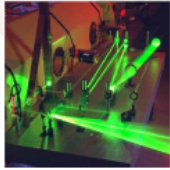
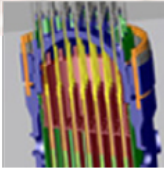
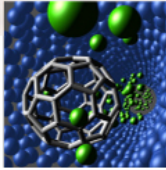
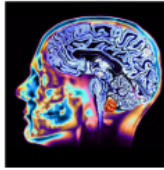




UNIVERSITÉ
PARIS-SUD 11

Master de

Physique Appliquée et Mécanique



— P-PAM-02A —

Mécanique des Fluides

Travaux dirigés

(Version du 24 juillet 2012)

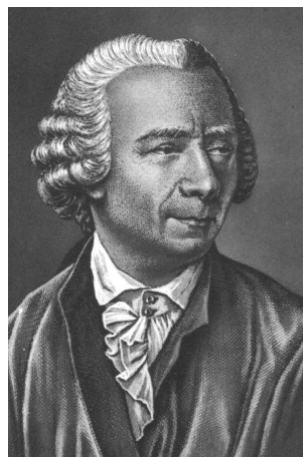
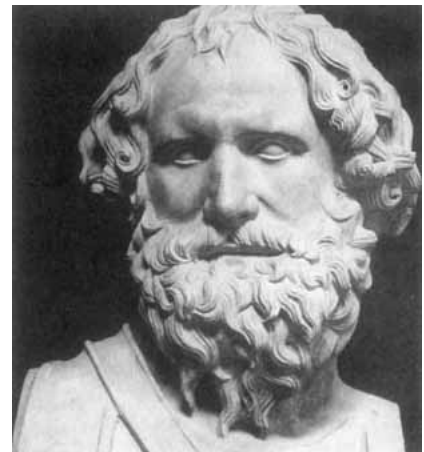


FIGURE 1 – En vrac et dans le désordre : DANIEL BERNOULLI, PIERRE SIMON DE LAPLACE, OSBORNE REYNOLDS, LEONHARD EULER, ARCHIMÈDE, GEORGE STOKES

Table des matières

1	— Analyse Dimensionnelle	3
1.1	Chute libre dans un fluide visqueux	3
1.2	Débit d'un déversoir	3
1.3	Modèles et similitudes	3
2	— Équations de continuité	5
2.1	Ressaut hydraulique dans un canal	5
3	— Hydrostatique	7
3.1	Autour de soi	7
3.2	Fluides non miscibles	7
3.3	Barrage voûte	7
3.4	Archimède en référentiel tournant	7
4	— Écoulements potentiels	8
4.1	Potentiels complexes	8
4.2	Forme idéale d'un tube de Pitot	8
5	— Fluides parfaits	9
5.1	Vase de Mariotte	9
5.2	Paradoxe de d'Alembert et force de masse ajoutée	9
5.3	Coup de Bélier	10
6	— Fluides visqueux	11
6.1	Écoulement de POISEUILLE	11
6.2	Écoulement de COUETTE cylindrique	11
7	— Ecoulements de drainage dans les mousses	13
7.1	Ecoulement plan stationnaire dans un film de savon	13
7.2	Écoulement dans un film de savon d'épaisseur lentement variable.	13
7.3	Ecoulement stationnaire dans un film d'eau non savonneuse	14
A	— Formulaire	16
A.1	Opérateurs différentiels	16
A.2	Conservation de la masse et équation de NAVIER–STOKES	18
B	— A propos du théorème du transport de Reynolds	20
B.1	Conservation de la masse	20
B.2	Transport de la quantité de mouvement	20

1 — Analyse Dimensionnelle

Rappels sur le théorème π , ou théorème de BUCKINGHAM : soit une relation homogène en dimension $u_1 = f(u_1, \dots, u_k)$ reliant k grandeurs physiques faisant intervenir r grandeurs dimensionnellement indépendantes (r est la dimension minimum nécessaire pour décrire les grandeurs physiques u_i). Cette relation peut être réduite à une relation $\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{k-r})$ où les $k - r$ grandeurs sans dimension (adimensionnées) π_i sont des termes formés à partir d'une grandeur dimensionnée et de r autres grandeurs dimensionnellement indépendantes. Les termes π sont de la forme $\pi = u_\alpha^{a_\alpha} \cdot u_\beta^{a_\beta} \cdot u_\gamma^{a_\gamma} \dots$ où $a_\alpha, a_\beta, \dots$ sont des relatifs entiers ou fractionnaires.

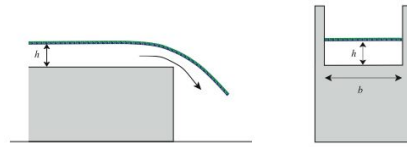
1.1 Chute libre dans un fluide visqueux

On considère la chute lente, à la vitesse V constante, d'une particule sphérique de diamètre d dans un fluide visqueux de viscosité dynamique μ . On veut déterminer l'expression de la force de frottement F en fonction de d, V, μ (grandeurs caractéristiques du problème). Les forces d'inertie sont négligeables devant la force de viscosité.

1. Écrire les équations aux dimensions de F, d, V, μ en fonction de $(\mathcal{M}, \mathcal{L}, \mathcal{T})$ (masse, longueur, temps).
2. Dédire le nombre minimum r de variables nécessaires pour exprimer les grandeurs F, d, V, μ , puis le nombre de grandeurs adimensionnées indépendantes.
3. Chercher le(s) terme(s) π comme un produit des puissances des r grandeurs indépendantes et de la quatrième grandeur restante.
4. Comparer la relation trouvée avec la loi de STOKES ($F = 3\pi\mu dV$). Conclure.

1.2 Débit d'un déversoir

On suppose que le débit Q (m^3/s) d'un déversoir rectangulaire, en écoulement permanent, est une fonction de la hauteur h du fluide en amont du déversoir, de la largeur b du déversoir et de l'accélération de la gravité g (le fluide ne s'écoule que sous l'action de son poids).



Vue de côté et de face du déversoir

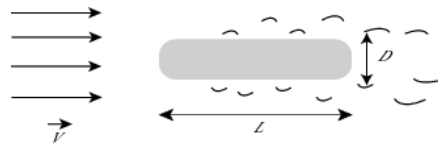
1. Écrire les équations aux dimensions de Q, h, b, g .
2. Dédire le nombre minimum r de variables nécessaires pour exprimer les grandeurs Q, h, b, g puis le nombre de grandeurs adimensionnées indépendantes.
3. À partir de la liste des grandeurs h, b, g sélectionner r grandeurs indépendantes.
4. Chercher les termes π comme le produit des puissances de ces r grandeurs indépendantes et d'une autre grandeur.
5. Dédire la relation adimensionnée $\frac{Q}{\sqrt{gh^5}} = \Phi\left(\frac{h}{b}\right)$.
6. Que devient l'expression de Q pour un déversoir de section triangulaire ?

