à Couette (1890) et c'est la raison pour laquelle il est communément appelé viscosimètre de Couette.

Ce type de viscosimètre est très employé dans la recherche fondamentale mais aussi dans de nombreux secteurs industriels : polymères, peintures, ciments, agroalimentaire (rhéologie de la sauce tomate, du nectar de pêche ou du chocolat fondu,...).

Mesure de viscosité

Le liquide de viscosité η à étudier est placé entre deux cylindres coaxiaux verticaux (Fig. 3). Le cylindre extérieur (rayon R_2) est en général fixe tandis que le cylindre intérieur (rayon R_1) est animé d'un mouvement de rotation qui peut être à vitesse de rotation constante Ω imposée (on mesure alors la contrainte τ) ou bien à contrainte τ imposée (on mesure alors la vitesse de rotation Ω).

On montre que la contrainte τ à laquelle est soumis le cylindre intérieur lorsqu'il tourne à la vitesse Ω est proportionnelle à la viscosité η et à la vitesse de rotation Ω via un coefficient prenant en compte les caractéristiques géométriques de l'appareil (rayons et longueur des deux cylindres, effets d'extrémités).



Le couple qu'il est nécessaire d'exercer sur le cylindre intérieur pour le faire tourner à la vitesse de rotation Ω est :

$$\Gamma = \frac{4\pi\eta \Omega R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_l^2} l$$

Le profil de vitesse entre les deux cylindres en régime laminaire est donné par:

$$v(r) = \Omega \frac{1}{\frac{R_2^l}{R_1^l} - 1} (-r + \frac{R_2^2}{r})$$

1. MATERIEL

Description.

Vous disposez d'un viscosimètre de type Brookfield LVDII+.

Deux configurations sont possibles:

a) - le liquide à étudier est placé dans un bécher. Le cylindre extérieur est constitué par un cavalier fixe qui trempe dans le liquide. Le rotor est un cylindre (Spindle) qui plonge dans le

liquide et est relié au motor. Quatre formes de cylindres sont disponibles, mais les caractéristiques géométriques de ce montage sont assez mal définies. Pour connaitre la vraie valeur de la viscosité, il est utile d'étalonner avec une huile de viscosité connue (feuilles d'étalonnage disponibles dans la salle de TP).

Les vitesses disponibles sont en tours par minute: 60, 30, 12, 6, 3, 1, 1.5, 0.6, 0.3 et 100, 50, 20,10, 5, 4, 2.5, 2, 1,0.5.

La viscosité maximale mesurable est 2000 Pa.s et correspond à un couple maximal que peut supporter le ressort de torsion de 673,7 10⁻⁷ N.m. L'affichage du couple mesuré est donné en % par rapport à ce couple maximal.

b) - pour les très faibles viscosités (celle de l'eau par exemple), on dispose d'un équipement spécial (ULAdapter) constitué d'un cylindre extérieur de diamètre connu. La viscosité maximale que l'on peut mesurer avec est 2 Pa.s. Le code d'entrée pour cet adaptateur est : 00. Caractéristiques géométriques:

longueur effective 92.39 mm (en prenant en compte les effets de bords),

diamètre externe= 27.6 mm

diamètre interne= 25.15 mm

Plus généralement les grandeurs caractéristiques de l'appareil sont:

- TK, la constante de torsion du ressort (0.09373 pour le LVDII+)

- SMC caractérisant le rotor (spindle), et SRC pour le taux de cisaillement.

On mesure une vitesse en tour par minute (RPM) et un couple (Torque) en % du couple maximal.

La viscosité (en mPa.s) est donnée par : (100/RPM)*TK*SMC*Torque

Le taux de cisaillement (sec⁻¹) est donné par: RPM*SRC

La contrainte (dyn/cm²) est donnée par: TK*SMC*SRC*Torque

Spindle	Code d'entrée	SMC	SRC	
ULA	00	0.64	1.223	
LV1	61	6.4	0	
LV2	62	32	0	
LV3	63	128	0	
LV4	64	640	0	

Tableau 1.

La viscosité maximale mesurable est donc en Pa.s: : 10*TK*SMC/RPM Soit pour la plus petite vitesse: RPM=0.3

Spindle	viscosité
	maximale
	en Pa.s
ULA	2
LV1	20
LV2	100
LV3	400
LV4	2000

Tableau 2.

Fonctionnement.

Mise en place

- Vérifier à l'aide du niveau à bulle l'orientation du dispositif. Rectifier si besoin.

- Allumer l'appareil (interrupteur derrière) et suivre les indications affichées.

- Visser la petite vis d'accrochage du rotor <u>délicatement</u>, dans le <u>sens inverse</u> du vissage classique en <u>maintenant la partie supérieure</u> reliée au ressort.

Ce système d'accrochage est la partie **FRAGILE** du dispositif.

- Fixer alors le crochet puis le rotor (Spindle) dans le cas du dispositif UL, soit directement le rotor.

- Remplir le stator avec le liquide à étudier (dans le dispositif UL: au moins 15 ml)

- Faire descendre délicatement le rotor dans le liquide

- Dans le cas de l'adaptateur UL, fixer le stator quand il a atteint la butée à l'aide de la vis située à l'arrière de la tige.

- Appuyer sur une touche pour passer aux mesures.

Affichage:

Mode: type de mesure effectuée (couple, viscosité...)

Spindle: type de rotor

vitesse en RPM

température en $^\circ \! C$ (On dispose d'uns sonde de température que l'on peut plonger dans le bécher)

Menus:

Les touches de fonction permettent de sélectionner une fonction ou une zone d'affichage. Les flèches permettent de faire défiler les valeurs possibles de ces fonctions.

Select Display: on peut afficher le couple mesuré (%), la viscosité (en mPa.s) la contrainte de cisaillement SS (en N/ m2), le taux de cisaillement SR (en s⁻¹).

Select Spindle: permet d'afficher le code du rotor, valider en réappuyant sur la touche.

Set Speed: valide la valeur de la vitesse.

Auto range: valeur maximale de la viscosité mesurable.

Conseils:

- commencer toujours par les vitesses faibles

- attendre le régime stationnaire

- en cas d'instabilité de mesure, augmenter la vitesse. Si le couple dépasse la valeur limite, un message d'erreur apparaît.

A la fin de l'expérience, démonter délicatement le rotor. Nettoyer et ranger l'ensemble des accessoires.

2. MANIPULATION

a) Etude rhéologique.

Cette partie doit vous permettre de déterminer les caractéristiques rhéologiques de deux fluides suffisamment visqueux de consommation courante: un shampooing et une crème à récurer .

Pour chaque fluide:

Mesurez le couple (ou contrainte) pour différentes vitesses de rotation (ou taux de cisaillement), en utilisant le cylindre le plus approprié. Il faudra en essayer plusieurs afin de déterminer celui dont la gamme de viscosité est optimale pour le liquide étudié.

Déduire des mesures précédentes, l'évolution de la viscosité mesurée en fonction du taux de cisaillement (ou vitesse de rotation).

A quelle classe appartient le fluide étudié ? Commentez.

b) Influence de la température.

A l'aide du bain thermostaté mis à votre disposition, étudiez l'évolution de la viscosité du shampooing en fonction de la température. Il est important d'attendre suffisamment longtemps entre chaque mesure afin que la température désirée ait le temps de s'établir dans la cuve. Il est conseillé de faire au moins une dizaine de températures différentes.

Commentez la courbe obtenue.

c) Influence de la dilution.

Préparez deux ou trois solutions différentes de crème à récurer diluée avec de l'eau pure en proportions connues (faire des dilutions importantes).

En comparant les courbes (couple, vitesse de rotation) dans le cas non dilué et dans les cas dilués, déterminer l'influence de la dilution sur le comportement rhéologique de la crème à récurer.

TENSION SUPERFICIELLE ET MOUILLAGE

Lors de son voyage lunaire, le Capitaine Haddock fait une expérience remarquable. Il observe qu'une goutte d'eau (certes un peu alcoolisée) en apesanteur est sphérique (Fig. 1) : le liquide minimise ainsi son énergie de surface. Les molécules d'une phase condensée (solide ou liquide) sont en effet soumises à des forces cohésives avec leurs voisines. Créer une interface revient donc à perdre une partie de cette énergie de cohésion, cette énergie à payer est l'énergie de surface E_s . Elle est proportionnelle à l'aire de l'interface A et à un coefficient γ dénommé tension de surface :

 $E_{s} = A\gamma$



Cette tension de surface est à l'origine des phénomènes capillaires qui sont omniprésents à l'échelle submillimétrique : formation des gouttes de pluie, mouillage (ou non-mouillage) d'un solide par un liquide, montée de ménisques sur des solides, imprégnation des matériaux poreux ou sustentation d'insectes à la surface d'une mare (Fig. 2).



Figure 2.

L'objectif de ce TP est de mesurer cette quantité par les techniques les plus courantes. Son unité de mesure est le N/m où J/m^2 . Après deux expériences illustrant de manière qualitative l'importance de la tension superficielle dans des phénomènes alors appelés "capillaires", le texte ci-dessous vous propose trois expériences quantitatives ayant pour but la mesure de la tension superficielle d'une interface liquide-gaz.

I - QUELQUES ILLUSTRATIONS DE PHENOMENES CAPILLAIRES.

1. Force exercée sur la ligne bordure d'une interface.

Tendre un film d'eau savonneuse sur un cadre comportant une boucle de fil, et percer le fil au centre de la boucle. Observer et commenter.



2. Forme d'un film de savon supporté par un cadre

Tremper dans l'eau savonneuse les différents supports que vous avez à votre disposition. Observez les formes obtenues et commentez.



II - MESURES DE TENSION SUPERFICIELLE.

La tension superficielle d'une surface de liquide est très sensible à l'état de propreté de cette surface. Les principales sources de contamination d'une interface sont les impuretés chimiques (surtout les tensio-actifs) et la poussière de l'air. Une contamination se traduit en général par un abaissement de la tension superficielle. L'eau est particulièrement difficile à garder propre. Dans les expériences qui suivent quelques précautions seront à prendre :

- Utiliser des récipients propres et secs ;
- Ne pas laver la verrerie avec un produit détergent quelconque (savon, liquide-vaisselle,...);
- Recouvrir immédiatement les échantillons qui ne sont pas utilisés ;
- Aspirer la surface du liquide, pour avoir une propreté maximum juste avant une mesure.

A. METHODE D'ARRACHEMENT (Film d'animation sur : www.kruss.fr)



On plonge un anneau dans le liquide dont on veut mesurer la tension superficielle, il est important que le liquide mouille bien l'anneau. Quand l'anneau est plongé dans le liquide, il est soumis à son poids qui le tire vers le bas, à la poussée d'Archimède qui s'y oppose et aux forces de tension superficielle qui le tirent vers le bas. Grâce à un dynamomètre on peut mesurer la résultante de ces forces.

Pour éliminer la contribution de la poussée d'Archimède, il suffit de « sortir » le plus possible l'anneau de l'eau en abaissant **lentement** le support sur lequel le récipient contenant le liquide est posé.

Juste avant que l'anneau ne s'arrache du liquide, la force mesurée atteint son maximum : elle est alors égale à la somme du poids et de la force capillaire. En déterminant le poids de l'anneau quand il est hors de l'eau, il est alors facile de mesurer la force capillaire qui retient l'anneau dans le liquide. Cette force est égale à γL où γ est la tension superficielle du liquide (en N.m⁻¹ ou J.m⁻²) et $L=4\pi R$, la longueur d'anneau en contact avec le liquide, soit 2 fois le périmètre, R étant le rayon de l'anneau.

Faire l'expérience avec de l'eau pure et estimer la tension superficielle de l'eau pure. Ajouter un peu de liquide vaisselle et comparer. Commenter.....

B. METHODE DE LA GOUTTE PENDANTE

Cette méthode est basée sur la forme de gouttes à l'équilibre. Les petites gouttes tendent à être sphériques car les effets de tension superficielle dépendent de la surface de la goutte (sphère = surface minimale). Les effets gravitationnels, qui dépendent du volume de la goutte, entraînent des distorsions. Lorsque les effets de tension superficielle et les effets gravitationnels sont a l'équilibre, on peut déterminer la tension superficielle d'un liquide en fonction de la forme de la goutte obtenue.

La méthode de la goutte pendante est une méthode couramment utilisée, qui nécessite une faible quantité de liquide et qui permet d'obtenir de façon rapide une mesure relativement précise de la tension superficielle. Elle ne peut cependant pas être utilisée dans le cas de liquides volatils. La procédure générale consiste à former, à 1'aide d'une aiguille, une goutte à 1'équilibre, c'est à dire juste avant qu'elle ne tombe. On mesure ensuite certaines de ses dimensions (Annexe B) à 1'aide d'une image numérique.

a) Matériel

1) Dispositif expérimental

Pour la formation des gouttes, nous disposons d'un système composé d'une seringue micrométrique d'un volume de 2 ml, d'un tuyau en silicone et d'une aiguille à bout plat, en acier inoxydable, de 0.8 mm de diamètre extérieur et de 0.5 mm de diamètre intérieur.

Les images de gouttes sont acquises par une caméra CCD. Elles sont ensuite transmises à un ordinateur équipé d'une carte graphique et d'un logiciel d'acquisition Studio Version 9 (Annexe D). Les images sont ensuite traitées avec le logiciel de traitement d'images ImageJ (voir annexe E). Pour des raisons pratiques, les images acquises par la caméra sont également visualisées sur un moniteur complètement indépendant de l'ordinateur. Il sert à déterminer le moment où la goutte est à l'équilibre.

Pour obtenir un bon contraste de l'image, on utilise un éclairage diffus obtenu en plaçant une fibre optique derrière une plaque de plexiglass. La fibre optique est reliée à une lampe dont l'intensité est réglée à son minimum.

Tension superficielle et mouillage

La distance optimale objectif-goutte x (cf. schéma du dispositif, figure 2) a été déterminée à environ 13 cm; on obtient alors le meilleur compromis entre grossissement et qualité de l'image. La distance diffuseur-goutte x' est de 30 cm et la distance fibre optique-diffuseur x'' de 22 cm. La distance diffuseur-goutte joue sur le contraste de l'image obtenue. La hauteur de la seringue millimétrique n'a aucune influence sur les résultats mais doit être fixe au cours d'une manipulation afin d'éviter toute instabilité.

Le matériel utilisé doit être le plus propre possible.

2) traitement de l'image

L'acquisition de l'image d'une goutte se fait à l'aide du logiciel Studio et le traitement de cette image afin d'obtenir les valeurs d_e et d_s nécessaires au calcul de la tension superficielle à l'aide du logiciel ImageJ (Annexe F)

b) Manipulation

Avant de commencer les mesures, il faut s'assurer que la lampe, la caméra et l'écran de contrôle sont en marche. Afin d'obtenir une image nette de la goutte, il est conseillé de placer l'objectif de la caméra à environ 13 cm de la goutte.