1.3 Modèles et similitudes

Un modèle (ou maquette) est une représentation d'un système physique qu'on peut utiliser pour prévoir le comportement d'un prototype dans certaines conditions. Le prototype vérifie une relation entre les valeurs adimensionnées $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ qu'on obtient à partir des connaissances sur la nature générale du phénomène et des variables qui interviennent : $\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n)$. Une relation semblable doit être aussi vérifiée pour le modèle : $\pi_{1m} = \Phi(\pi_{2m}, \pi_{3m}, \dots, \pi_{nm})$. Si l'on choisit l'égalité

des valeurs des grandeurs adimensionnées du modèle et du prototype : $\pi_{2m} = \pi_2, \dots, \pi_{nm} = \pi_n$, alors $\pi_{1m} = \pi_1$ et la mesure de π_{1m} sur le modèle permet de prédire la valeur de π_1 , sur le prototype. Tous les termes adimensionnés correspondants entre modèle et prototype doivent être égaux : c'est la condition de similitude (similitude géométrique, dynamique, cinématique, etc), que nous allons appliquer ici au cas d'un sillage oscillatoire avec génération de tourbillons.

Un corps de section transverse de largeur D et de longueur L , placé dans l'écoulement d'un fluide incompressible à vitesse uniforme V , peut développer dans son sillage des tourbillons qui se détachent régulièrement à la fréquence ω (allée de tourbillons de BÉNARD-VON KÁRMÁN). La structure élastique du corps peut alors se mettre à vibrer en résonance avec la fréquence de forçage ω , et conduire à un endommagement de la structure.



On considère en illustration la structure d'un pont piétonnier d'épaisseur $D = 0,1$ m et de longueur transverse $L = 0,3$ m, et l'on veut connaître pour une vitesse du vent $V = 50$ km/h la fréquence ω correspondante de l'allée de tourbillons. On prendra pour masse volumique et viscosité dynamique de l'air respectivement $\rho = 1,23$ kg·m³ et $\mu = 1,8 \cdot 10^{-5}$ Pa·s. Les grandeurs caractéristiques du problème sont les longueurs D et L du corps, la vitesse V , la masse volumique ρ et la viscosité dynamique μ du fluide. La fréquence ω doit donc être une fonction de ces grandeurs :

$$\omega = f(D, L, V, \rho, \mu).$$

A partir d'une maquette à échelle réduite de dimension $D_m = 20$ mm qui a été testée dans un tunnel à eau, on mesure une fréquence des tourbillons $\omega_m = 50$ Hz. On prendra pour masse volumique et viscosité dynamique de l'eau respectivement $\rho_m = 10^3$ kg/m³ et $\mu_m = 1,2 \cdot 10^{-3}$ Pa·s.

1. Écrire les équations aux dimensions de $\omega, D, L, V, \rho, \mu$.
2. Dédire le nombre minimum r de variables nécessaires pour exprimer les grandeurs $\omega, D, L, V, \rho, \mu$; puis le nombre de grandeurs adimensionnées indépendantes.
3. A partir de la liste des grandeurs D, L, V, ρ, μ , sélectionner r grandeurs indépendantes. Chercher les termes π comme produits de ces r grandeurs indépendantes et d'une autre grandeur.
4. Déterminer la dimension L_m du modèle (similitude géométrique).
5. Déterminer la vitesse de l'eau dans le modèle (similitude géométrique et similitude du nombre de REYNOLDS $Re = \frac{\rho V D}{\mu}$). A quelle vitesse faudrait-il souffler si l'expérience modèle était faite également dans l'air ?
6. Dédire la fréquence des tourbillons sur le prototype (similitude du nombre de STROUHAL $St = \frac{\omega D}{V}$).

2 — Équations de continuité

2.1 Ressaut hydraulique dans un canal

On considère un écoulement stationnaire dans un canal ouvert rectangulaire et de pente négligeable. On s'intéresse à la formation d'un ressaut immobile (changement brutal de la profondeur de H_1 en amont, à H_2 en aval; ce changement s'effectue sur une distance comparable à la profondeur, avec $H_1 < H_2$). Pour simplifier l'analyse, on modélise cet écoulement en négligeant la viscosité et la compressibilité du fluide et en supposant les vitesses d'écoulement $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ uniformes et horizontales en amont comme en aval du ressaut. La géométrie de l'écoulement est représentée sur la Figure 2. On choisira un volume de contrôle approprié, fixe dans le référentiel de la berge, pour effectuer les bilans des différentes grandeurs.

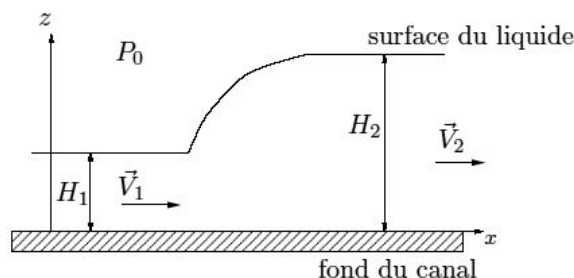


FIGURE 2 – Ressaut hydraulique

1. On suppose que la répartition de la pression dans le fluide en amont et en aval du ressaut est hydrostatique. Exprimer la pression $P(z)$ en amont et en aval du ressaut en fonction de la masse volumique ρ du fluide, de la hauteur z considérée et de la pression atmosphérique P_0 .
2. *Equation de conservation de la masse.* Donner l'expression du débit volumique D_v en fonction de (V_1, H_1, L) et (V_2, H_2, L) , L étant la largeur du canal.
3. *Equation de transport de la quantité de mouvement.*

(a) Montrer que l'équation-bilan de la densité de quantité de mouvement conduit à la relation :

$$\frac{1}{2} g H_1^2 + V_1^2 H_1 = \frac{1}{2} g H_2^2 + V_2^2 H_2,$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

(b) Calculer V_1 et V_2 .

(c) On définit les nombres de FROUDE amont et aval :

$$Fr_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gH_1}}, \quad Fr_2 = \frac{V_2}{\sqrt{gH_2}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{H_2}{H_1}.$$

Calculer Fr_1 et Fr_2 , en fonction de H_1 , H_2 et g , puis α en fonction de Fr_1 .

(d) Montrer que pour $\alpha > 1$ on a $Fr_1 > 1$ (régime super-critique ou torrentiel) et $Fr_2 < 1$ (régime sous critique ou fluvial).

(e) Application numérique : avec un débit par unité de largeur de $1,5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ et une profondeur d'approche de $0,2 \text{ m}$, calculer Fr_1 puis H_2 .

4. Bilan énergétique.

(a) On rappelle que pour une particule de fluide de vitesse $\vec{v}$ dans un champ de pesanteur, la densité d'énergie est $e = \rho (v^2/2 + gz)$ et que la puissance fournie par les forces de pression P à travers une surface $d\vec{S}$ est $-P\vec{v} \cdot d\vec{S}$. En établissant l'équation-bilan de la densité d'énergie, montrer que l'on a la relation

$$-\dot{Q} = \oint_{sc} \rho \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} \right) \vec{v} \cdot d\vec{S},$$

où $\dot{Q}$ est la puissance dissipée sous forme de chaleur dans le volume de contrôle (VC) par la turbulence et SC est la surface de contrôle.

- (b) Donner l'expression de la puissance dissipée dans le ressaut en fonction de D_v , des grandeurs V et H en amont et aval, ainsi que de ρ et g . Calculer la puissance dissipée pour un canal d'un mètre de largeur contenant de l'eau ($H_1 = 0,2\text{ m}$, $D_v = 1,5\text{ m}^3/\text{s}$). En déduire l'échauffement de l'eau entre l'entrée et la sortie du ressaut. On donne $C_p = 4,18\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ pour l'eau.
5. *Vitesse de propagation d'un mascaret.* Un mascaret est une surélévation brusque des eaux, qui se produit dans certains estuaires au moment du flux de marée, et qui progresse rapidement (à la célérité c) vers l'amont sous la forme d'une vague déferlante (voir Figure 3). En amont du front d'onde, la hauteur d'eau est H_2 et la vitesse d'écoulement est V_2 ($V_2 < c$); en aval, la hauteur d'eau est H_1 ($H_1 < H_2$) et le liquide est immobile.
- (a) Représenter sur une figure le volume de contrôle $AA'B'B$ dans le référentiel se déplaçant à la vitesse $-c$ par rapport au sol ainsi que les vitesses d'écoulement V'_1 et V'_2 en amont et en aval de la discontinuité.
- (b) En utilisant un changement de référentiel adéquat ainsi que les résultats obtenus pour le ressaut, calculer la vitesse de propagation c en fonction de H_1 , H_2 et g .
- (c) Dans le cas limite où $H_2/H_1 = (1+\varepsilon)$, avec $\varepsilon \rightarrow 0$, comment sont modifiés les résultats lorsque la vitesse d'écoulement V_1 en aval n'est pas nulle?

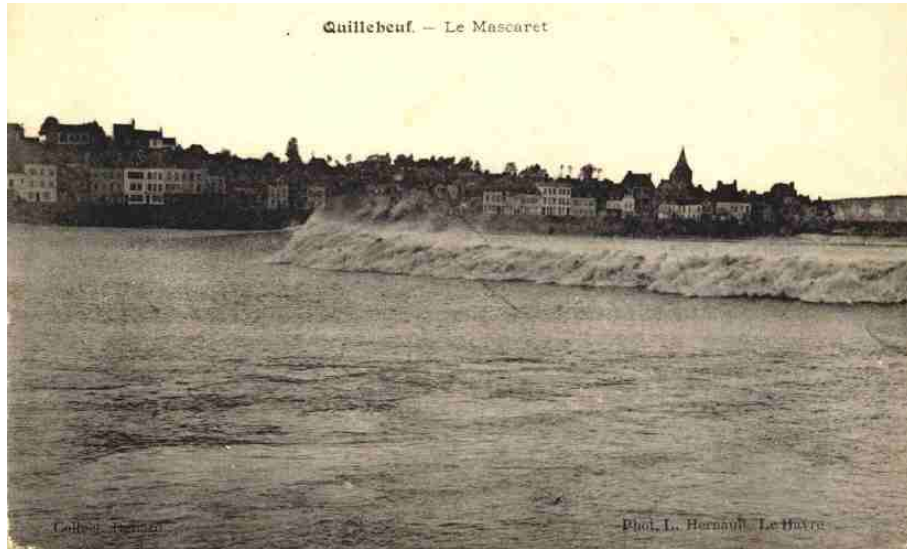


FIGURE 3 – Mascarlet de la Seine au niveau de Quillebeuf en 1920.

3 — Hydrostatique

3.1 Autour de soi

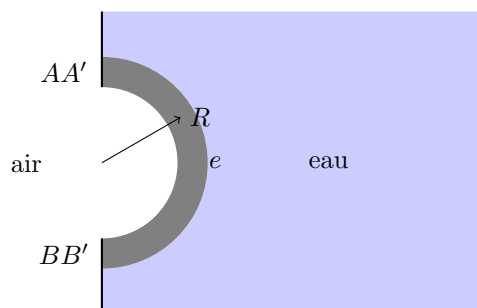
1. Un cube de glace flotte dans un verre d'eau. Quand la glace a fondu, quel est le niveau d'eau dans le verre ?
2. Même question si le cube de glace contient un morceau de métal suffisamment petit pour que le glaçon flotte encore.
3. Même question si le métal est remplacé par un morceau de liège.

3.2 Fluides non miscibles

On considère un récipient contenant deux liquides (huile et eau) non miscibles, soumis à la force de pesanteur. La masse volumique de l'eau est $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$, celle de l'huile $\rho_{huile} = 600 \text{ kg.m}^{-3}$.

1. Les deux fluides sont au repos. Comment se disposent-ils dans le récipient ?
2. Quelle est la forme de la courbe $P(z)$ de pression en fonction de l'altitude z , $z = 0$ étant pris au fond du récipient ?
3. On place maintenant une bille de bois (masse volumique $\rho_{bois} = 900 \text{ kg.m}^{-3}$) dans le dispositif précédent. Où se trouve la position d'équilibre de la bille ? Quelle fraction du volume de la bille est immergée dans l'eau ?
4. On remplit maintenant un tube en U avec de l'eau jusqu'à une hauteur de 10 cm par rapport au fond. La section du tube est de 1 cm^2 . On ajoute alors 2 cm^3 d'huile dans une des branches du tube.
 - (a) À quelle hauteur se trouve la surface libre de l'huile ?
 - (b) À quelle hauteur se trouve l'interface huile-eau ?
 - (c) À quelle hauteur se trouve la surface libre de l'eau dans l'autre branche ?