Il est tout d'abord nécessaire de déterminer la correspondance entre le nombre de pixels sur l'écran de l'ordinateur et la valeur réelle de l'objet mesuré. Cet étalonnage se fait à partir du diamètre extérieur de l'aiguille dont nous connaissons le diamètre exact (0.8 mm dans notre cas). Cet étalonnage doit se faire chaque fois qu'il y a eu mouvement (volontaire ou non) de la caméra. Il est aussi recommandé de l'effectuer entre deux séries de mesures éloignées dans le temps.

<u>Etalonnage</u>

Afin de mesurer avec exactitude le diamètre extérieur de l'aiguille, il faut tout d'abord acquérir l'image de cette aiguille puis obtenir le contour seul de l'aiguille à l'aide du logiciel de traitement d'image (voir Annexe E).

Image d'une goutte

Une goutte est à l'équilibre juste au moment où elle est sur le point de tomber. Une des difficultés de cette mesure réside dans le fait qu'il n'est pas facile d'acquérir l'image de la goutte juste à ce moment là.

Mesure de la tension superficielle de l'eau et d'une huile silicone

Pour l'eau et une huile silicone, déterminer à partir des valeurs de d_e et d_s , la tension superficielle. Evaluez les incertitudes sur d_e et d_s et sur les valeurs de la tension superficielle.

C. METHODE DU GOUTTE A GOUTTE ET LOI DE TATE

La méthode du "poids de la goutte" est sans doute la méthode la plus facile à mettre en œuvre pour mesurer les tensions de surface des interfaces liquide-liquide ou liquide-gaz. Cette méthode, très ancienne a été mise au point par Tate (1864).

Manipulation.

On dispose du même matériel utilisé précédemment pour former des gouttes (aiguille, seringue, tuyau en silicone). On peut aussi utiliser une burette graduée.

Pour déterminer la masse d'une goutte, on utilise une balance de précision. On fait tomber un nombre déterminé de gouttes (au moins 100) dans un récipient posé sur la balance. Plus le nombre de gouttes est élevé, plus la précision sur la masse d'une goutte est grande.

Déduisez-en la masse d'une goutte, puis la tension superficielle des liquides étudiés dans la partie précédente (eau et une huile silicone), avec les formules données en Annexe C. Le facteur f est déterminé par interpolation linéaire des valeurs données dans l'Annexe C. Vous n'oublierez pas de noter la température ambiante. Evaluez les incertitudes sur les valeurs des différents paramètres mesurés et calculés.



Figure 3.

Commenter les valeurs obtenues.

Les valeurs de références, tirées de la littérature, des tensions de surface (en N.m⁻¹) de l'eau et deux huiles silicone par rapport à l'air sont données pour une température de 22°C, dans le tableau ci-dessous :

	Densité/eau	T=22°C
eau	1	73 10 ⁻³
Huile V10	0.98	20,5 10-3
Huile V1000	0.97	21,2 10-3

D. MONTEE CAPILLAIRE : LOI DE JURIN

Lorsqu'un tube capillaire est plongé dans un liquide mouillant, une colonne de liquide monte dans le tube par capillarité. Le niveau auquel il monte est lié à un équilibre entre la tension de surface (qui tend à faire monter le liquide si celui-ci mouille le solide) et la gravité.



A l'équilibre, le niveau atteint par le liquide est donné par la loi de Jurin :

$$H = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho gR}$$

Où γ est la tension de surface, Θ est l'angle de contact, ρ la masse volumique du liquide et *R* le rayon du tube capillaire. Cette équation permet de déterminer l'angle de contact connaissant la tension de surface ou inversement. Ici, nous allons travailler avec de l'huile silicone qui est parfaitement mouillant. On a donc un angle de contact Θ =0. On dispose de plusieurs tubes capillaires de différent diamètre dont les caractéristiques sont regroupées dans le tableau cidessous :

Volume	Diamètre 2R (mm)
(µL)	
5	0.29
10	0.47
20	0.63
40	1.02
100	1.39
200	1.89

Aligner ces tubes du plus petit au plus grand et tremper les tous d'un coup dans un bécher rempli d'huile silicone 100cP.

- a. Prendre une photo du résultat et mesurer la hauteur H de montée du liquide en fonction de R grâce au logiciel ImageJ (voir annexe).
- b. Représenter la hauteur finale H de montée par capillarité du liquide en fonction de R puis de 1/R.
- c. Vérifier la loi de Jurin qualitativement
- d. Extraire la tension de surface des données obtenues. La comparer à la valeur théorique.

IV. ANNEXES THEORIQUES Annexe A: Forme d'une goutte pendante.

Une goutte pendante est schématisée sur la figure ci-contre. La tension superficielle γ (N.m⁻¹) est alors donnée par: $\gamma = \frac{\Delta \rho g d_e^2}{H}$ Avec: $\Delta \rho$ (kg.m⁻³): différence de densité entre le liquide de la goutte et la phase environnante, $g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$ d_e (m): diamètre équatorial, *H*: facteur de forme,



Goutte pendante à l'équilibre

1/H est fonction de $S = d_s/d_e$, où d_s , est le diamètre mesuré à une distance d_e , du bas de la goutte. Les correspondances ont été déterminées de façon empirique et sont données dans le tableau disponible dans la salle de TP et tiré de: A.W. Adamson, *Physical Chemistry of Surfaces* (*Wiley-Interscience publication, 1990*).

Annexe B : Masse d'une goutte tombant d'un tube capillaire.

En faisant s'écouler lentement un liquide mouillant d'un tube capillaire vertical, on obtient des gouttes de masse m suivant le scénario suivant. La goutte grossit en prenant successivement les diverses formes représentées sur la figure 6 : il se forme un étranglement, puis la goutte se rompt à l'étranglement et tombe en laissant adhérer au compte-gouttes un ménisque de la forme représentée sur la figure 6(a).



Figure 6

Le problème est ici en fait un problème dynamique, qui dépend de l'écoulement du liquide et par conséquent de sa viscosité. On ne peut obtenir des gouttes de masse constante bien définie qu'en opérant lentement pour rester toujours très près des conditions d'un équilibre statique : la durée de formation d'une goutte doit être ainsi de l'ordre d'une dizaine de secondes au moins (si la goutte se forme trop rapidement, son poids est plus grand au moment où elle se détache).

Le calcul complet donnant le poids de la goutte en fonction des différents paramètres du problème est assez complexe et nous en donnerons une expression approchée par un raisonnement simple.

Le volume V de liquide suspendu en-dessous du cercle de gorge BB' est en équilibre sous les actions des forces suivantes :

- son poids apparent (corrigé de la poussée d'Archimède résultant de l'intégrale des forces de pressions sur sa surface) : force $P = (\rho_l - \rho_f) V_g$ dirigée vers le bas (on considère dans le cas où $\rho_l - \rho_f > 0$);

- la tension superficielle γ agissant sur la circonférence $2\pi r$: force $2\pi r\gamma$ dirigée vers le haut.

- la surpression de Laplace due aux deux rayons de courbure de la gorge $\Delta p = \gamma (1/r - 1/R)$ s'exerçant sur la surface πr^2 (force $\Delta p \pi r^2$ dirigée vers le bas), où *r* est le rayon du cercle de gorge et *R* le rayon de courbure dans le plan méridien (figure 7):

$$(\rho_l - \rho_f)Vg - 2\pi r\gamma + \gamma \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\pi r^2 = 0$$

d'où :
$$(\rho_l - \rho_f)Vg = \pi r\gamma (1 + \frac{r}{R})$$

Expérimentalement, on constate que le rayon de courbure R est toujours assez grand par rapport de courbure r et on négligera le terme en r/R. On confondra également le rayon r avec le rayon externe a du compte-goutte. Ces deux approximations se compensent à peu près et on a donc la formule suivante : $(\rho_g - \rho_f)Vg = \pi a\gamma$

En introduisant la masse $M = \rho_g V$ d'une goutte, la tension superficielle est donnée par :

$$\gamma = \frac{\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_g}\right)Mg}{\pi a}$$

Dans le cas d'un gaz (par exemple de l'air), la masse volumique ρ_f du fluide "ambiant" est négligeable devant celle ρ_l du liquide pendant, et alors :

$$\gamma_{l-g} = \frac{Mg}{\pi a}$$



Figure 7

Cette loi, qui exprime la proportionnalité de la masse M d'une goutte avec la tension superficielle γ du liquide et avec le rayon *a* du tube, est connue sous le nom de *"loi de Tate"*. En pratique, il faut appliquer un facteur géométrique de correction, f, qui tient compte du fait que la goutte laisse une fraction de liquide sur le tube capillaire en se détachant :

$$\gamma = \frac{\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_g}\right)Mg}{\pi f a} \quad \text{et} \qquad \gamma = \frac{Mg}{\pi f a}$$

Le facteur f dépend du rapport d'aspect $a/V^{1/3}$, où V est le volume de la goutte, et la tension superficielle est alors respectivement. Les valeurs numériques de ce coefficient pour quelques valeurs du rapport $a/V^{1/3}$ sont rapportées dans le tableau ci dessous :

-								
I	a/V ^{1/3}	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
I	f	1,4512	1,4022	1,3656	1,3258	1,3030	1,2724	1,2500
I	a/V ^{1/3}	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
I	f	1,2342	1,2186	1,2064	1,2000	1,1984	1,1996	1,2068

Remarque : si le liquide est parfaitement non mouillant, il faut remplacer le rayon externe a du tube par son rayon interne, car le liquide ne s'étale pas sur l'extrémité solide AA' (figure 7) mais reste confiné au niveau de l'orifice.

Annexe D



Annexe C

Pour enregistrer un film ou une image, ouvrir Studio Version 9.

Pour enregistrer une image :

Choisir : 2 Editer Dans Boîte à Outils, choisir Saisir image vidéo Un appareil photo apparaît. Choisir la source Entré vidéo. Appuyer sur Saisir Choisir Enregistrer sur le disque. Choisir un format tif ou jpeg.

Pour enregistrer un film :

Choisir : *1 Capturer* Puis *Démarrer la capture* en ayant modifié les paramètres si nécessaire. Choisir la durée du film. Le logiciel adapte lui-même le temps entre image en fonction du changement d'image.

Pour sélectionner une image dans un film :

Choisir : 2 Editer
Dans Album, choisir Vidéo capturée
Choisir la vidéo dont on veut extraire l'image.
On peut la visionner image par image sur l'écran qui apparaît à droite. S'arrêter sur l'image voulue.
Dans Boîte à Outils, choisir Saisir image vidéo
Un appareil photo apparaît. Choisir la source Film.
Appuyer sur Saisir
Choisir Enregistrer sur le disque. Choisir un format tif ou jpeg.

Pour tronçonner un film :

Choisir : 2 Editer Dans Album, choisir Vidéo capturée Choisir la vidéo concernée. Dans Boîte à Outils, choisir Modifier les propriétés du clip vidéo Faire glisser les deux petits ciseaux qui apparaissent dans la glissière du bas Faire agir les ciseaux (en haut à gauche).

Annexe D : Traitement d'images

Afin d'obtenir seulement le contour de l'objet présent sur l'image, plusieurs étapes sont nécessaires:

Options: Threshold permet de segmenter une image en objets et fonds sur la base de niveaux de gris.

Process: Make Binary colore 1'objet en noir et les fonds en blancs.

<u>Analyse</u>: <u>Analyse Particles</u> nous donne le contour de 1'objet si on sélectionne 1'option <u>Outline</u> <u>Particles</u>.

Enfin, Options: Threshold laisse apparaître seulement le contour de l'objet en noir.

Les mesures de longueurs se font à l'aide de l'icône *Draw Line* du menu *Tools*. On obtient une valeur du segment désiré en pixels. Connaissant la valeur réelle de ce segment, on peut alors connaître le nombre de pixels par millimètre.

La correspondance pixels-millimètres s'inscrit ensuite dans le menu <u>Analyse</u>: <u>Set Scale</u>. Il faut sélectionner le millimètre comme unité et rentrer la valeur trouvée. Lors d'une mesure, la valeur d'un segment sera alors donnée en millimètres et en pixels par le logiciel.

Le traitement d'image regroupe les quatre étapes expliquées lors de l'étalonnage.

Options: Threshold

Si le contour de la goutte ne semble pas net, spécialement dans la partie inférieure, il faut alors utiliser la commande *Smooth* dans le menu <u>Options</u>. Cette commande permet de réduire le bruit.

<u>Process</u>: Make Binary

<u>Analyse</u>: Analyse Particles

<u>Options</u>: Threshold

La première distance à mesurer est d_e qui est le diamètre horizontal de la goutte. Cette mesure se fait à l'aide de l'icone *Draw Line* du menu <u>*Tools*</u>.

Tension superficielle et mouillage

Puis cette distance d_e doit être reportée verticalement, en partant du point le plus bas de la goutte. Enfin, il faut mesurer d_s qui est la largeur de la goutte à une hauteur d_e . Afin de mieux visualiser cette partie de la goutte, il est possible de faire un zoom avec 1'icône *Zoom* (dessin d'une loupe) du menu <u>Tools</u>. Pour faire un zoom, on clique une fois sur la partie du dessin que 1'on veut agrandir. Pour annuler tous les zooms, on double-clique sur 1'icône *Zoom* dans la barre d'outils.

Tension superficielle et mouillage

ONDES ACOUSTIQUES

Le but de ce TP est d'étudier la propagation des ondes acoustiques dans les liquides et les solides, et de constater en particulier qu'il existe deux modes de propagation du son dans les solides alors qu'il n'y en a qu'un dans les liquides. Cette propriété est fondamentale en géophysique, lorsqu'il s'agit de déduire la nature du sous-sol à partir de mesures sismiques.

I- DISPOSITIF EXPERIMENTAL



Figure 1.

Le matériel utilisé est le suivant :

- un générateur d'impulsions
- deux transducteurs ultrasonores
- un oscilloscope numérique
- un goniomètre
- des plaques de matériaux différents

Les deux transducteurs ultrasonores sont identiques et fonctionnent indifféremment en émetteur ou en récepteur. Ce sont des piézoélectriques qui transforment une impulsion électrique en impulsion mécanique et réciproquement. Ils ont une fréquence propre de résonance de 1 MHz, qui constitue donc leur fréquence naturelle d'utilisation.

II. MANIPULATION

1. Mise en eau et visualisation des signaux à l'oscilloscope

Mise en eau.