3.3 Barrage voûte



On considère le barrage voûte de la figure (vue aérienne), en forme de demi-cylindre, de rayon moyen R , d'épaisseur de paroi $e \ll R$ et de hauteur h . Le barrage est en appui selon AA' et BB' sur les parois d'une falaise. Calculer la poussée totale sur le barrage et la réaction des appuis, lorsque $h = R = 100 \text{ m}$, $e = 10 \text{ m}$.

3.4 Archimède en référentiel tournant

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ est en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\vec{\omega}_0$ autour d'un axe vertical porté par $\hat{z}$.

1. Déterminer les actions (résultantes, moments résultants) du fluide sur un corps totalement immergé et au repos par rapport à lui.
2. Écrire ce que deviennent ces actions dans le cas d'un corps homogène de masse volumique ρ' .
3. Étudier la possibilité d'équilibre relatif d'un corps solide homogène flottant à la surface du fluide tournant.

4 — Écoulements potentiels

4.1 Potentiels complexes

Tracer les lignes de courant $\psi = \text{Cste}$ et les équipotentielles $\phi = \text{Cste}$ des écoulements bidimensionnels décrits par les potentiels complexes $f = \phi + i\psi$ suivants, et conclure sur la nature de ces écoulements.

1. $f(z) = Vz$.
2. $f(z) = C \ln z$, où C est constante réelle.
3. $f(z) = iC \ln z$, où C est constante réelle.
4. $f(z) = az^2/2$.
5. $f(z) = V \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$.
6. $f(z) = C \ln \left(\frac{z-\epsilon}{z+\epsilon} \right)$.
7. $f(z) = V \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - iC \ln \frac{z}{a}$.

4.2 Forme idéale d'un tube de Pitot

On étudie dans le plan complexe $z = x + iy$ le potentiel complexe :

$$f(z) = \phi + i\psi = V_0 z + \frac{q_v}{2\pi} \ln z.$$

1. On peut considérer l'écoulement qu'elle représente comme la superposition de deux écoulements simples. Quels sont-ils ?
2. Montrer, qualitativement, que l'on s'attend à l'existence d'un point de stagnation dans l'écoulement. Trouver sa position exacte par le calcul.
3. Montrer que le point de stagnation appartient à la ligne de courant définie par

$$\psi = \frac{q_v}{2}.$$

4. Montrer que cette ligne de courant est en fait la réunion de deux familles de solution distinctes. On travaillera dans le système de coordonnées polaires (r, θ) et on posera

$$R = \sqrt{\frac{q_v}{2\pi V_0}}.$$

5. Tracer l'allure de cette ligne de courant. La surface de courant engendrée par rotation autour de $\vec{e}_x$ donne l'allure du fuselage d'un tube de Pitot. Calculer le diamètre de ce tube à l'infini aval.
6. On matérialise la surface de courant précédente et on calcule la répartition des vitesses sur le fuselage obtenu. Exprimer alors le module U de la vitesse sur le fuselage en fonction de r, θ .
7. Déterminer le point de vitesse nulle et les points de vitesse V_0 .
8. Calculer le coefficient de pression (ρ masse volumique du fluide) :

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2}\rho V_0^2},$$

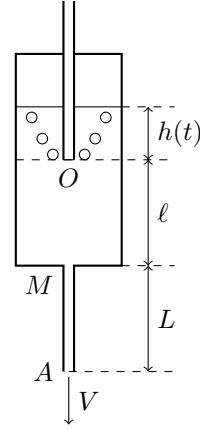
où p est la pression en un point du fuselage, et p_0 et V_0 sont respectivement la pression et la vitesse à l'infini. Donner l'allure de la variation de C_p en fonction de x .

9. En fonction des résultats précédents, donner des indications sur la position souhaitable de la prise de pression statique pour une mesure précise de la vitesse V_0 à l'infini.

5 — Fluides parfaits

5.1 Vase de Mariotte

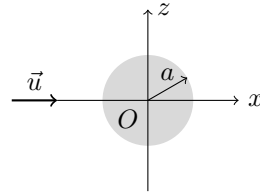
Un vase de Mariotte permet de vidanger un réservoir avec un débit constant, à la différence des réservoirs habituels. Le vase, contenant de l'eau, est raccordé, comme l'indique la figure, à un tube vertical de longueur L . La pression atmosphérique sera prise égale à $p_0 = 1,013$ bar, et la pression de vapeur d'eau, à température ambiante, vaut $f = 13$ millibars. La constante de pesanteur sera prise égale à $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$. On négligera les phénomènes subtils qui se produisent au niveau du raccordement du tube, comme la perte de charge singulière et le rétrécissement des lignes de courant, qui explique la survitesse à l'entrée du tube (phénomène d'ajutage).



1. Exprimer la vitesse de sortie V de l'eau en A en fonction de L . Montrer qu'elle est constante, tant que le niveau de l'eau est au-dessus de l'orifice O .
2. Sachant que dans l'écoulement, la vitesse maximale est atteinte en un point M de la zone de raccordement, et qu'elle vaut $1.4V$, quelle longueur peut-on donner au tube pour qu'il n'y ait pas cavitation (c'est-à-dire apparition de bulles ou de poches de vapeur d'eau) ?
3. Quelle est alors la vitesse V d'écoulement maximale ?

5.2 Paradoxe de d'Alembert et force de masse ajoutée

On considère l'écoulement bidimensionnel d'un fluide parfait incompressible et homogène, de masse volumique ρ , autour d'un cylindre immobile de rayon a et d'axe (Oz) perpendiculaire à l'écoulement principal. A grande distance du cylindre, la vitesse du fluide est uniforme mais dépend du temps : $\vec{u} = u(t)\hat{x}$. L'écoulement est irrotationnel de potentiel $\phi(\vec{r}, t)$. Les effets de la pesanteur sont négligeables.



Une solution de l'équation de LAPLACE, $\Delta\phi = 0$, pour le potentiel des vitesses ϕ , s'écrit :

$$A(t)r \cos \theta + B(t) \ln \left(\frac{r}{a} \right) + D(t) \frac{\cos \theta}{r},$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires par rapport à l'axe de référence Ox .

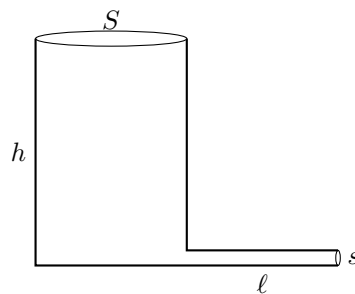
1. Donner les composantes du champ de vitesse en coordonnées polaires. Quelles doivent être les valeurs prises par A , B , et D ?
2. Déterminer la pression exercée par le fluide sur la surface du cylindre. En déduire la résultante, par unité de longueur, des forces de pression. Que se passe-t-il si $\frac{du}{dt} = 0$?
3. Comparer l'effet de masse ajoutée, induit par le mouvement du cylindre dans le fluide, à la masse de fluide équivalente du cylindre. Comparer au cas de la sphère, pour laquelle la masse ajoutée est la moitié de la masse fluide déplacée par la sphère.
4. Un vent de vitesse uniforme à l'infini V souffle horizontalement dans la direction Ox sur une cheminée cylindrique verticale de section circulaire, d'axe perpendiculaire à Ox , et de diamètre $2a = 4 \text{ m}$. La vitesse du vent étant modifiée dans le voisinage de la cheminée, à quelle distance horizontale de celle-ci doit-on se placer sur Ox en amont du cylindre ou sur la direction perpendiculaire Oy pour que la valeur de cette modification ne dépasse pas 1 % ?

5.3 Coup de Bélier

On appelle coup de bélier les variations de pression provoquées par la modification brusque du régime d'écoulement dans une conduite. Supposons d'abord que la conduite soit courte. Il se produit, pendant la durée de manœuvre du vannage, un nombre important d'allers-retours d'ondes, et tout se passe comme si les variations de débit se transmettaient instantanément. C'est le domaine du coup de bélier en masse. On se propose d'étudier ce phénomène en utilisant le théorème de BERNOULLI pour un fluide en mouvement non permanent. On suppose que pendant la fermeture de la vanne, la vitesse moyenne de l'écoulement décroît linéairement avec le temps :

$$c = c_m \left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

On considère un réservoir de grand volume, de section à la surface S , contenant de l'eau jusqu'à une hauteur $h(t)$ pouvant varier (lentement) au cours du temps. En partie basse du réservoir se raccorde une conduite horizontale de section $s \ll S$ et de longueur ℓ , qui se termine par une vanne que l'on ferme brutalement.



1. Établir la relation de BERNOULLI pour un écoulement non permanent irrotationnel.
2. On considère un point A de la conduite, situé à l'abscisse x par rapport à l'entrée de la conduite. En considérant ce que serait la pression le long de la conduite en régime permanent, montrer que la surpression créée en A , par la fermeture de la vanne, s'écrit :

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = h - \frac{c^2}{2g} - \frac{1}{g} \frac{dc}{dt} x.$$

3. En remplaçant la vitesse par son expression, montrer que la surpression se réduit à la somme de deux termes :

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{\Delta p_1}{\rho g} + \frac{\Delta p_2}{\rho g},$$

où le premier terme représente l'action normale due à la diminution de la pression dynamique, et le second terme l'action des forces d'accélération.

4. Déterminer l'expression de la valeur maximale de surpression à l'extrémité du tuyau, et montrer qu'elle vaut :

$$\Delta p_2 = \frac{\rho \ell c_m}{T}.$$

6 — Fluides visqueux

6.1 Écoulement de Poiseuille

On s'intéresse ici à l'écoulement le plus simple (cas académique) : l'écoulement permanent d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique de très grande longueur. La vitesse n'a alors qu'une seule composante (le long de l'axe de la conduite, qu'on identifiera avec l'axe Oz). On suppose aussi que l'écoulement est à symétrie axiale (pas de dépendance vis-à-vis de la variable angulaire θ) :

$$\vec{v} = v(r, z)\hat{e}_z.$$

1. Montrer que dans les conditions évoquées, si le fluide est incompressible, alors $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = 0$.
2. En déduire que la vitesse ne dépend en fait que de la variable radiale r , et que l'équation de NAVIER-STOKES se réduit à l'équation de STOKES (en négligeant les effets de la pesanteur dans la conduite) :

$$-\nabla p + \mu \Delta \vec{v} = \vec{0}.$$

3. En projetant cette équation sur $\hat{e}_r$, montrer que la pression est indépendante de r .
4. Par projection sur $\hat{e}_z$, déduire que le gradient de pression G_p est nécessairement une constante.
5. En intégrant l'équation différentielle de la vitesse, et en choisissant des conditions aux limites adéquates, montrer que le profil de vitesse est parabolique. C'est l'écoulement de POISEUILLE.
6. Comment le profil de vitesse dépend-il du gradient de pression G_p ? En déduire si l'écoulement s'effectue des hautes vers les basses pressions.

6.2 Écoulement de Couette cylindrique

Un dispositif de COUETTE¹ cylindrique est composé de deux cylindres concentriques de longueur L , de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 ($L \gg R_2 - R_1$). On place dans l'entrefer un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η et on impose une rotation uniforme à chacun des cylindres. On s'intéresse au régime stationnaire.

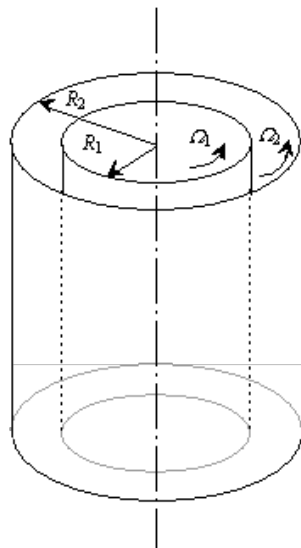


FIGURE 4 – Dispositif de COUETTE cylindrique.

1. MAURICE COUETTE (1858-1943) réalisa sa thèse théorique et expérimentale sur ce dispositif en 1888. Son appareil, construit par EUGÈNE DUCRETET (qui construisit aussi le premier télégraphe sans fil), était très ingénieux et lui permit de mesurer avec une grande précision la viscosité de l'eau et de l'air. En 1923, G.I. TAYLOR (1866-1975) montra à la fois théoriquement et expérimentalement la déstabilisation de l'écoulement de Couette en tourbillons annulaires contrarotatifs dans le cas où le cylindre intérieur tourne tandis que le cylindre extérieur est fixe.