Remplir la cuve d'eau de telle sorte que les transducteurs soient immergés. Ces transducteurs ont une impédance acoustique adaptée à celle de l'eau : ils émettent très bien dans l'eau mais très mal dans l'air. Le lent dégazage de l'eau se traduit par une nucléation de bulles d'air sur les faces des transducteurs qui altèrent alors considérablement l'amplitude des signaux émis et reçus. On aura soin tout au long du TP d'enlever ces bulles d'air avec le doigt.

Visualisation du signal émetteur

Synchroniser l'oscilloscope sur le générateur (relier la sortie SYNC du générateur sur l'entrée EXTERNAL TRIGGER de l'oscilloscope). Charger la configuration stockée en mémoire 1 du générateur de signaux : appuyer successivement sur les touches RECALL, ENTER NUMBER, 1, ENTER. Visualiser le signal envoyé par le générateur de signaux à l'émetteur sur la voie 1 de l'oscilloscope.

Une touche magique si l'on ne voit rien à l'écran: la touche blanche AUTOSCALE de l'oscillo numérique. Ceci reste valable tout au long du TP, par exemple en cas de fausse manoeuvre et de panique après que le signal vous paraît avoir irrémédiablement disparu...

Vérifier que le générateur envoie alors des impulsions d'une seule période à la fréquence de 1 MHz, répétées à la fréquence de 1 kHz (fig. 2).



Figure 2.

Mesurer les deux fréquences de 1 MHz et de 1 kHz avec les curseurs de l'oscillo. Ceci se réalise facilement en activant à l'écran les curseurs de la base de temps (touches CURSORS, TIME). Chaque curseur, t1 et t2, peut être déplacé en tournant le bouton correspondant voisin, après avoir été sélectionné par les touches de menus en bas de l'écran. La valeur de l'intervalle de temps entre ces curseurs, $\Delta t = t1 - t2$, vous est indiquée en bas de l'écran, ainsi que l'inverse de cet intervalle de temps, $1/\Delta t$, qui peut être une mesure de la fréquence.

Jouer sur la base de temps (TIME/DIV) et le délai (DELAY) de l'oscilloscope afin de "zoomer" ou "dézoomer" sur le signal émetteur.

Visualisation du signal reçu

Visualiser le signal reçu par le récepteur sur la voie 2 de l'oscillo en conservant à l'écran le signal émetteur.

Constater qu'il existe un fort signal parasite provenant d'une propagation électromagnétique de l'impulsion émetteur dans les fils à une vitesse proche de celle de la lumière. Ce signal parasite est reçu quasiment synchro avec l'impulsion de l'émetteur. Le signal acoustique propagé dans l'eau est beaucoup plus faible et reçu après le "temps de vol" correspondant.

Remarque : Le signal réçu peut être très bruité en raison de parasites électromagnétiques. Il est possible d'améliorer la qualité de la réception en reliant la masse de l'oscilloscope (bague métallique des connecteurs coaxiaux) aux supports des transducteurs au moyen de pinces crocodiles. Cette opération limite les "courants de masse", et donc les parasites.

2. Mesure de la vitesse de propagation dans l'eau

Mesurer le temps de vol Δt_{eau} dans l'eau : c'est l'intervalle de temps qui sépare l'émission d'une impulsion de sa réception. Mesurer la distance entre les faces émettrices et réceptrices des deux transducteurs. En déduire la vitesse de propagation V_{eau} des ondes acoustiques dans l'eau. Comparer avec la valeur donnée dans la littérature (cf tableau 1).

Que vaut cette vitesse par rapport à celle dans l'air. Pourquoi une telle différence ?

3. Mesure de la vitesse de compression dans un solide

Intercaler dans l'eau la plaque d'aluminium (Dural), d'épaisseur e = 2 ou 4 cm, sous incidence normale. Essayer d'identifier les différents pics (signal direct, 1er echo,...) dans le signal récepteur, notamment en translatant la plaque solide et en observant la translation ou non des pics. On mesurera la vitesse de compression dans le solide par deux méthodes différentes.

La première méthode consiste à mesurer le nouveau temps de vol du signal direct. Comptetenu du temps de vol dans l'eau mesuré précédemment et de l'épaisseur de la plaque, en déduire la vitesse de propagation V_p des ondes de compression dans le solide (cf Annexe théorique). Comparer avec la valeur donnée dans la littérature.

La deuxième méthode consiste à mesurer la différence de temps séparant les arrivées du signal direct et du premier écho. Il est alors facile d'en déduire la vitesse de propagation V_p des ondes de compression dans le solide compte tenu de son épaisseur *e* (cf Annexe théorique). Comparer avec la valeur donnée dans la littérature et avec la valeur déduite de la première méthode.

4. Estimation de la vitesse de cisaillement dans un solide

Désorienter l'échantillon solide $(i \neq 0)$ et observer alors l'apparition d'un deuxième pic (après le pic de compression), d'amplitude assez faible, correspondant à la propagation de l'onde de cisaillement dans le solide. Pour l'angle *i* le plus faible possible permettant la visualisation du pic de cisaillement, mesurer le temps de vol correspondant. Compte tenu du temps de vol dans l'eau et de l'épaisseur de la plaque (on supposera que la désorientation est suffisamment faible pour que la distance parcourue soit peu différente de l'épaisseur *e*), en déduire une estimation de la vitesse de propagation V_s des ondes de cisaillement dans le solide ("S" pour "*shear*", cisaillement en anglais). Comparer avec la valeur donnée dans la littérature (cf. tableau 1).

Comment se fait-il qu'il soit possible de mesurer une vitesse de cisaillement alors que la propagation du son ne peut se faire que sous la forme d'une onde de compression dans un liquide ?

5. Mesure des angles d'extinction

Constater qu'au-delà d'un certain angle d'incidence *i*, les pics provenant de l'onde de compression ou de cisaillement s'éteignent. On appelle i_{Bp} et i_{Bs} les deux angles limites

(angles de Brewster) pour l'interface eau/solide correspondant respectivement à l'extinction des deux types d'onde.

Mesurer ces deux angles. Comparer ces valeurs mesurées aux valeurs calculées (voir l'annexe). Pourquoi existe-t-il une telle différence entre les valeurs mesurées et calculées ?

6. Propagation du son dans le plexiglas

On dispose d'un autre échantillon solide, une plaque de plexigas, afin de comparer les résultats obtenus avec le Dural. Mesurer les vitesses de propagation V_p et V_s dans le plexiglas, à l'aide de la méthode de votre choix, ainsi que les angles de Brewster associés. Comparer et discuter avec les résultats obtenus pour le Dural.

	$\rho (kg/m^3)$	<i>v</i> _p (m/s)	<i>v</i> _s (m/s)
Eau	1000	1500	
DURAL	2790	6320	3130

Tableau 1 : Vitesse du son dans l'eau et le DURAL (Handbook of Physics).

ANNEXE THEORIQUE

A-1 Quelques généralités sur les ondes acoustiques

Propagation:

Un solide (supposé isotrope pour simplifier) se distingue d'un fluide par l'existence de deux modes de propagation acoustiques : une onde de **compression**, comme dans un fluide, et une onde de **cisaillement**, qui ne peut pas se propager pas dans un fluide (mode diffusif et non propagatif).

Les ondes de compression (appelées ondes P en géophysique) sont dites "longitudinales" car la vibration est parallèle à la direction de propagation. Les ondes de cisaillement (appelées ondes S en géophysique) sont dites "transverses" car la vibration est perpendiculaire à la direction de propagation. Ces deux ondes se propagent à des vitesses différentes, notées V_p pour les ondes de compression et V_s pour les ondes de cisaillement.

Que se passe-t-il à l'interface liquide/solide quant à la transmission d'une onde acoustique à travers un bloc solide parallélépipédique? Il est clair que sous incidence normale, l'onde excitée dans le solide sera uniquement une onde de compression (fig. 3a). Si l'incidence n'est plus normale, la déformation induite correspondra à la fois à un cisaillement et à une compression (fig. 3b), chacun de ces deux modes se propageant alors avec sa vitesse propre dans le milieu élastique.



Figure 3.

A la traversée de la deuxième interface, chaque onde donnera naissance à une onde de compression dans le fluide et on observera deux ondes directes arrivant à des instants différents (fig. 4). Le temps de vol correspondant à chaque signal est lié à la vitesse de propagation correspondant à chaque mode.



Figure 4.

La vitesse de propagation des deux modes, longitudinale et transverse, dépend des caractéristiques mécaniques du matériau solide considéré :

$$\mathbf{v}_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

où ρ est la masse volumique, et λ , μ sont les coefficients de Lamé (μ est le module de cisaillement ou module de Coulomb, nul dans les fluides) qui sont reliés à E, le module d'Young, et v, le coefficient de Poisson par les formules suivantes:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)}$$
 et $\mu = \frac{E}{2(1+v)}$

Remarque: Le module d'Young intervient directement dans la propagation des ondes acoustiques le long d'une tige, la vitesse de ce types d'ondes, appelées ondes d'extension, étant

$$v_{ext} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$
.

Atténuation:

Une onde acoustique subit en général une atténuation au cours de sa propagation: elle perd de l'énergie sous forme de chaleur. Ainsi son amplitude décroît exponentiellement avec la distance parcourue et le facteur entre l'amplitude en une position x_0 et celle en x_0+dx est de la forme:

$$\frac{U(x_0+x)}{U(x_0)} = \exp(-k''x),$$

où k'' est le coefficient d'atténuation (i.e, la partie imaginaire du vecteur d'onde) qui dépend du milieu de propagation et de la fréquence de l'onde.

A-2 Traversée d'un solide sous incidence normale

En absence d'échantillon, le signal direct reçu sur le récepteur situé à une distance L de l'émetteur arrive après un temps de vol $\Delta t_{eau} = L / V_{eau}$.

Avec un échantillon solide d'épaisseur e placé en incidence normale, plusieurs signaux parviennent successivement sur le récepteur (fig. 5): le signal direct (1), puis le 1er écho (2), qui arrive après s'être réfléchi deux fois sur les parois de l'échantillon, et ainsi de suite.

Le temps de vol du signal direct (1) est :

$$\Delta t_1 = (L-e)/V_{eau} + e/V_{sol}.$$

La différence entre ce temps de vol et celui dans l'eau est alors :

$$\Delta t_{eau} - \Delta t_1 = e(1/V_{eau} - 1/V_{sol}).$$

Le temps de vol du 1er écho (2) est : $\Delta t_2 = \Delta t_1 + 2e/V_{sol}$.



Notons qu'en ce qui concerne les amplitudes, deux phénomènes doivent être pris en compte:

- l'atténuation dans le milieu considéré au cours de la propagation

- les facteurs de réflexion, R, et de transmission, T, qui traduisent le fait qu'à la traversée d'une interface, une partie de l'onde est transmise et une autre partie est réfléchie. Ainsi, si une onde incidente d'amplitude U_i arrive sur une interface, l'amplitude de l'onde réfléchie sera U_r = $R U_i$ et celle de l'onde transmise sera $U_t = T U_i$.

Les coefficients R et T dépendent de l'incidence par rapport à l'interface (1)/(2). La conservation de l'énergie, proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde, se traduit par la relation:

$$R^2 + T^2 = 1.$$

Si les milieux (1) et (2) possèdent les mêmes caractéristiques mécaniques, l'onde est entièrement transmise (T = 1 et R = 0). Inversement, plus les caractéristiques mécaniques des deux milieux diffèrent, plus grande sera la proportion de l'onde réfléchie ($R \approx 1$ et $T \approx 0$).

A-3 Traversée d'un solide sous incidence $i \neq 0$

Dans le cas d'une incidence non nulle, deux ondes de différente nature sont transmises dans le solide (cf. fig. 4). Il existera alors deux facteurs de transmission T_p et T_s différents, qui dépendront de l'angle d'incidence *i* (en particulier T_s (*i*) = 0 pour *i* = 0). L'expression de ces facteurs étant compliquée, nous ne nous intéresserons dans cette partie qu'aux temps de vol des deux ondes directes se propageant dans l'échantillon.



Les calculs concernant les temps de vol étant les mêmes pour chacun des deux modes, ils peuvent être effectués en ne considérant que l'un d'entre eux: le temps de vol t de l'onde considérée ne diffère du temps de vol de référence t_e de l'onde dans l'eau que par l'intervalle de temps séparant les deux plans d'onde (P_0) et (P_1) respectivement à l'entrée et à la sortie de l'échantillon. La différence de temps de vol sera donc:

$$\Delta t_{eau} - \Delta t = \frac{x_M}{V_{eau}} - \frac{OM}{V} \tag{1}$$

où V est la vitesse de propagation dans le solide du mode considéré.

L'angle de réfraction r d'une onde acoustique est donné, tout comme en optique géométrique, par la loi de Snell-Descartes :

$$\frac{\sin i}{V_{eau}} = \frac{\sin r}{V} \tag{2}$$

L'inverse des vitesses joue ici le rôle de l'indice optique n = c / v en optique (avec c la vitesse de la lumière).

L'onde ne pourra se propager dans le solide que si $r < \pi/2$. D'après (2), il faut donc que l'angle d'incidence *i* vérifie :

$$i < i_{\rm B}$$
 avec $i_{\rm B} = \operatorname{Arcsin}(V_{\rm eau} / V).$ (3)

 $i_{\rm B}$ est appelé *angle d'extinction* ou *angle de Brewster* (par analogie avec l'optique). Au-delà de cet angle l'onde incidente ne peut plus pénétrer dans le solide.
MESURE DE DÉBIT

I - INTRODUCTION

Un premier banc de mesure permet l'étude comparée de plusieurs dispositifs de mesure de débit : un tube de Venturi, un diaphragme, un coude et un rotamètre ou débimètre à flotteur (Fig. 1), qui seront étalonnés grâce à une mesure par pesée. Le but est de comparer les différents dispositifs de mesure : linéarité, précision, sensibilité, facilité de fabrication et d'emploi, etc.

Un deuxième banc de mesure (Fig. 2) permet une étude plus détaillée du tube de Venturi. Un tube de Venturi est une conduite dont la section varie continûment. Dans la première partie du tube, les sections vont en décroissant (zone convergente) ; dans la seconde partie les sections vont en augmentant (zone divergente). Un tube de Venturi est donc un "convergentdivergent" qui est souvent utilisé pour mesurer un débit par mesure d'une différence de pression. Le principe de l'appareil est basé sur la loi de Bernoulli, valable dans l'approximation de fluide parfait, c'est-à-dire sans viscosité (*cf.* préliminaire 1). Le dispositif permet également d'étudier la perte de charge le long du dispositif de mesure, qui existe car le fluide est toujours visqueux (fluide réel).