1. Quelles sont les symétries du système ? Que peut-on en déduire pour l'écoulement ? Dans quelles limites ? Avec l'hypothèse d'incompressibilité du fluide, en déduire de quelle forme est la vitesse
2. Ecrire les équations du mouvement et en déduire l'expression de la vitesse dans l'entrefer pour un écoulement stationnaire, lorsqu'on impose les vitesses de rotation Ω_1 et Ω_2 constantes aux cylindres intérieur et extérieur. La viscosité intervient-elle ? Pourquoi ?
3. Quelle est la vorticité de cet écoulement ? Quelle partie du champ de vitesse y contribue ?
4. Déterminer les couples s'exerçant sur les cylindres intérieur et extérieur. Que peut-on en dire ? Comment agit le couple sur le cylindre intérieur quand $\Omega_1 = 0$ et $\Omega_2 > 0$? Et quand $\Omega_1 > 0$ et $\Omega_2 = 0$? Et pour le cylindre externe ?

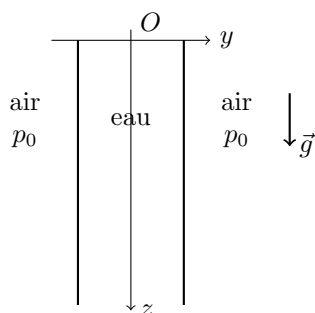
7 — Écoulements de drainage dans les mousses

(D'après le sujet d'examen d'octobre 2010)

On s'intéresse ici à la "stabilité" de mousses, mousse de bière ou mousse de savon par exemple, constituées de bulles d'air séparées par des minces films liquides. Ces films liquides sont soumis à la gravité et s'amincissent donc progressivement par drainage. On considérera dans la suite la situation modèle d'un film liquide vertical de mousse d'eau savonneuse ou non. Dans le cas de mousses de savon, les "molécules de savon", appelés tensioactifs, se placent aux interfaces eau-air et les rigidifient de telle sorte que ces interfaces se comportent comme des parois solides (mais bien sûr déformables). On considérera dans tout ce problème les écoulements incompressibles. La viscosité dynamique de l'eau, savonneuse ou non, sera prise égale à $\eta = 10^{-3}$ Pa·s.

7.1 Écoulement plan stationnaire dans un film de savon

On s'intéresse d'abord à l'écoulement dans un film de liquide (eau), plan, d'épaisseur b , qu'on considérera d'abord constante. Le film est dans l'air. On cherche une solution stationnaire d'écoulement parallèle.



1. Rappeler la définition d'un écoulement parallèle.
2. L'air, de part et d'autre du film liquide, étant à la pression atmosphérique p_0 , que peut-on dire de la pression dans le film ? Que vaut donc le terme dp/dz ?
3. A quoi est dû l'écoulement d'eau dans le film ?
4. A quoi se réduit l'équation de Navier-Stokes gouvernant l'écoulement dans le film ? Justifier votre réponse.
5. En précisant les conditions aux limites aux "interfaces rigides", calculer le champ de vitesse et dessiner le profil de vitesse dans le film. Commenter ce profil.
6. Montrer que le débit (par unité de largeur transverse suivant x) s'écrit $q = \alpha b^3$, en précisant l'expression de α . En déduire l'expression de la vitesse moyenne débitante U . Calculer le nombre de Reynolds correspondant en fonction des paramètres du problème.
7. Application numérique : calculer la vitesse moyenne débitante U pour un film d'eau savonneuse d'épaisseur $b = 1$ mm. Calculer le nombre de Reynolds correspondant. Que pouvez-vous en conclure sur la nature de l'écoulement ? Laminaire ou turbulent ?

7.2 Écoulement dans un film de savon d'épaisseur lentement variable.

On considère maintenant un film toujours vertical dont les interfaces sont toujours rigidifiées par les tensioactifs, mais dont on stoppe l'alimentation en continu. L'épaisseur du film, $b(z, t)$, va donc varier, à partir de sa valeur initiale, b_0 , au cours du temps t et le long de z . Dans cette situation de drainage de film accroché en $z = 0$, on considérera que le débit, et donc l'épaisseur $b(0, t)$ en amont, diminuent progressivement avec le temps jusqu'à s'annuler.

1. Montrer qualitativement que l'épaisseur du film $b(z, t)$ va varier en z et t . Dessiner a priori la forme du film à différents instants.
2. Ecrire l'équation de Navier-Stokes suivant la verticale z . A partir de la condition d'incompressibilité, en désignant par θ l'angle local des parois avec la verticale, pour un film supposé symétrique par rapport au plan (x, z) , et en supposant que θ varie doucement avec z et reste toujours petit, que peut-on en conclure pour le rapport des vitesses verticale et horizontale u_y/u_z ? Quel terme visqueux de l'équation de Navier-Stokes suivant la verticale est-il prépondérant devant les autres ? Montrer qu'on peut négliger les termes non-linéaires devant le terme visqueux prépondérant à une condition sur le nombre de Reynolds et θ . On considérera cette condition satisfaite par la suite.

3. En raisonnant sur les ordres de grandeurs, à quelle condition le terme instationnaire est-il négligeable devant le terme visqueux ? On considérera cette condition satisfaite par la suite.
4. Compte tenu des approximations considérées dans les questions précédentes (2 et 3), et en considérant que le terme dp/dz est aussi négligeable à cet ordre d'approximation, écrire l'équation finale simplifiée. Comparer à l'équation obtenu à la question 7.1-4. En déduire l'expression de la vitesse verticale $u_z(y, z, t)$. Par quelle variable cette vitesse dépend-elle de z et de t ? En déduire le débit $q(z, t)$ de liquide s'écoulant (par unité de largeur transverse suivant x).
5. En raisonnant sur une bande de film d'épaisseur $b(z, t)$ située entre z et $z + dz$, montrer qu'on peut écrire la conservation de la masse (ou du volume) pendant un intervalle de temps élémentaire dt en considérant la variation de débit dq entre l'entrée et la sortie de cette bande et la variation d'épaisseur db pendant cet intervalle de temps élémentaire dt . Montrer qu'on aboutit à la relation simple

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\partial b}{\partial t}.$$

6. En réinjectant l'expression du débit dans l'équation précédente, montrer que cette équation admet les 2 solutions possibles : $b_1(z, t) = b_0$ et $b_2(z, t) = (\beta z/t)^{1/2}$ en précisant l'expression de β . Dessiner ces 2 solutions. Calculer la distance $z = z_c$ pour laquelle $b_2 = b_1$ à un instant t . Comment varie z_c avec t ? Quelle est la vitesse de déplacement de z_c ? Tracer l'allure correspondante du film avec les différentes zones, et discuter des domaines d'espace et de temps où les approximations faites risquent à de ne pas être satisfaites.
7. Application numérique : calculer la vitesse de déplacement dz_c/dt du point d'amincissement pour un film d'épaisseur initiale $b_0 = 1$ mm.

7.3 Écoulement stationnaire dans un film d'eau non savonneuse

On considère maintenant le cas d'un film vertical d'eau non savonneuse avec des interfaces eau-air classiques (les interfaces ne sont plus rigidifiées par les tensioactifs). Ces interfaces seront donc considérées comme des surfaces libres, sans contrainte exercée par l'air ambiant. On considère ici le régime d'écoulement stationnaire dans un film alimenté en continu par le haut, à débit constant.

1. Rappeler la condition à la limite sur une surface libre.
2. En supposant que l'angle des parois avec la verticale varie doucement avec la verticale et reste faible, justifier du fait qu'on puisse considérer d'une part que la pression est constante dans tout le film, d'autre part que le rapport des deux composantes de la vitesse soit tel que $u_y/u_z \ll 1$.
3. En considérant la condition à la limite sur les deux surfaces libres, justifier qu'on puisse considérer que la vitesse u_z soit ici indépendante de y . Justifier alors du fait qu'on puisse considérer l'écoulement dans le film comme un écoulement de fluide parfait, dont on rappellera la définition.
4. Ecrire alors, compte tenu des considérations des questions précédentes (2 et 3), la relation de Bernoulli sur une ligne de courant dans le film (attention à ne pas oublier que z est ici orienté vers le bas). En notant u_0 la vitesse de l'écoulement en $z = 0$, exprimer la vitesse u_z dans le film en fonction de z . En déduire le débit q (par unité de largeur transverse suivant x) en fonction de z .
5. En régime stationnaire, le débit varie-t-il le long du film ? En calculant le débit en haut du fil en fonction de u_0 et b_0 , montrer que l'épaisseur du film peut se mettre sous la forme $b(z) = b_0(1 + \xi z)^{-1/2}$ en précisant l'expression de ξ . En déduire alors l'expression de $\tan \theta$ en fonction de z . Quel est le signe de θ ? En déduire s'il y a amincissement ou épaissement du film. Que vaut θ en haut du film (en $z = 0$) et loin en aval (pour $z \rightarrow \infty$) ? Dessiner l'allure du profil du film $b(z)$. Discuter la forme de ce profil. À quoi est dû l'amincissement ? Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement en fonction de z . Augmente-t-il ou diminue-t-il le long de l'écoulement ?
6. Application numérique : calculer θ en $z = 0$ pour un film d'épaisseur $b = 1$ mm et une vitesse d'alimentation en haut $u_0 = 0,1$ m/s.
7. Réfléchir enfin à la forme du filet d'eau sortant d'un robinet. Pouvez-vous exprimer, par le même type de raisonnement que celui suivi précédemment, la variation du diamètre du filet d'eau en fonction de sa distance z en aval ? Commenter.

Annexes

A — Formulaire

A.1 Opérateurs différentiels

- Relations usuelles :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} U) &= \Delta U \\
 \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) &= 0 \\
 \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} U) &= 0 \\
 \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}) &= \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \\
 \overrightarrow{\operatorname{grad}}(UW) &= U \overrightarrow{\operatorname{grad}} W + W \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \\
 \operatorname{div}(U\vec{A}) &= U \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \\
 \overrightarrow{\operatorname{rot}}(U\vec{A}) &= \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \wedge \vec{A} + U \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \\
 \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{B} \\
 \operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} \\
 \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{B}
 \end{aligned}$$

- Relations intégrales :

$$\begin{aligned}
 \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} &= \iint_{S(C)} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{S} && \text{(théorème de STOKES)} \\
 \oint_C U d\vec{l} &= - \iint_{S(C)} \overrightarrow{\operatorname{grad}} U \wedge d\vec{S} \\
 \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \iiint_{V(S)} \operatorname{div} \vec{A} dV && \text{(théorème de GREEN–OSTROGRADSKY)} \\
 \oiint_S U d\vec{S} &= \iiint_{V(S)} \overrightarrow{\operatorname{grad}} U dV \\
 \oiint_S \vec{A} \wedge d\vec{S} &= - \iiint_{V(S)} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} dV \\
 \oiint_S (U \overrightarrow{\operatorname{grad}} W - W \overrightarrow{\operatorname{grad}} U) \cdot d\vec{S} &= \iiint_{V(S)} (U \Delta W - W \Delta U) dV
 \end{aligned}$$

- Théorème de Leibnitz :

$$\frac{d}{dt} \int_0^{h(t)} f(x, t) dx = \int_0^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f[h(t), t] \frac{dh(t)}{dt}$$

- Théorème du transport de Reynolds :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} f(\vec{r}, t) dV = \iiint_{V(t)} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} \left(f \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right] dV$$

- Coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(U) = \vec{\nabla}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \vec{\nabla}^2(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\vec{\Delta}(\vec{A}) = \vec{\nabla}^2(\vec{A}) = (\Delta A_x) \vec{e}_x + (\Delta A_y) \vec{e}_y + (\Delta A_z) \vec{e}_z$$

• **Coordonnées cylindriques :**

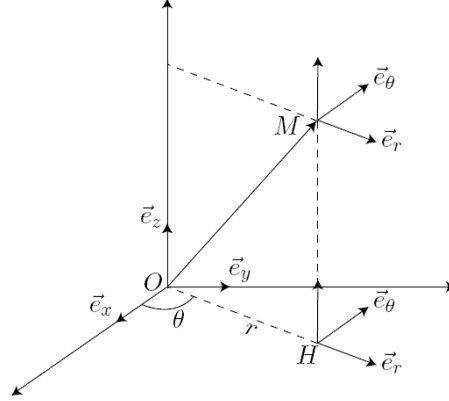


FIGURE 5 – Notations utilisées dans le système des coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$\vec{\text{grad}} U = \vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \vec{\nabla}^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\vec{\Delta}(\vec{A}) = \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \left(\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{e}_r + \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta + (\Delta A_z) \vec{e}_z$$

• **Coordonnées sphériques :**

$$\vec{\text{grad}}(U) = \vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \vec{\nabla}^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r U) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

$$\vec{\Delta}(\vec{A}) = \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \left(\Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r$$

$$+ \left(\Delta A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\theta + \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_\varphi$$