II - MANIPULATION DU BANC EXPÉRIMENTAL "DÉBITMÈTRES"

Les deux bancs de mesures utilisent un multimanomètre qui comporte plusieurs tubes verticaux permettant ainsi de mesurer la pression à différents endroits d'une conduite par la mesure des hauteurs d'eau. Le multimanomètre n'est pas en liaison directe avec l'atmosphère : les hauts de tous les tubes débouchent dans un réservoir d'air commun muni d'une valve permettant de faire une contre-pression réglable.

A. Dispositif expérimental

Le schéma (Fig. 1) montre les différents appareils placés dans l'ordre suivant (sens de l'écoulement) :

- **tube de Venturi** : deux prises de pression sont situées l'une à l'amont (1), l'autre au col du tube (2).

- **divergent** : deux prises de pression sont situées l'une à l'entrée (3), l'autre à la sortie (4), mais ne sont pas utilisées au cours de cette manipulation.

- **diaphragme** : les deux prises de pression respectivement avant et après le diaphragme sont les prises (5) et (6). Le rayon de l'orifice est r = 10,5 mm, plus petit que le rayon de la conduite R = 25,5 mm.

- coude : la différence de pression dans le coude est obtenue à partir des prises (7) et (8).

- rotamètre : une échelle graduée permet de mesurer le déplacement du flotteur.

B. Mode opératoire

Vérification de l'horizontalité

Vérifier l'horizontalité du tube et la verticalité du manomètre ; trois vis situées à la base de l'installation permettent de faire ces réglages (si vous constatez que l'horizontalité est mauvaise contacter l'enseignant avant de faire quoique ce soit).



Figure 1 : Disposition des différents débimètres sur le montage.

Réglage de la sensibilité

Afin d'obtenir la meilleure sensibilité, il faut faire en sorte qu'on puisse avoir un écart maximum entre le niveau d'eau le plus haut et celui le plus bas. Pour ce faire, on procédera de la façon suivante :

• Avant la mise en route de la pompe, on remplira d'air le multimanomètre au maximum sans toutefois introduire d'air dans le banc d'étude. Pour cela ouvrir la valve A pour mettre le réservoir d'air à la pression atmosphérique et ouvrir la vanne aval. Refermer alors la valve A et la vanne aval W.

• Mettre en marche la pompe (bouton-poussoir vert) et ouvrir la vanne amont : l'eau à l'intérieur du tube Venturi est alors sous pression mais sans débit (car la vanne aval W est fermée), ce qui se traduit par une remontée égale des niveaux d'eau dans les tous les tuyaux du multimanomètre. Si ce n'est pas le cas, la différence est due à la présence de bulles d'air dans certains des tubes qu'il faut soigneusement et délicatement éliminer (attention à ne pas trop solliciter les points de soudure des tuyaux à la conduite principale).

• Ouvrir progressivement la vanne aval W. En écoulement, les niveaux d'eau dans les manomètres ne sont alors plus les mêmes. Procéder alors de façon itérative pour exploiter toute la gamme utile du multimanomètre :

i) Si le niveau le plus bas du multimanomètre est au zéro et si le niveau le plus haut n'est pas au maximum de l'échelle de mesure, réduire la pression de l'air en haut du

multimanomètre en ouvrant brièvement la valve : les niveaux d'eau se déplacent alors tous vers le haut.

ii) Dans le cas contraire, augmenter légèrement le débit avec la vanne aval W. Réitérer les étapes (*i*) et (*ii*) jusqu'à ce que le niveau le plus haut et le niveau le plus bas arrivent aux valeurs extrêmes de l'échelle de mesure.

• Une fois ce réglage fait, ne plus retoucher à la valve A pour tout le reste de la manipulation.

C. Mesures et analyse des résultats

Mesurer pour différentes valeurs du débit q_v (une dizaine entre 0 et le débit maximum) :

- toutes les hauteurs d'eau h_i du multimanomètre (sauf la hauteur h_4 correspondant à la sortie du divergent),
- la position *l* du flotteur du rotamètre,
- le débit q_v à l'aide de la balance.

On aura soin d'arrêter la pompe à la fin des mesures (bouton poussoir rouge).

Tracer les points expérimentaux sur 4 graphes différents:

*
$$q_{v_{exp}} = f(\sqrt{h_1 - h_2})$$
 pour le tube de Venturi,
* $q_{v_{exp}} = f(\sqrt{h_5 - h_6})$ pour le diaphragme,
* $q_{v_{exp}} = f(\sqrt{h_7 - h_8})$ pour le coude,
* $q_{v_{exp}} = f(l)$ pour le rotamètre.

Pour le tube de Venturi et le diaphragme, tracer à l'aide des formules données en annexe les courbes théoriques sur le même graphe que les valeurs expérimentales correspondantes.

Tracer sur un autre graphique, les courbes $C_q = f(\text{Re})$ du coefficient de débit du tube de Venturi et du diaphragme en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement Re = Vd / v, où *d* est le diamètre de la conduite, *V* la vitesse correspondante et *v* la viscosité cinématique du fluide ($v = \eta / \rho$, avec η viscosité dynamique et ρ masse volumique du fluide). Pour l'eau à 20°C, $\eta = 10^{-3}$ Pa.s et $\rho = 10^3$ kg/m³, donc $v = 10^{-6}$ m²/s.

Tracer enfin les courbes $\varepsilon = f(\text{Re})$ du coefficient de perte de charge du tube de Venturi et du diaphragme en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement. Pour le débit maximum, calculer la puissance dissipée P_f en Watt de chacun de ces deux dispositifs.

III - MANIPULATION DU BANC EXPÉRIMENTAL "VENTURI"

A. Dispositif expérimental

Le but de ce second dispositif expérimental est d'étudier plus en détail l'écoulement le long du tube de Venturi. Le dispositif, schématisé sur la figure 2b, est similaire au banc "Débitmètre", avec un multimanomètre à 11 prises de pression le long du tube de Venturi. Le mode opératoire est identique à celui du dispositif expérimental "débitmètres".



Figure 2 : a) Schéma d'ensemble du dispositif. b) Coupe détaillée du tube de Venturi.

B. Mesures et analyse des résultats

Relever toutes les hauteurs d'eau h_i (i = 1 a 11) du multimanomètre pour un débit maximum et pour un débit moyen que l'on mesurera.

Déterminer le profil de pression détaillé le long du tube. Sur le graphe fourni (le demander aux enseignants) qui représente la courbe d'équation

$$f(x) = \left(\frac{S_4}{S_1}\right)^2 - \left(\frac{S_4}{S(x)}\right)^2,\tag{1}$$

où S(x) est la section à l'abscisse x, reporter vos points expérimentaux correspondant à la courbe

$$g(x) = \frac{h_i(x) - h_1}{\frac{V_4^2}{2g}} \qquad (i = 2 à 11)$$
(2)

Les abscisses x correspondant aux prises de pression i sont indiquées sur le tableau du graphe fourni. Attention : il y deux bancs de mesures qui ne sont pas identiques quant aux emplacements des prises de pression le long du tube. Référez-vous au tableau correspondant à votre banc (notation prime ou non prime).

Commenter et discuter les résultats obtenus.

ANNEXE THÉORIQUE

1. Théorème de Bernoulli

a) Approximation de fluide parfait (sans viscosité)

Théorème de Bernoulli et conservation de la masse

Avec les hypothèses d'un fluide parfait (*i.e.* viscosité nulle) et incompressible ($\rho = \text{cte} \Rightarrow$ div V = 0), d'un écoulement stationnaire (indépendant du temps) et irrotationnel ($\vec{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0}$), et en considérant que la force de pesanteur dérive d'un potentiel ($\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} gz$), le théorème de Bernoulli (voir préliminaire 1), qui traduit la conservation de l'énergie le long d'une ligne de courant (chaque terme est homogène à une énergie par unité de volume) :

$$p + \rho gz + \rho \frac{V^2}{2} = cte \tag{1}$$

est valable en tout point du fluide. On dit que l'écoulement est à énergie constante.

Pour un écoulement dans une conduite de section S variable, en faisant l'hypothèse supplémentaire qu'il y a une répartition uniforme des vitesses dans chaque section droite, c'est-à-dire que les lignes de courant sont rectilignes et parallèles (ce qui n'est pas tout à fait le cas dans les zones convergentes et divergentes) la conservation de la masse s'écrit :

$$q_v = V_1 S_1 = V_i S_i = cte$$
, (2)

où V_i et S_i sont respectivement les vitesses et sections dans les différentes sections *i*. En considérant en plus que le dispositif est horizontal (z = cte), la relation de Bernoulli s'écrit :

$$p_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} = p_i + \rho \frac{V_i^2}{2} \tag{3}$$

b) Cas du fluide réel (prise en compte de la viscosité)

Théorème de Bernoulli généralisé

En conservant toutes les hypothèses précédentes sauf celle de fluide parfait, le théorème de Bernoulli généralisé, qui n'est autre qu'un bilan de puissance (pour avoir des termes homogènes à une puissance, il faut multiplier par un débit (q = VS) les termes du théorème de Bernoulli, homogènes à une énergie par unité de volume), donne :

$$V_1 S_1 \left(p_1 + \rho \, \frac{V_1^2}{2} \right) = V_n S_n \left(p_n + \rho \, \frac{V_n^2}{2} \right) + P_f \qquad (n = 2 \, \mathrm{a} \, 11) \qquad (4)$$

où le terme supplémentaire introduit, P_{f_i} représente la puissance dissipée due à la viscosité du fluide ($P_f > 0$). L'équation de conservation de la masse (2) reste valable.

2. Tube de Venturi

Utilisation du tube de Venturi en débitmètre

La combinaison des équations (2) et (3) en considérant la section correspondant au col du Venturi (par exemple i = 4), donne :

$$p_{1} - p_{4} = \rho \frac{V_{4}^{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 - \left(\frac{S_{4}}{S_{1}}\right)^{2} \end{bmatrix}$$
(5)

Or la différence de pression $p_1 - p_4$ est mesurée par la différence des hauteurs d'eau h_1 et h_4 lues dans les tubes 1 et 4 du multimanomètre différentiel : $p_1 - p_4 = \rho g (h_1 - h_4)$.

D'où la relation :

$$V_{4} = \sqrt{\frac{2 g}{1 - \left(\frac{S_{4}}{S_{1}}\right)^{2}}} \sqrt{h_{1} - h_{4}}$$
(6)

et par suite :

$$q_{V_{th}} = V_4 S_4 = S_4 \sqrt{\frac{2 g}{1 - \left(\frac{S_4}{S_1}\right)^2}} \sqrt{h_1 - h_4}$$
(7)

Répartition détaillée des pressions le long du tube de Venturi

En introduisant les hauteurs d'eau h_i , l'équation (3) s'écrit : $h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_i + \frac{V_i^2}{2g}$. En divisant par V_4 , il vient alors :

$$\frac{h_i - h_1}{\frac{V_4^2}{2 g}} = \left(\frac{S_4}{S_1}\right)^2 - \left(\frac{S_4}{S_i}\right)^2 \tag{8}$$

Utilisation du tube de Venturi en débitmètre

Dans ces conditions, $q_{v r \acute{e} e l}$ est plus petit que $q_{v t h}$ et l'on pose :

$$C_q = \frac{q_{\nu_{red}}}{q_{\nu_{th}}} \tag{9}$$

où C_q est un coefficient sans dimension appelé souvent **coefficient de débit** ($C_q < 1$), qui est fonction de la géométrie du tube et du nombre de Reynolds Re de l'écoulement.

Perte de charge due au tube de Venturi

Appliquons l'équation (4) en amont et et aval du tube de Venturi, par exemple entre les sections 1 et 11 où l'on a $S_1 = S_{11}$, c'est-à-dire $V_1 = V_{11}$ (par conservation du débit) ; il vient:

$$p_1 - p_{11} = \frac{P_f}{V_1 S_1} = \frac{P_f}{q_v}$$

Soit encore :

$$h_1 - h_{11} = \frac{P_f}{\rho g q_v}$$

On pose habituellement :

$$\frac{P_f}{q_v} = \varepsilon \rho \frac{V_1^2}{2} \tag{10}$$

soit :

$$h_{1} - h_{11} = \varepsilon \, \frac{V_{1}^{2}}{2 \, g} \tag{11}$$

où ε est un nombre sans dimension, appelé souvent **coefficient de perte de charge**, qui est fonction de la géométrie du tube de Venturi et du nombre de Reynolds Re.

3. Diaphragme en paroi mince

Un diaphragme placé dans un conduit crée une perte de charge importante. Cependant, si la section de mesure aval (6) est située à proximité (environ un diamètre) du diaphragme (figure 3) la perte de charge entre les sections amont (5) et aval (6) reste faible. La différence de pression entre les sections 5 et 6 est reliée au débit. L'expérience montre en effet que la pression est constante non seulement à l'intérieur du jet, mais aussi sur tout le reste de la section.



Figure 3 : Lignes de courant au voisinage du diaphragme.

a) Profils des vitesses dans les sections de mesure (figure 3)

- section amont (5) : A l'amont, si la section est située assez loin du diaphragme pour que l'écoulement n'y soit pas encore perturbé (environ un diamètre), le profil des vitesses est celui d'un écoulement permanent en conduit. Si l'écoulement est laminaire, le profil est parabolique, si l'écoulement est turbulent, le profil est sensiblement plat.

- section aval (6) : L'écoulement à l'aval est celui d'un jet noyé. Donc, si la section de mesure est à une distance d'environ un diamètre, les vitesses sont uniformes dans toute la section du jet.

b) Calcul du débit

Le théorème de Bernoulli non généralisé implique que la vitesse soit uniforme dans les deux sections de mesure (voir préliminaire "tube de Pitot"). Lorsqu'il n'en est pas ainsi, on peut appliquer le théorème de Bernoulli généralisé sur une surface fermée Σ ; alors, dans un écoulement permanent, s'il n'y a aucune puissance fournie ou reçue à l'intérieur d'un volume de contrôle, nous avons :

$$\int_{\Sigma} \left(p + \rho \, \mathrm{g} \, \mathrm{h} + \rho \, \frac{\mathrm{V}^2}{2} \right) \mathrm{V}_{\mathrm{n}} \, \mathrm{d}\mathrm{S} = 0$$

Appliquons cette formule à la surface fermée représentée sur la figure 2 et limitée par le contour ABCD comprenant la section amont (5), les lignes de courant limitant le jet : AC et

BD, et la section du jet CD située dans la section de mesure (6). Le long des surfaces latérales il n'y a aucun débit et il vient donc :

$$\int_{S_5} \left(p_g + \rho \, \frac{\mathrm{V}^2}{2} \right) \mathrm{V_n} \, \mathrm{dS} = \int_{\mathrm{CD}} \left(p_g + \rho \, \frac{\mathrm{V}^2}{2} \right) \, \mathrm{V_n} \, \mathrm{dS}$$

où $p_g = p + \rho gh$ est la pression motrice.

Dans les deux sections (5) et (6) la vitesse est parallèle à la direction du tube, ce qui entraîne p_g = Cte sur chacune des sections et nous obtenons alors :

$$p_{g_5} + \alpha_5 \frac{\rho V_5^2}{2} = p_{g_6} + \alpha_6 \frac{\rho V_6^2}{2}$$

où V_5 et V_6 sont les vitesses moyennes dans les sections et où α_5 et α_6 sont des coefficients numériques dépendant uniquement de la loi de répartition des vitesses. Dans le cas d'un écoulement turbulent pleinement développé (section 5) $\alpha_5 = 1,02$; dans le cas de l'écoulement uniforme (section 6) $\alpha_6 = 1$. En reportant on obtient :

$$\frac{p_{g_5} - p_{g_6}}{\rho g} = h_5 - h_6 = \frac{\alpha_5 V_5^2}{2 g} \left[\frac{\alpha_6}{\alpha_5} \left(\frac{V_6}{V_5} \right)^2 - 1 \right]$$

Par ailleurs, la conservation du volume s'écrit :

 $q_{v} = S_{5} V_{5} = \sigma V_{6} = C_{c} S_{D} V_{6}$

où $C_c = \frac{\sigma}{S_D}$, σ est l'aire du jet et S_D l'aire du diaphragme.

L'expérience montre en effet qu'au passage du diaphragme, le jet se contracte et que $\sigma < S_D$. Le coefficient de contraction C_c dépend du rapport r/R des rayons du diaphragme et du conduit, ainsi que du nombre de Reynolds de l'écoulement et de la qualité du biseau. Cependant, on peut, en première approximation, supposer qu'il ne dépend que du rapport r/R. Les valeurs suivantes sont alors suffisantes pour déterminer C_c (tableau 1). Ces valeurs, données ici dans le cas d'un canal de section rectangulaire, sont pratiquement identiques pour une section circulaire.

r/R	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$C_{\mathcal{C}}$	0,611	0,611	0,616	0,622	0,633	0,644	0,662	0,687	0,722	0,781

Tableau 1 : Valeurs de C_C, d'après "Theory of jets in ideal fluids", M.I. Gurevich.

En reportant C_c dans la relation précédente, on obtient :

$$\mathbf{h}_{5} - \mathbf{h}_{6} = \frac{\alpha_{5} \mathbf{V}_{5}^{2}}{2\mathbf{g}} \left[\frac{\alpha_{6}}{\alpha_{5}} \left(\frac{S_{5}}{\mathbf{S}_{D}} \right)^{2} \frac{1}{C_{c}^{2}} - 1 \right]$$

et en éliminant V_5 :

$$h_{5} - h_{6} = \frac{\alpha_{5} q_{v}^{2}}{2g S_{5}^{2}} \left[\frac{\alpha_{6}}{\alpha_{5}} \left(\frac{S_{5}}{S_{D}} \right)^{2} \frac{1}{C_{c}^{2}} - 1 \right]$$
$$q_{v_{fb}} = \frac{S_{5}}{\sqrt{\alpha_{5} \left[\frac{\alpha_{6}}{\alpha_{5}} \left(\frac{S_{5}}{S_{D}} \right)^{2} \frac{1}{C_{c}^{2}} - 1 \right]}} \sqrt{2g(h_{5} - h_{6})}$$

4. Coude

Deux prises de pression placées à l'amont (7) et à l'aval (8) du coude permettent de mesurer la chute de pression en écoulement réel dans le coude. Les sections S_7 et S_8 ont les mêmes valeurs et la relation entre la chute de pression et la vitesse est de la forme :

$$p_{g_7} - p_{g_8} = K_1 V^2 \implies q_v = K \sqrt{h_7 - h_8}$$

5. Rotamètre

Le rotamètre est constitué d'un flotteur pouvant se déplacer dans un tube vertical transparent dont le diamètre est légèrement croissant (figure 4). Le déplacement du flotteur est sensiblement proportionnel au débit. Cependant, la théorie qui va suivre est très simplifiée et un rotamètre nécessite normalement un étalonnage.



Figure 4 : sections transverse et longitudinale du rotamètre.

Le rotamètre peut être assimilé à un convergent suivi d'un divergent ou plutôt un élargissement brusque. Dans cette configuration, le théorème des quantités de mouvement conduit à la formule de Borda-Carnot :

$$\Delta H = \frac{1}{2g} (V_{\rm A} - V_{\rm B})^2$$

où V_A est la vitesse dans la section minimale et V_B la vitesse après l'élargissement.

Lorsque le flotteur est immobile, son poids est équilibré par la chute de pression dans le rotamètre. Le poids du flotteur étant constant, la perte de charge l'est également :

$$\Delta H = \frac{1}{2g} (V_{\rm A} - V_{\rm B})^2 = \text{cte}$$

Nous exprimons d'abord la conservation de la masse : $q_v = V_A S_A = V_B S_B$, avec : $S_A \approx 2\pi r_f \delta$.

$$S_{\rm B} = S_{\rm A} + \pi r_{\rm f}^2 = \pi (r_{\rm f} + \delta)^2$$

où $r_{\rm f}$ est le rayon du flotteur et δ l'espace supposé petit entre le tuyau et le bord extérieur du flotteur.

$$V_{A} - V_{B} = q_{v} \left(\frac{1}{S_{A}} - \frac{1}{S_{B}} \right) = q_{v} \frac{S_{B} - S_{A}}{S_{A} S_{B}}$$

où $S_{B} - S_{A} = \pi r_{f}^{2}$ et $S_{A} S_{B} = 2\pi r_{f} \delta (\pi r_{f}^{2} + 2\pi r_{f} \delta) \approx \pi r_{f}^{2} \cdot 2\pi r_{f} \delta$, d'où :
$$\Delta H = \frac{1}{2g} \left(\frac{q_{v}}{2\pi r_{f} \delta} \right)^{2} = \text{cte}$$

Par suite, $q_v = \operatorname{cte} \delta$. On voit donc que q_v est proportionnel à δ . Si l est la distance du flotteur à la position 0 et si θ est l'angle du tuyau tronconique, on a $\delta \approx l \theta$ et q_v est proportionnel à l en lère approximation.

Par ailleurs, le rotamètre devant fonctionner en position verticale, on peut considérer que la perte de charge introduite dans une installation par le rotamètre est constituée par celle du coude et de l'appareil lui-même. Les prises de pression (8) et (9) permettent en principe de mesurer cette perte.

ÉCOULEMENT LAMINAIRE

I - INTRODUCTION

Lorsqu'un fluide s'écoule dans une conduite, il s'exerce une résistance visqueuse qui crée une perte d'énergie. La chute de pression le long de la conduite s'appelle la *perte de charge*. Pour des conditions aux limites constantes imposées à l'écoulement, O. Reynolds a montré en 1883 qu'il existe deux sortes d'écoulements suivant la valeur d'un nombre sans dimension appelé *nombre de Reynolds* et noté Re:

$$\operatorname{Re} = \frac{VD}{v},\tag{1}$$

où V est une vitesse typique de l'écoulement, D une taille caractéristique et v la viscosité cinématique du fluide. Lorsque le nombre de Reynolds est faible, les lignes de courant sont stationnaires et l'écoulement est dit *laminaire*. Au contraire lorsque le nombre de Reynolds est grand, les lignes de courant deviennent instationnaires et l'écoulement est dit *turbulent*. À ces deux types d'écoulement fondamentalement différents correspondent des pertes de charge différentes. Le but de l'expérience est de vérifier la loi dite de Poiseuille dans le cas du régime laminaire et de trouver expérimentalement la valeur du nombre de Reynolds pour laquelle l'écoulement change de régime.

II - MANIPULATION

A. Description

La figure 1 montre l'installation vue de dessus et vue de profil : le fluide est de l'huile qui circule en circuit fermé. Il est pompé à partir d'un réservoir et amené par le tuyau horizontal inférieur à une chambre de tranquillisation transparente. Le fluide passe à travers un convergent parabolique dans le tuyau supérieur de 6 m de long et de diamètre D = 19 mm où les mesures sont effectuées (Fig. 2). Le tuyau est muni de 18 prises de pression permettant de déterminer le gradient de pression. Près de l'extrémité aval une sonde de pression supplémentaire (prise n°19), montée sur une vis micrométrique, permet de déterminer le profil des vitesses.

À la sortie du tuyau, on peut observer à travers un déflecteur transparent le jet formé. Le débit est mesuré à l'aide d'une balance située au-dessus du réservoir et réglé par une vanne "by-pass" (dérivation). Une tige située juste derrière le convergent permet éventuellement de perturber l'écoulement laminaire, et ainsi de forcer le régime turbulent à des nombres de Reynolds modérés.

Un multimanomètre permet de sélectionner la prise de pression à mesurer, exprimée en bar (1bar $= 10^5$ Pa). Le tableau suivant donne les abscisses des prises de pression.

n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x(cm)	15,24	30,48	45,72	60,94	76,2	91,44	106,7	121,9	137,2	152,4
n°	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x(cm)	182,9	213,4	243,8	274,3	350,5	426,7	502,9	551,4	(551,4)	579,1



Figure 1 : Installation en vue de dessus et vue de côté.



Figure 2 : Gros plan sur le convergeant à l'entrée de la conduite.

B. Mode opératoire

Mise en marche de la pompe :

- Ouvrir la vanne supérieure (v) du by-pass, afin d'avoir au démarrage un débit nul dans la conduite (cette vanne fonctionne à l'inverse d'un robinet usuel : le débit diminue lorsqu'on l'ouvre).
- Faire démarrer la pompe : mettre la manette du contacteur sur la position ON et appuyer sur le bouton vert.
- Fermer légèrement la vanne (v) du by-pass. L'huile remplit alors la chambre de tranquillisation puis circule dans le tuyau. On purgera l'air initialement présent dans la chambre au moyen du petit robinet situé au-dessus de celle-ci (cette opération devra éventuellement être renouvelée si une poche d'air vient à se former en haut de la chambre, du fait de la présence de petites bulles d'air dans l'huile).

Balance - Mesure du débit :

- Placer le contrepoids à environ 40 kg.
- Fermer le réservoir avec la manette située sur le côté.
- Déclencher le chronomètre lorsque l'équilibre est atteint.
- Régler le contrepoids à environ 70 kg. Arrêter le chronomètre lorsque l'équilibre est de nouveau atteint.
- Ne pas oublier de vider le réservoir aussitôt après la mesure.

III. CALCULS ET RÉSULTATS

A. Profil des vitesses

Pour une valeur du débit (valeur moyenne) que vous calculerez, relever le profil radial de vitesse u(r) vers la fin du tuyau (position x = 551,4 cm). Cette mesure s'effectue au moyen de la prise de pression n°18 montée sur une vis micrométrique qui fonctionne comme la prise de pression au point de stagnation d'un tube de Pitot (*cf.* préliminaire 2) ; la pression totale, elle, correspond à la prise de pression n°19, située à la paroi du tuyau. On pourra regarder le TP "écoulement turbulent", situé à proximité, sur lequel un dispositif similaire est visible au niveau de la portion transparente du tuyau.

On déduit la vitesse locale du fluide de la différence de pression $\Delta p = p_{19} - p_{18}$, en application de la relation de Bernoulli :

$$u = \sqrt{2\frac{\Delta p}{\rho_h}},\tag{2}$$

où $\rho_h = 810 \text{ kg/m}^3$ est la masse volumique de l'huile. Vous calculerez également la vitesse moyenne du fluide \overline{V} (rapport du débit volumique q_V sur la section du tube).

Tracer vos points expérimentaux u = f(r) en fonction du rayon.

Comparer le rapport $V_{\text{max}} / \overline{V}$ (où V_{max} est la vitesse maximale au centre du tuyau, en r = 0) à sa valeur théorique donnée en annexe.

Comparer le profil expérimental au profil parabolique théorique de Poiseuille (voir l'annexe) :

$$u(r) = V_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{3}$$

B. Profil de pression

- Relever, pour trois valeurs différentes du débit que vous mesurerez (une faible, une moyenne et une forte), la pression *p* le long du tube.
- Tracer pour chacun de ces trois débits la courbe p = f(x), où x est la position de chaque prise de pression le long du tube. Décrire et comparer ces courbes.
- Tracer la pente des courbes précédentes en fonction du débit. Commenter.
- Calculer la vitesse moyenne du fluide \overline{V} et le nombre de Reynolds Re = $\overline{V}D/v$ dans chacun des cas.

Remarque : La valeur de la viscosité de l'huile évolue avec la température de la salle. Voici quelques valeurs de cette viscosité en fonction de la température. Interpolez ou extrapolez si nécessaire.

Т	18° C	20° C	22° C	24° C	26° C
$v (m^2.s^{-1})$	61.10-6	55.10-6	50.10-6	46.10-6	41.10-6

C. Longueur d'entrée

Le fluide provient d'un réservoir dans lequel sa vitesse est nulle. Lorsque le fluide pénètre dans le tube, sa vitesse augmente pour atteindre une valeur stationnaire au bout d'une certaine distance appelée "longueur d'entrée" : c'est la longueur de tuyau nécessaire à l'établissement du régime stationnaire pour lequel la pression diminue linéairement avec la distance.

Si vos courbes p(x) le permettent, estimer la valeur de la longueur d'entrée l_{exp} . Tracer l_{exp} en fonction de Re = $\overline{V}D/\nu$, et comparer avec la loi théorique (voir l'annexe) :

$$l_{\rm th} \approx 0.03 \,{\rm Re}\,D \tag{4}$$

où *D* est le diamètre du tube. Comparer et discuter l_{th} avec vos valeurs expérimentales l_{exp} . Pourquoi est-il si difficile de déterminer expérimentalement l_{exp} ?

D. Coefficient de perte de charge linéaire : vérification de la loi de Poiseuille

La chute de pression Δp le long du tube s'appelle aussi la perte de charge linéaire. On peut définir un coefficient sans dimension de perte de charge linéaire, noté Λ , par :

$$\Lambda = \frac{D\frac{\Delta p}{L}}{\frac{1}{2}\rho \bar{V}^2},\tag{5}$$

où D est le diamètre et L la longueur du tube ($\Delta p / L$ est le gradient de pression moyen).

Calculer pour les trois valeurs de débit le coefficient de perte de charge expérimental Λ_{exp} . Afin de tester la théorie de Poiseuille, selon laquelle Λ est inversement proportionnel à Re, tracer le produit Λ_{exp} Re en fonction de Re. Comparer à la valeur théorique de ce produit (*cf.* annexe).