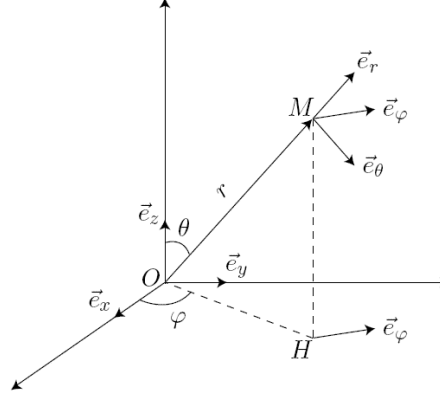


FIGURE 6 – Notations utilisées dans le système des coordonnées sphériques (r, θ, φ)

A.2 Conservation de la masse et équation de Navier–Stokes

Pour un fluide Newtonien et incompressible on a :

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{f}_m + \nu \vec{\nabla}^2 u$$

- En coordonnées cartésiennes avec $\vec{u} = (u, v, w)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

sur l'axe x

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x + \eta \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

sur l'axe y

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + f_y + \eta \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right]$$

sur l'axe z

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \eta \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]$$

- En coordonnées cylindriques avec $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

sur l'axe r

$$\rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right]$$

sur l'axe θ

$$\rho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]$$

sur l'axe z

$$\rho \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$$

• En coordonnées sphériques avec $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_\varphi)$:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

sur l'axe r

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r \\ + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r u_r) - \frac{2u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned}$$

sur l'axe θ

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta \\ + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r u_\theta) - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned}$$

l'axe φ

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_\varphi \cot \theta}{r} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + f_\varphi \\ + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r u_\varphi) - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right] \end{aligned}$$

B — A propos du théorème du transport de Reynolds

Soit une fonction $f(\vec{r}, t)$ dépendant des coordonnées d'espace $\vec{r}$ et du temps t . On s'intéresse aux variations temporelles de la grandeur

$$M(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} f(\vec{r}, t) d^3\vec{r},$$

où le domaine $\mathcal{D}(t)$ considéré peut se déplacer et se déformer au cours du temps (on parle de volume de contrôle). On note $\vec{V}(\vec{r}, t)$ la vitesse de déplacement d'un point $\vec{r}$ se situant sur la surface $S(t)$ du domaine mobile $\mathcal{D}(t)$. On peut montrer que

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{D}(t)} f(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \right] = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial f}{\partial t} d^3\vec{r} + \oint_{S(t)} f(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

$$= \int_{\mathcal{D}(t)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} [f(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t)] \right\} d^3\vec{r} \quad (2)$$

Ce résultat constitue le théorème du transport de REYNOLDS, qui peut se généraliser à une grandeur $\vec{F}(\vec{r}, t)$ vectorielle. En effet, en écrivant (1) pour chacune des composantes du champ $\vec{F}$, il vient :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{D}(t)} \vec{F}(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \right] = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} d^3\vec{r} + \oint_{S(t)} \vec{F}(\vec{r}, t) (\vec{V} \cdot d\vec{S}). \quad (3)$$

Pour un volume de contrôle fixe, on retrouve :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \vec{F}(\vec{r}, t) d^3\vec{r} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} d^3\vec{r}. \quad (4)$$

B.1 Conservation de la masse

Dans le cas particulier où f désigne la masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$ d'un fluide (éventuellement compressible) de champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$, le taux de variation de la masse $M(t)$ contenue dans le domaine $\mathcal{D}(t)$ est ainsi donné par

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\vec{r} + \oint_{S(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{V}) \right] d^3\vec{r}.$$

Le déplacement de $\mathcal{D}(t)$ est pour le moment arbitraire (en conséquence de quoi $\vec{V} \neq \vec{v}$ en général). On peut néanmoins choisir de suivre dans leur mouvement les particules fluides contenues à l'instant initial dans le domaine $\mathcal{D}(0)$ (le volume de contrôle est alors un volume "matériel"). Dans ces conditions, $\vec{V} = \vec{v}$. De plus, en l'absence de sources de création ou d'annihilation de matière (cas générique), la masse $M(t)$ se conserve au cours du temps, indépendamment des déformations de $\mathcal{D}(t)$. On a alors

$$\frac{dM}{dt} = 0 \iff \int_{\mathcal{D}(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) \right] d^3\vec{r} = 0,$$

et l'on retrouve la relation de continuité.

Exemple d'application : obtention des équations du mouvement en "eau peu profonde"

B.2 Transport de la quantité de mouvement

Soit à l'instant $t = 0$ un volume $\mathcal{D}(0)$, que l'on suit avec le mouvement des particules fluides qu'il contient (volume matériel). Comme précédemment, on a ici $\vec{V}(M, t) = \vec{v}(M, t)$ pour tous les points M de la surface $S(t)$ du volume $\mathcal{D}(t)$. On note $\vec{F}(t)$ la résultante des forces extérieures s'exerçant sur $\mathcal{D}(t)$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_{\mathcal{D}(t)} \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) d^3\vec{r} \right],$$

que l'on peut réexprimer à l'aide du théorème du transport :

$$\vec{F}(t) = \int_{\mathcal{D}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) d^3 \vec{r} + \oint_{S(t)} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}). \quad (5)$$

Exemple d'application : voir le TD sur le ressaut hydraulique (page ??). Obtention de la vitesse de propagation d'un mascaret en fonction des caractéristiques du ressaut.

Exercice 1 A l'aide du théorème du transport, retrouver la règle de LEIBNITZ

$$\frac{d}{dt} \int_0^{h(t)} f(x, t) dx = \int_0^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + f[h(t), t] \frac{dh(t)}{dt}.$$

Exercice 2 Interprétation de l'opérateur divergence.

Soit un volume matériel élémentaire δv . Etablir que le taux de variation de δv est donné par la divergence du champ de vitesse $\vec{v}$:

$$\frac{1}{\delta v} \frac{d(\delta v)}{dt} = \text{div } \vec{v}.$$

Exercice 3 Considérons un volume matériel $\mathcal{D}(t)$. Montrer que pour toute fonction $\Phi(\vec{r}, t)$, on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \Phi d\vec{r} = \int_{\mathcal{D}(t)} \rho \frac{D\Phi}{Dt} d\vec{r},$$

où D/Dt désigne la dérivée particulaire. Ce résultat est parfois désigné sous le nom de théorème de REYNOLDS.