E. Changement de régime

Entre le régime laminaire et le régime turbulent, il existe une région intermédiaire où le profil de vitesse est mal connu. Dans une conduite cylindrique, le changement de régime est observé pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 2000. Cependant, en prenant certaines précautions, il est possible d'être encore en régime laminaire pour des nombres de Reynolds supérieurs à 2000 (on a pu observer le régime laminaire jusqu'à des valeurs du nombre de Reynolds de l'ordre de 75000!).

Essayez d'observer le régime turbulent en augmentant progressivement le débit. S'il n'apparaît pas spontanément, perturbez l'écoulement en amont en introduisant dans le tube la petite tige située près du convergent.

Vous tracerez alors la courbe de pression, mesurerez la longueur d'entrée l et calculerez le coefficient de perte de charge Λ . Comparer ces valeurs aux valeurs théoriques.

Dans les écoulements turbulents, les phénomènes sont beaucoup plus compliqués. On a longtemps utilisé des formules empiriques pour calculer le coefficient Λ . Des considérations de similitude permettent de dire que Λ est une fonction de Re et de la rugosité du tuyau. Cependant si le nombre de Reynolds n'est pas trop grand, la rugosité n'intervient pas et $\Lambda = f(\text{Re})$. Si Re < 10⁵ on emploie les formules de Blasius :

$$\Lambda = 0.316 \,\mathrm{Re}^{-1/4} \quad \mathrm{et} \quad l_{\mathrm{tb}} = 0.8D \,\mathrm{Re}^{1/4} \tag{6}$$

IV. CONCLUSION

À l'aide de tous vos résultats, quels types de remarques pouvez-vous faire concernant cette expérience. Faire des suggestions, basées sur vos interprétations et discussions, pour améliorer la détermination de la valeur de la longueur d'entrée l_{exp} , ou d'autres paramètres qui vous semblent être mal déterminés.

ANNEXE THÉORIQUE

ÉCOULEMENT LAMINAIRE

DANS UNE CONDUITE CYLINDRIQUE

L'expérience montre que, pour une configuration géométrique donnée des parois, un écoulement permanent n'est généralement stable (*i.e.* une perturbation introduite dans l'écoulement s'atténue) que si les vitesses ne sont pas trop grandes. Cette stabilité est liée à la valeur d'un paramètre sans dimension, le nombre de Reynolds Re = UL/v. L'écoulement sera stable pour de faibles valeurs de Re. Si Re est grand, l'expérience montre qu'une perturbation s'amplifie. Même en imposant des conditions limites constantes, le mouvement n'est plus permanent, les trajectoires s'enchevêtrent inextricablement et il devient impossible de décrire avec exactitude l'écoulement qui est alors qualifié de turbulent. Nous allons dans la suite exprimer le champ de vitesse d'un fluide visqueux incompressible en écoulement permanent dans une conduite cylindrique.

Considérons un tube cylindrique horizontal de rayon R et de longueur L dans lequel on étudie l'écoulement induit par une différence de pression $\Delta P = P_1 - P_2$ entre l'entrée et la sortie du tube. On s'intéressera aux écoulements unidirectionnels parallèles à l'axe Oz du tube pour lesquels la vitesse V_z dépend uniquement de la distance r à l'axe du tube (Fig. 1).



Figure 1 : Écoulement de Poiseuille dans un tube cylindrique de rayon R, induit par une différence de pression $\Delta P = P_1 - P_2$ sur une longueur L.

Dans le cas d'un écoulement parallèle permanent les termes inertiaux en $(v.\nabla)v$ sont strictement nuls et l'équation de Navier-Stokes s'écrit alors:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla \mathbf{p} + \mathbf{g} + \nu\nabla^2 \mathbf{v}$$

où v est la viscosité cinématique.

En coordonnées cylindriques cette équation devient :

$$\frac{\partial p}{\partial r} - \rho g \cos \theta = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g \sin \theta = 0 \tag{2}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right] = 0$$
(3)

où $\mu = \rho v$ est la viscosité dynamique. Si on pose - $\partial P/\partial z = \Delta P/L$ = Cte (positive si l'écoulement se fait dans le sens des z positifs), l'équation (3) devient :

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right] = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{L}$$

En intégrant cette équation nous obtenons : $V_z = -\frac{1}{4\mu}\frac{\Delta P}{L}r^2 + A\ln r + B$, où A et B sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions aux limites, qui sont $V_Z = O$ (non glissement à la paroi) en r = R et V_Z existe en r = 0.

La solution s'écrit finalement : $V_z = \frac{1}{4\mu} \frac{\Delta P}{L} \left(R^2 - r^2 \right) = V_{\text{max}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$

avec $V_{\text{max}} = \frac{R^2}{4\mu} \left(\frac{\Delta P}{L}\right)$, où V_{max} est la valeur maximale de la vitesse obtenue sur l'axe du tube (r = 0). Le débit volumique du fluide q_{V} dans la section du tube s'écrit :

$$q_{v} = \int_{0}^{R} V_{z}(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^{4}}{8\mu} \left(\frac{\Delta P}{L}\right)$$

avec *R* et *L*, rayon et longueur du tube et ΔP la différence de pression entre les deux extrémités. Ce résultat constitue *la loi de Poiseuille* ou *loi de Haagen-Poiseuille* :

$$q_{\nu} = \frac{\pi}{8\mu} R^4 \left(\frac{\Delta P}{L}\right) \, .$$

On en déduit la vitesse moyenne \overline{V} :

$$\overline{V} = \frac{q_v}{S} = \frac{q_v}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\mu} \left(\frac{\Delta P}{L}\right), \text{ soit } \overline{V} = \frac{V_{\text{max}}}{2}.$$

Le coefficient sans dimension de perte de charge linéaire, noté Λ , défini par :

$$\Lambda_{th} = \frac{\Delta P\left(\frac{D}{\Delta L}\right)}{\frac{1}{2}\rho \overline{V}^2},$$

vaut alors $\Lambda_{in} = \frac{64}{\text{Re}}$.

Le profil parabolique ne s'établit pas dès l'entrée du tube mais au-delà d'une distance appelée *longueur d'entrée*. Cette longueur d'entrée provient de la compétition entre la diffusion des gradients de vitesse induit par la viscosité du fluide et l'advection par l'écoulement.

Si on considère un écoulement avec un profil plat à l'entrée du tube, c'est-à-dire une vitesse constante quel que soit r mis à part à la paroi où la vitesse est nulle, le gradient de vitesse se trouve confiné à la paroi avec une épaisseur nulle de la couche limite. La viscosité du fluide a tendance à diminuer le gradient de vitesse en augmentant l'épaisseur de la couche limite. Cette épaisseur augmente par diffusion suivant la loi $\delta = \sqrt{M}$. Pendant le même temps t, le fluide est advecté par l'écoulement sur une distance $z = \overline{V} t = \overline{V} \frac{\delta^2}{V}$. Le profil parabolique est établit lorsque la couche limite a diffusé jusqu'au centre du tube ($\delta = R$). La longueur d'entrée est donc : $l = \overline{V} \frac{R^2}{V} = \frac{1}{4} \operatorname{Re} D$ où Re est le nombre de Reynolds basé sur le diamètre D du tube.

Un calcul plus détaillé donne en fait : $l \approx 0,03 D$ Re.

SILLAGE D'UN CYLINDRE

L'expérience consiste à étudier l'écoulement d'air autour d'un cylindre. On étudiera successivement le profil de vitesse en aval du cylindre, la répartition de la pression à la surface du cylindre ainsi que la force de traînée.

I - CONDITIONS EXPÉRIMENTALES

La soufflerie est constituée d'un ventilateur aspirant l'air à travers un diaphragme muni d'un filtre et le rejetant dans la veine d'expérience par l'intermédiaire d'un divergent puis d'un convergent (figure 1). Cette disposition, où les moteurs sont en amont, est relativement inhabituelle. Elle permet un accès facile à la veine d'expérience et donne même la possibilité de travailler dans le jet issu de cette dernière.

Le diaphragme de la soufflerie est situé du côté opposé au moteur. Il permet de régler la vitesse V_{∞} . Avant de démarrer la soufflerie, s'assurer que le diaphragme est peu ouvert. Après démarrage ouvrir progressivement le diaphragme.



Figure 1 : Schéma de la soufflerie.

L'air est considéré comme un gaz parfait, les pressions variant relativement peu autour de la pression atmosphérique, la masse volumique de l'air ne sera dépendante que de la température pratiquement égale à celle de la pièce. Dans ces conditions, lorsque **les effets de viscosité seront négligeables** on pourra appliquer la loi de Bernoulli d'un point à l'autre de la soufflerie.

La masse volumique de l'air à la pression atmosphérique ($P_{at} = 760 \text{ mm Hg}$) et à la température de 20° C sera prise égale à $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$. La viscosité cinématique de l'air dans les mêmes conditions vaut : $v = 15.10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

II - MESURE DE LA VITESSE A L'ENTRÉE DE LA VEINE

La pression est mesurée en deux sections carrés droites S_1 et S_2 du convergent précédant la veine en supposant que ces pressions sont constantes dans les sections et que l'écoulement est unidimensionnel.

Par conservation du débit, on a :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 = \frac{1}{m^2}$$
(1)

où $m = L_1/L_2 \approx 2.7$ est le rapport des longueurs des sections carrées au niveau 1 (entrée) et 2 (sortie) du convergeant.

Par application de la loi de Bernoulli, il vient :

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \left(1 - \frac{1}{m^4}\right)$$
(2)

La différence de pression ΔP s'obtient grâce au manomètre différentiel, qui est gradué en mm d'eau. Ce manomètre est connecté à un commutateur à plusieurs voies, la voie 1 permettant la mesure de $\Delta P = P_1 - P_2$. On déduit de la valeur de ΔP (loi de l'hydrostatique) :

$$\Delta P = \rho_{eav} g \Delta h \tag{3}$$

où ρ_{eau} est la masse volumique de l'eau et Δh la différence de hauteur d'eau affichée par le manomètre.

Comme le but principal de la soufflerie est de simuler le déplacement d'un objet à la vitesse V_{∞} dans un air de pression P_{∞} , les pressions et vitesses à l'entrée de la veine libre seront maintenant appelées P_{∞} , V_{∞} :

$$P_{\infty} = P_2 \quad \text{et} \quad V_{\infty} = v_2 \tag{4}$$

En résumé, la connaissance de Δh sur le manomètre nous donne la vitesse à l'infini :

$$V_{\infty} = k\sqrt{\Delta h}$$
 avec $k = \sqrt{2\frac{\rho_{eau}}{\rho}g\left(\frac{1}{1-1/m^4}\right)}$ (5)

Mesurer Δh et en déduire V_{∞} . On vérifiera au cours de la séance que cette grandeur reste constante.



Figure 2 : Ecoulements types derrière un cylindre à différents nombres de Reynolds.



Figure 3 : Coefficient de traînée C_x ou C_D (D pour "Drag", traînée) en fonction du nombre de Reynolds pour un cylindre lisse et une sphère lisse.

La nature de l'écoulement dans le sillage d'un cylindre dépend d'un unique nombre sans dimension, le nombre de Reynolds défini sur le diamètre du cylindre :

$$Re = \frac{V_{\infty} D}{v}$$

Selon la valeur de ce nombre, on distingue plusieurs régimes de sillage (figure 2) :

Re < 50, sillage laminaire (figure 2 A et B);

- 50 < Re < 5000, sillage faisant apparaître l'émission alternée de tourbillons (figure 2 C) : c'est l'*allée de Bénard-von Karman* ;

- 5 000 < Re < 200 000 : la couche limite autour du cylindre reste laminaire du côté amont et devient turbulente à partir d'un point de décollement, situé a un angle θ_D de l'ordre de 80°. Il existe alors un large sillage turbulent. C'est le régime sous critique (figure 2 D) ;

- au-delà d'un nombre de Reynolds critique Re_c $\approx 200\,000$, le décollement s'effectue plus en aval ($\theta_D \approx 120^\circ$, figure 2 E). Le sillage est plus étroit et la force de traînée chute brutalement, d'un facteur 2 environ à la transition : c'est le phénomène de "*crise de traînée*".

Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement. A quel régime d'écoulement a-t-on à faire ?

III - PROFIL DE VITESSE DANS LE SILLAGE D'UN CYLINDRE

Un cylindre de diamètre D = 75,8 mm (ou D = 101,5mm) et de longueur L = 450 mm est placé dans la veine d'expérience. La vitesse locale dans le sillage de ce cylindre peut être mesurée à l'aide d'un tube de Pitot (voir le préliminaire 2). Il s'agit d'une sonde formée d'un tube avec deux prises de pression : l'une mesure la pression totale (ou pression dynamique) P_T sur le bord du tube, tandis que l'autre mesure la pression statique P_S face au tube (point de stagnation). Par application de la relation de Bernouilli, la différence de ces deux pressions est proportionnelle au carré de la vitesse locale. Là encore, on lira cette différence de pression sous forme d'une hauteur d'eau Δh sur le manomètre différentiel, en utilisant cette fois la voie 3 du commutateur ($P_T - P_S$). La vitesse locale u(x, z) sera donc :

$$u(x,z) = k * \sqrt{\Delta h}$$
 avec $k^* = \sqrt{2 \frac{\rho_{eau}}{\rho} g}$ (6)

Lorsque le tube de Pitot est placé hors de la couche limite ou du sillage de l'obstacle, on doit retrouver la vitesse à l'infini.

Déplacer le tube de Pitot dans le plan de symétrie de l'expérience (figure 4) afin d'étudier le profil de vitesse u(x, z) en aval du cylindre, où z est la position en hauteur du tube de Pitot et x une abscisse que vous choisirez. On pourra prendre par exemple $x \approx 5 D$, l'origine des x étant au centre du cylindre, et on mesurera la vitesse dans toute la veine (-H < z < H).

Tracer ensuite la courbe adimensionnée :

$$\frac{u(x,z)}{V_{\infty}} = f\left(\frac{z}{D}\right) \tag{7}$$

On pourra faire apparaître utilement le cylindre et les parois sur ce graphe. Commenter la courbe obtenue. Retrouve-t-on bien $u(x, z) = V_{\infty}$ loin de l'obstacle ?



Figure 4 : Profil de vitesse dans le sillage du cylindre.

IV - MESURE DE LA TRAÎNÉE GLOBALE

Le vent \vec{V}_{∞} exerce sur tout obstacle placé dans la veine une force \vec{F} . La projection selon un axe parallèle à la vitesse (axe x) de cette force est la **traînée T**, et la projection selon un axe perpendiculaire est la **portance P**. On peut de plus déterminer un **moment (ou couple) M**, lorsque l'écoulement tend à mettre l'obstacle en rotation.

L'analyse dimensionnelle montre que la traînée, la portance et le moment peuvent s'écrire sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^{2} S C_{x}$$
$$P = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^{2} S C_{z}$$
$$M = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^{2} S.L C_{M}$$

où S est le maître-couple de l'obstacle, c'est-à-dire la surface frontale exposée à l'écoulement ; pour un cylindre, S = D L. Les coefficients adimensionnés C_x , C_z et C_M sont des fonctions du nombre de Reynolds Re. Le coefficient de traînée C_x est aussi appelé le *coefficient de pénétration*. Dans le cas du cylindre, l'écoulement moyen garde sa symétrie par rapport au plan z = 0, donc la portance P et le moment M sont nuls.

L'application du théorème des quantités de mouvement projeté selon l'axe de la vitesse V_{∞} (axe *x*) permet d'écrire la variation de la quantité de mouvement entre l'amont et l'aval :

$$T = \int_{-h}^{h} \rho L u(z) [V_{\infty} - u(z)] dz.$$
(8)

En définissant le coefficient de traînée comme :

$$C_{x} = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho V_{\infty}^{2} DL}$$

$$C_{x} = \int_{-h/D}^{h/D} \frac{u(z)}{V_{\infty}} \left[1 - \frac{u(z)}{V_{\infty}}\right] d\left(\frac{z}{D}\right)$$
(9)

on a alors :

Sillage d'un cylindre

Tracer la courbe adimensionnée $\frac{u(z)}{V_{\infty}} \left[1 - \frac{u(z)}{V_{\infty}} \right] = f\left(\frac{z}{D}\right)$ et déterminer par intégration

numériquement le coefficient de traînée globale C_x . Cette intégration numérique pourra être effectuée au moyen du logiciel *Excel*, en utilisant la méthode des rectangles (utiliser la fonction SOMME() pour sommer la surface des rectangles).

Commenter la courbe ainsi que la valeur obtenue pour C_x (on pourra se reporter à la Fig. 3). En déduire la force de traînée globale *T* sur le cylindre.

V - MESURE DE LA PRESSION SUR LE CYLINDRE

Il se forme un sillage à l'arrière du cylindre dû au décollement de la couche limite (perte de la symétrie amont-aval). Afin de caractériser plus précisément ce sillage, vous allez déterminer la pression $P_{\rm C}(\theta)$ en tout point de la surface du cylindre. Cette pression peut être mesurée grâce à un petit orifice à la surface du cylindre: la rotation progressive du cylindre par rapport à la direction du vent permet de mesurer la pression $P_{\rm C}$ pour différentes valeurs de l'angle d'incidence θ . On choisit l'origine $\theta = 0$ à l'amont du cylindre.

Relever la différence de pression $\Delta P = P_{\rm C}(\theta) - P_{\infty}$ (où $P_{\infty} = P_2$), toujours exprimée en hauteur d'eau Δh , sur la voie 2 du commutateur, en faisant varier l'angle θ (environ tous les 5°, et plus finement près du point de décollement).

On définit le coefficient adimensionné *local* de pression $C_p(\theta)$ par :

$$C_{P}(\theta) = \frac{P_{C}(\theta) - P_{\infty}}{\frac{1}{2}\rho V_{\infty}^{2}}$$
(10)

Tracer la courbe expérimentale $C_{p exp}(\theta)$, et la comparer avec celle donnée par l'analyse théorique pour un écoulement parfait irrotationnel (voir l'annexe) :

$$C_{p_{\star}}(\theta) = 1 - 4\sin^2\theta. \tag{11}$$

En déduire l'angle θ_D correspondant au point de décollement. Discuter les hypothèses de l'analyse théorique qui ne sont pas valides dans l'expérience.

VI - DÉTERMINATION DE LA TRAÎNÉE DE PRESSION

En fait, le coefficient de traînée C_x peut s'exprimer comme la somme de deux termes, le coefficient de traînée de pression C_{xp} que nous allons déterminer dans cette partie et le coefficient de traînée de frottement C_{xf} , d'un ordre de grandeur plus faible.

L'intégration de la courbe de la courbe $C_{p exp}(\theta)$ va permettre de calculer le coefficient de traînée de pression C_{xp} . En effet, soit \vec{dF} la force de pression qui s'exerce sur un élément du surface \vec{dS} de la paroi du cylindre :

Sillage d'un cylindre

$$\vec{dF} = \mathbf{P} \ \vec{dS}. \tag{13}$$

La composante de traînée sera la projection de \vec{dF} sur \vec{x} , donc par intégration :

$$T_{p} = \int_{0}^{2\pi} P_{C}(\theta) \cos \theta \frac{D}{2} L d\theta$$
(14)

et l'on peut, sans modifier la valeur de l'intégrale, introduire à la place de $P_{\rm C}(\theta)$ la différence $P_{\rm C}(\theta) - P_{\infty}$. Finalement le coefficient de pression est :

$$C_{xp} = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \frac{P_{C}(\theta) - P_{\infty}}{\frac{1}{2}\rho V_{\infty}^{2}} \cos\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} C_{p}(\theta) \cos\theta d\theta$$
(15)

et
$$T_p = C_{xp} \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 DL$$
(16)

Par intégration numérique de la courbe $C_{p exp}(\theta)$, en déduire la valeur de C_{xp} et de T_p (On utilisera de nouveau la méthode des rectangles avec *Excel*).

Comparer la valeur obtenue pour le coefficient de traînée de pression C_{xp} à la valeur obtenue pour le coefficient de traînée globale C_x . Pouvez-vous donner une estimation de la valeur du coefficient de traînée de frottement C_{xf} ?

ANNEXE THEORIQUE

Ecoulement irrotationnel plan d'un fluide incompressible

Le modèle analytique est donné par le potentiel complexe résultant de la superposition d'un écoulement uniforme à l'infini ($V_{\infty} z$) et d'un doublet à l'origine, parallèle à l'axe des x : ($V_{\infty} \frac{a^2}{z}$) avec a = D/2.

$$f(z) = V_{\infty}\left(z + \frac{a^2}{z}\right) = \varphi + i\psi$$
(A1)

En coordonnées cylindriques (r, θ) , l'écoulement s'exprime par :

$$\varphi = V_{\infty} \cos \theta \left(r + \frac{a^2}{r} \right)$$
 et $\psi = V_{\infty} \sin \theta \left(r - \frac{a^2}{r} \right)$ (A2)

Quant à la vitesse, elle est donnée par les formules :

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{dr}$$
 (A3)

On peut constater que cet écoulement est symétrique par rapport aux plans y = 0 (haut/bas) et x = 0 (amont/aval). Sur le cylindre, r = a, les vitesses sont données par :

$$v_r = 0$$
 et $v_{\theta} = 2 V_{\infty} \sin \theta$ (A4)

en choisissant $\theta = 0$ pour le point de stagnation amont. Le coefficient adimensionné de pression local C_p sera défini par :

$$C_{p}(\theta) = \frac{P(\theta) - P_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^{2}}$$
(A5)

où $P(\theta)$ est la pression statique en un point de la paroi du cylindre. C_p est calculé à partir de la vitesse par la formule de Bernoulli :

$$P(\theta) - P_{\infty} = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^{2} - \frac{1}{2} \rho V^{2}(\theta)$$

$$C_{p}(\theta) = 1 - \frac{V^{2}(\theta)}{V_{\infty}^{2}}.$$
(A6)

donc

Sur le cylindre, nous avons calculé théoriquement \vec{V} (Eq. A4), d'où :

$$C_{p_{th}}(\theta) = 1 - 4\sin^2\theta. \tag{A7}$$

Pour en savoir plus : Mécanique des Fluides, E.A. Brun, A. Martinot-Lagarde, J. Mathieu, Éditeur Dunot.

ÉCOULEMENT EN MILIEU POREUX

Dans un milieu poreux isotrope, l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible est régi par la **loi de Darcy**:

$$\mathbf{u} = -\frac{K}{\mu}\nabla(p + \rho g z)$$

La vitesse **u** du fluide est proportionnelle au gradient de la pression p corrigée du dénivelé (l'axe z est vertical orienté vers le haut), et inversement proportionnelle à la viscosité dynamique μ du fluide, via un paramètre K caractéristique du milieu appelé perméabilité.

Cette relation peut être vue comme l'analogue de la loi d'Ohm en électrostatique, I = U/R: La vitesse est analogue au courant électrique *I*, le gradient de pression est analogue à la différence de potentiel, et le préfacteur K/μ joue le rôle de la conductance (inverse de la résistance, 1/R).

Dans la première partie du TP, vous mesurerez la perméabilité d'un milieu poreux : A une différence de pression imposée vous mesurerez le débit résultant. Dans la deuxième partie, vous étudierez un écoulement présentant une surface libre à travers un barrage poreux.



Figure 1.

I - ECOULEMENT DANS UN MILIEU POREUX : MESURE DE PERMEABILITE

1. Description du dispositif expérimental

Le schéma du dispositif expérimental est représenté sur la figure 1. Il est constitué:

- d'un cylindre vertical, de section $A = 100 \text{ cm}^2$ et de longueur L = 20 cm, contenant un milieu poreux sous la forme d'un empilement désordonné compact de billes de verre de diamètre 1 mm;
- d'un réservoir d'alimentation à hauteur constante;
- d'un manomètre à eau permettant d'obtenir la différence de pression entre l'entrée et la sortie du milieu poreux;
- d'une éprouvette graduée permettant de mesurer le débit volumique à la sortie du cylindre avec l'aide d'un chronomètre.

2. Manipulation

Ouvrir la vanne quart de tour permettant de remplir le réservoir d'alimentation. Attention de ne pas ouvrir cette vanne trop brusquement ni complètement. Le débit à travers le milieu poreux se règle en faisant varier la hauteur du réservoir d'alimentation à l'aide de la crémaillère. Pour une dizaine de hauteurs différentes, mesurer le débit volumique q_v et la différence de hauteur d'eau Δh .

3. Calculs et résultats

Tracer sur un graphe les points expérimentaux du débit volumique $q_{v exp}$ en fonction de la perte de charge Δh :

$$q_{v_{exp}} = f(\Delta h)$$

Lisser les points expérimentaux par une droite. En déduire la valeur du coefficient de perméabilité *K* du milieu poreux (voir l'annexe théorique). Comparer cette valeur avec les valeurs usuelles du sable ($K \approx 3.10^{-10} \text{ m}^2$) et des galets ($K \approx 3.10^{-9} \text{ m}^2$).

Fluidisation/renardage?

Il se peut que les points correspondant à des valeurs élevées de débits s'écartent de la loi linéaire : pour une charge trop élevée, que l'on peut calculer, il y a un débit d'entraînement du matériau et la loi n'est plus vérifiée (phénomène de fluidisation ou de renardage). En effet, le milieu est soumis d'une part à son propre poids diminué de la poussée d'Archimède ($\rho_s - \rho$)g, d'autre part, au gradient de pression motrice $\partial(p + \rho gz) / \partial z$, et il y aura entraînement si la traînée devient supérieure au poids. Ceci a lieu en théorie pour une vitesse de renardage (ou de fluidisation) v_r égale a :

$$v_r = \frac{K}{\mu} (\rho_s - \rho)g$$

Calculer la vitesse théorique de fluidisation ou de renardage (on donne $\rho_s = 2,5 \text{ g/cm}^3$ pour les billes de verre et $\mu = 10^{-3}$ Pa.s pour l'eau). Calculer la valeur du nombre de Reynolds basé sur le diamètre des billes (1 mm) correspondant au renardage. Comparer les vitesses moyennes expérimentales $u = q_v / A$ de l'écoulement à la vitesse théorique de renardage. Commenter.

II - ECOULEMENT À SURFACE LIBRE À TRAVERS UN BARRAGE POREUX

L'expérience consiste à visualiser la surface libre d'un écoulement d'eau à travers un barrage poreux et à vérifier la formule de Dupuit par la mesure du débit en fonction de la différence de hauteur d'eau entre l'amont et l'aval du barrage.

1. Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental (Fig. 2) est un modèle réduit de barrage. Une cuve étroite entre deux parois vitrées permet d'observer un écoulement de filtration plan. Le barrage poreux est représenté par un empilement de billes de verre de diamètre d = 1 mm disposé entre deux parements grillagés. L'envergure du barrage est e = 41,5 mm et sa longueur est L = 30 cm.



Figure 2 : Schéma du barrage.

Les hauteurs d'eau amont h_1 et aval h_2 sont réglables par l'intermédiaire de deux réservoirs munis de trop plein et montés sur crémaillère.

2. Manipulation

Fixer la hauteur amont à une valeur déterminée, par exemple $h_1 = 33$ cm. En maintenant h_1 constant, diminuer progressivement la hauteur aval h_2 de la valeur $h_2 = h_1$ jusqu'à $h_2 = 0$. On prendra une dizaine de valeurs de h_2 . Il conviendra de toujours réajuster le niveau du réservoir amont de façon à ce que h_1 reste constant lorsque h_2 varie. Pourquoi h_1 a-t-il tendance à diminuer lorsque h_2 diminue?

Mesure du débit

Pour chaque valeur de h_2 , mesurer le débit volumique $q_{v exp}$ à l'aide d'une éprouvette graduée et d'un chronomètre.

Observation du ruissellement

Observer à partir de quelle hauteur critique h_{2c} apparaît le ruissellement, c'est-à-dire lorsque la surface libre interne ne se raccorde plus à la surface libre aval (points B et C non confondus). La hauteur h_s = BC est alors dite hauteur de ruissellement (Fig. 3).

Observer comment varie le point B lorsque le point C descend. En déduire comment varie la hauteur de ruissellement.

Observation de la surface libre

Lorsque h_2 diminue, observez la forme de la surface libre. Pourquoi l'eau monte-t-elle dans le barrage poreux plus haut que h_1 au voisinage du parement grillagé amont?



Figure 3 : Ecoulement à travers le barrage.

3. Calculs et résultats

Tracer les points expérimentaux q_{vexp} en fonction de h_2 / h_1 . En déduire le débit maximum atteint noté $q_{vmax.exp}$. Comparer ce débit avec celui atteint théoriquement par la loi de Dupuit (voir l'annexe théorique) :

$$q_{v_{\max th}} = \frac{K}{\mu} e \rho g \frac{h_1^2}{2L}$$

où l'on prendra pour *K* la valeur obtenue dans la manipulation du § I du TP.

Tracer sur un même graphe les rapports expérimental $\frac{q_{vexp}}{(q_{vexp})_{max}}$ et théorique $\frac{q_{vth}}{(q_{vth})_{max}}$ en fonction de $(h_2 / h_1)^2$. Conclusions, remarques et commentaires.

ANNEXE THEORIQUE

1. La loi de Darcy

La loi de Darcy régissant l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité μ à travers un milieu poreux de perméabilité *K* est :

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \nabla (\mathbf{p} + \rho \mathbf{g} \mathbf{z})$$

L'axe z est vertical orienté vers le haut et g est l'accélération de la pesanteur.

La conservation de la masse en régime d'écoulement permanent s'écrit $div(\mathbf{u}) = 0$. Ainsi, dans un milieu homogène et isotherme où *K* et μ sont constants, on a :

$$\operatorname{div}\left(-\frac{K}{\mu}\nabla(\mathbf{p}+\rho \mathbf{g}\mathbf{z})\right) = \nabla^{2}\left(-\frac{K}{\mu}(\mathbf{p}+\rho \mathbf{g}\mathbf{z})\right) = 0$$

En posant $\phi = -\frac{K}{\mu}(p + \rho g z)$, on a la relation $\nabla^2 \phi = 0$. La vitesse de filtration **u** dérive

donc d'un potentiel ϕ qui satisfait à l'équation de Laplace.

1. Écoulement à surface libre à travers un barrage poreux

L'écoulement dans la partie du barrage poreux où il a lieu (limitée par ABCDA, voir Fig. 3) obéit à la loi de Darcy. Puisque, en ce qui concerne l'expression des vitesses et donc des débits, ϕ n'intervient que par son gradient, on peut choisir arbitrairement l'origine des pressions et celle des altitudes, et prendre pour origine des pressions la pression atmosphérique ($p_{atm} = 0$) et pour origine des altitudes celle du fond imperméable. Dans ces conditions, dans le réservoir supérieur et donc le long de la frontière AE, on a :

$$p + \rho gz = cte$$
.

Or la pression est telle que $p = p_{atm} + \rho g(h_1 - y)$. On a donc $p + \rho g z = \rho g h_1$.

En effet, les vitesses de filtration étant très faibles, les vitesses de l'eau dans le réservoir, même au voisinage du barrage seront faibles et les pressions dynamiques (ou motrices) négligeables (cas de l'hydrostatique) ; la condition au limite sur ϕ est pratiquement:

$$\phi(x=0) = -\frac{K}{\mu}\rho g h_1$$

Pour les mêmes raisons, dans le réservoir aval, et donc sur la frontière CD, on a:

$$\phi(\mathbf{x}=\mathbf{L})=-\frac{\mathbf{K}}{\mu}\rho \mathbf{g}\mathbf{h}_2.$$

Sur le fond imperméable E D, la vitesse de filtration est tangente à ED et :

Écoulement en milieu poreux

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

Enfin, la zone où le fluide s'écoule est séparée de celle où les espaces entre particules solides sont remplis d'air par une surface "libre" AMB, le long de laquelle la pression de l'eau est égale à la pression atmosphérique ($p_{atm} = 0$), et qui, dans le plan de section droite, constitue une ligne de courant AMB limite de l'écoulement. A travers cette ligne de courant AMB, le débit est nul :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

Le long de cette ligne, on a : $\phi = -\frac{K}{\mu}(p + \rho gz) = -\frac{K}{\mu}\rho gz$ (puisque $p_{atm} = 0$), c'est-à-dire, un

potentiel $\phi(M)$ proportionnel à l'altitude *z* du point M.

Enfin la partie BC est la trace, dans le plan de la figure d'une surface à laquelle parviennent des lignes de courant et le long de laquelle l'eau "suinte" ou "ruisselle".

Cette partie est appelée "surface de suintement" ou "surface de ruissellement". Le long de BC, la pression de l'eau est encore égale à la pression atmosphérique et donc le potentiel est donné par :

$$\phi = -\frac{K}{\mu}\rho g z.$$

Mais BC n'est pas une ligne de courant, puisqu'un débit traversant BC, sort du barrage en terre et ruisselle ensuite, à l'air libre, le long de BC.

Détermination du débit traversant le barrage

Le débit dans un barrage a été calculé pour la première fois par Dupuit, qui a fait deux hypothèses, approximations de la réalité :

- La première hypothèse est que la surface libre, partant du point A, aboutit au point C : il n'a pas pris en compte l'existence d'une surface de ruissellement ;

- La deuxième hypothèse est que les équipotentielles sont des plans verticaux x = cte, parallèles aux deux parements : la vitesse est alors horizontale et donnée par la loi de Darcy:

$$\mathbf{u} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \rho \mathbf{g} \frac{\mathbf{d}\mathbf{h}}{\mathbf{d}\mathbf{x}},$$

en ayant posé z = h(x) comme équation de la surface libre (fig. 2) La conservation de la masse dans une tranche MNN'M' du barrage fournit alors la relation :

$$q_v = Ueh = -\frac{K}{\mu}e\rho gh\frac{dh}{dx} = cte$$

Par suite :

$$\frac{d}{dx}\left(h\frac{dh}{dx}\right) = 0$$

On a donc :

 $h^2 = ax + b$,

avec les conditions aux limites suivantes :

Écoulement en milieu poreux

$$Pourx = 0, h_1^2 = b$$

$$Pourx = L h_2^2 = a L + h_1^2$$

La surface libre est donc un arc de parabole d'équation :

$$z^{2} = h^{2} = -\frac{h_{1}^{2} - h_{2}^{2}}{L} x + h_{1}^{2}.$$

De cette équation, on tire :

$$h\frac{dh}{dx} = -\frac{h_1^2 - h_2^2}{2L}$$

et par suite :

$$q_v = \frac{K}{\mu} e\rho g \frac{h_1^2 - h_2^2}{2L}$$

qui constitue la loi de Dupuit.

Ainsi Dupuit, en sous-estimant la hauteur traversée h, mais en surestimant le gradient dh/dx, c'est-à-dire les vitesses, a aboutit à une formule dont on pensa longtemps qu'elle était approchée alors qu'elle est en réalité exacte ! La démonstration rigoureuse peut être établie grâce à la considération de la surface de ruissellement et à l'utilisation de la relation de Green.

Écoulement en milieu poreux
Annexe : Calculs d'incertitude

Dans une grande partie des TP, l'objectif est de déterminer si une théorie est valide ou non, en la comparant à vos mesures expérimentales. Pour cela, il est indispensable de pouvoir estimer précisément l'incertitude (ou la barre d'erreur) de votre mesure. En effet, imaginons un modèle théorique prédisant le résultat $L_{th} = 12$ cm ; dans ce cas une mesure expérimentale $L_{exp} = 11 \pm 2$ cm confirme la validité de la théorie, alors que $L_{exp} = 11 \pm 0,3$ cm permet d'exclure la théorie. Ainsi l'incertitude associée à une mesure expérimentale peut être aussi importante que le résultat de la mesure elle-même ! Il est donc fondamental de savoir estimer de façon raisonnable (et honnête) l'incertitude d'une mesure.

Incertitude et chiffres significatifs

Une mesure expérimentale est toujours affectée d'une incertitude, quelle que soit la qualité du matériel et le talent de l'expérimentateur. Une incertitude n'est ni un déshonneur, ni une honte, ni une humiliation. Si la mesure d'une longueur est précise à 0,2 cm près, il est inutile (et idiot !) d'écrire $L = 11,7438 \pm 0,2$ cm. Il est suffisant d'écrire $L = 11,7\pm 0,2$ cm.

Erreur fréquente : Je mesure un diamètre $d = 10 \pm 0, 1$ cm, j'en déduis un périmètre de $L = \pi d = 31,4159265 \pm 0,314159$ cm.

Barres d'erreur

On représente graphiquement les incertitudes au moyen de barres d'erreur. Afin de comparer facilement théorie et expérience, il est recommandé d'utiliser la convention graphique suivante :

- Théorie : Courbe continue (sans barre d'erreur !),
- Mesures expérimentales : Points non reliés entre eux avec barres d'erreur.

Il est ainsi facile de vérifier visuellement si les mesures sont en accord ou non avec la théorie, en regardant si la courbe théorique passe à travers les barres d'erreur de mesure. Sur la figure 1 par exemple, on peut conclure que les mesures sont en accord, aux barres d'erreur près, avec la courbe théorique.

Si l'on trace les mesures de f(x), on pourra représenter l'erreur Δx horizontalement et l'erreur Δf verticalement (cf. figure 1). Pour gagner du temps, on peut ne calculer qu'une seule barre d'erreur représentative de toutes les mesures.



Figure 1: Série de mesures expérimentales avec barres d'erreur et courbe théorique de la période d'oscillation du pendule T pour différentes longueurs L.

Incertitude relative et absolue

On cherche à déterminer une grandeur physique f(x, y, ...) par la mesure de x, y... Chaque mesure est affectée d'une incertitude $\Delta x, \Delta y...$ On veut connaître Δf , l'erreur commise sur la détermination de f, qui résulte des incertitudes sur les mesures de x, y... On se limitera au cas de deux variables x et y.

On appelle Δf l'incertitude absolue de la mesure de f. On note le résultat $f = f_{mes} \pm \Delta f$, où $f_{mes} = f(x_{mes}, y_{mes})$ est la valeur de f obtenue à partir des mesures de x et y.

On appelle $\Delta f/f$ l'incertitude relative. Elle s'exprime sans dimension, et pourra être donnée en pourcentage.

Méthode de l'intervalle

Dans les cas les plus simples, on peut calculer l'incertitude absolue en regardant quel est l'intervalle $[f_{min}, f_{max}]$ des valeurs possibles de f lorsque la mesure x est comprise dans l'intervalle $[x_{min}, x_{max}]$. Par exemple si on mesure $x = 20 \pm 1$ s, alors l'incertitude sur f est tout simplement $\Delta f = |f(21 s) - f(19 s)|$.

Cette méthode est pratique, mais elle pose problème lorsque f(x) n'est pas monotone, ou lorsque f dépend de plusieurs mesures x, y... dont les incertitudes peuvent se compenser. Dans de tels cas, on utilise la méthode générale suivante.

Calcul de l'incertitude absolue

On écrit la différentielle de f(x, y) en fonction des dérivées partielles par rapport à chacune des variables x, y... En se limitant ici à deux variables :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

On approxime alors $df \simeq \Delta f$, et on majore la valeur absolue de Δf par la somme des valeurs absolues (inégalité triangulaire), soit :

$$\Delta f \le \Big|\frac{\partial f}{\partial x}\Big|\Delta x + \Big|\frac{\partial f}{\partial y}\Big|\Delta y,$$

ce qui permet de (sur-)estimer l'incertitude Δf en fonction des incertitudes Δx et Δy . On peut généraliser au cas d'un nombre quelconque de variables. Les facteurs permettant de passer des Δx , Δy à Δf sont donc les valeurs des dérivées partielles prises aux points $x = x_{mes}$, $y = y_{mes}$.

Exemples :

- $f(x) = \ln x \quad \rightarrow \quad \Delta f = \Delta x/x,$
- $f(x,y) = x^3y^{-2} + y \quad \to \quad \Delta f = |3x^2y^{-2}|\Delta x + |1 2x^3y^{-3}|\Delta y.$
- On veut calculer un débit volumique Q = V/T en mesurant le temps T mis pour remplir un récipient de volume V. Une incertitude ΔT sur le temps conduit à une incertitude

$$\Delta Q = \frac{V}{T^2} \,\Delta T.$$

On peut en déduire l'incertitude relative $\Delta Q/Q = \Delta T/T$: se tromper de 10 % sur T équivaut à se tromper de 10 % sur Q.

Exercice : La loi de réfraction pour un rayon lumineux est donnée par $n = \sin i / \sin r$, où *i* et *r* sont les angles d'incidence et de réfraction. On mesure $i = \pi/4 \pm 3 \cdot 10^{-4}$ rad et $r = \pi/6 \pm 3 \cdot 10^{-4}$ rad. Calculer *n* et l'incertitude sur *n*.

Calcul de l'incertitude relative

En pratique, il est souvent préférable d'utiliser l'incertitude relative $\Delta f/f$, que l'on peut exprimer en pourcentage.

Il existe une méthode pratique permettant d'estimer directement cette incertitude relative, sans passer par le calcul complet de l'incertitude absolue : il s'agit de la **différentielle logarithmique** $d(\ln f) = df/f$, ou encore $[\ln f(x)]' = f'(x)/f(x)$, qui permet d'en déduire facilement $\Delta f/f$. Cette méthode ne marche que si l'expression de f(x, y) ne fait pas intervenir de sin, cos, exp, ln...

On suivra en pratique la méthode suivante :

- a) on calcule $\ln f$ en fonction de $\ln x$ et $\ln y$ (éventuellement après avoir effectué un développement limité),
- b) on remplace tous les logarithmes par les différentielles dx/x, dy/y correspondantes (les constantes disparaissent, puisqu'elles ne sont pas affectées d'une erreur),
- c) on passe aux valeurs absolues des incertitudes relatives $|\Delta x/x|$, $|\Delta y/y|$ en utilisant l'inégalité triangulaire,
- d) enfin, on choisit la borne supérieure comme estimation la plus pessimiste (c'est-à-dire la plus honnête) de l'erreur sur f (on remplace le \leq par =).

Du fait de la grande simplicité de cette méthode, on se servira autant que possible de l'incertitude relative $\Delta f/f$, quitte à l'utiliser comme intermédiaire de calcul pour remonter à l'incertitude absolue Δf .

Truc : Pour les lois linéaires ou affines (f(x) = ax + b), on gagnera du temps en remarquant que $\Delta f/f = \Delta x/x$. Pour les lois de puissance $f(x) = ax^n$, on aura $\Delta f/f = |n|\Delta x/x$.

Exemple : On cherche à mesurer l'accélération de la pesanteur g à partir d'un pendule en utilisant la relation $T = 2\pi \sqrt{L/g}$, où T est la période d'oscillation et L la longueur du pendule. On mesure L = 15 cm à 2 % près et T = 0,8 s à 3 % près. On en déduit $g = 4\pi^2 L/T^2 = 9,253$ m/s². On veut connaître l'erreur relative sur g, c'est-à-dire $\Delta g/g$. On écrit donc :

$$g = 4\pi^{2}L/T^{2},$$

$$\ln g = \ln(4\pi^{2}) + \ln L - 2\ln T,$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{dL}{L} - 2\frac{dT}{T},$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \left|\frac{\Delta L}{L}\right| + 2\left|\frac{\Delta T}{T}\right| = 0,02 + 2 \times 0,03 = 0,08$$

On connaît donc g à 8 % près, soit une erreur absolue $\Delta g = 0,08g = 0,7402 \text{ m/s}^2$. Avec une telle erreur, seul le premier chiffre après la virgule est significatif, et le résultat final s'écrit :

$$g_{exp} = 9,3 \pm 0,7 \text{ m/s}^2.$$

Cette valeur est bien compatible avec la valeur théorique attendue $g_{th} = 9,81 \text{ m/s}^2$.