

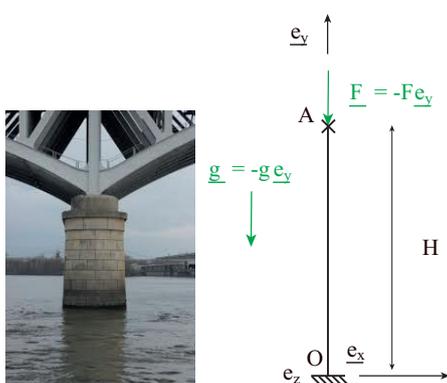
Master M1 Mécanique

Mécanique des Milieux Continus - Solides

TD

TD 1 - Poutres droites

1 Prédimensionnement d'une pile de pont

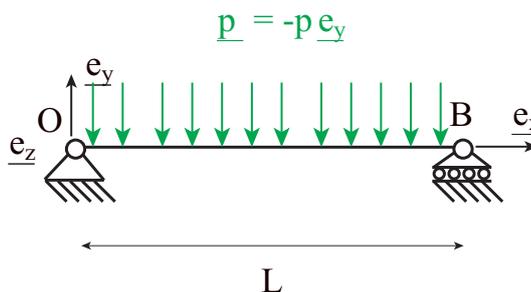


On cherche à prédimensionner une pile de pont en béton. Celle-ci est modélisée par un cylindre de diamètre $d = 2$ m en béton ($\rho = 2200\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ avec $E = 30$ GPa) et de hauteur $H = 10$ m. En plus de son propre poids, cette pile doit supporter un tablier qui impose un effort $F = 2.5 \times 10^7$ N en haut de la pile.

Question 1.1 : Déterminer la contrainte généralisée et le déplacement généralisé.

Question 1.2 : Déterminer la valeur du déplacement maximal.

2 Prédimensionnement d'un tablier de pont



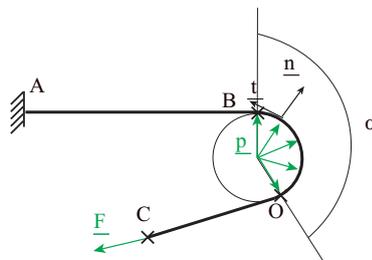
On cherche à prédimensionner un tablier de pont en béton. Celle-ci est modélisée par une poutre de longueur $L = 40$ m à section rectangulaire de hauteur $h = 1$ m et de largeur $b = 5$ m en béton ($\rho = 2200\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ avec $E = 30$ GPa).

Question 2.1 : Déterminer le déplacement généralisé et la contrainte généralisée.

Question 2.2 : Déterminer la valeur du déplacement maximal.

TD 2 - Poutres planes et gauches

1 Fonctionnement d'un winch de bateau



On s'intéresse au fonctionnement d'un winch de bateau. Cet appareil permet au navigateur de maintenir une forte tension dans une voile en appliquant un faible effort de son côté grâce à une corde enroulé autour de ce winch. Le navigateur contrôle alors la tension en donnant plus ou moins de mou. L'objectif est ici de déterminer le rapport entre la tension dans la voile (au point C) et la tension exercé par l'utilisateur (modélisé par l'encastrement au point A). Le winch est modélisé par cylindre de rayon ρ_0 . La corde est modélisé par une poutre plane de diamètre d , de module d'Young E respectant l'hypothèse d'Euler-Bernoulli. L'angle d'enroulement de la corde autour du winch est noté α . On utilise le repère de Frenet $(\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s))$. L'origine des abscisses curviligne s est prise en O .

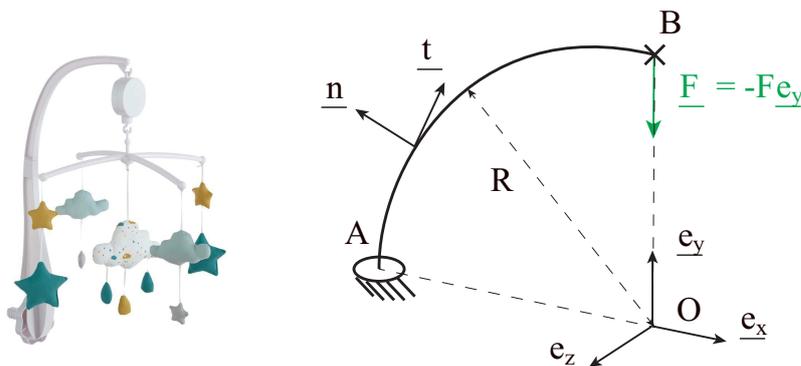
Question 1.1 : La corde est placée en permanence en contact contre le winch. En utilisant les autres conditions limites et les conditions de charges, intuitionner la nature du déplacement généralisé et de la déformation généralisée en identifiant la nature de la sollicitation dans la corde. En déduire $M_{fb}(s)$ et $T_n(s)$.

Question 1.2 : Le tambour appuie avec une pression linéique $p(s)$ radiale. Le coefficient de frottement entre le tambour et la corde est noté f . Ecrire l'équilibre local de la corde.

Question 1.3 : Déterminer le rapport de démultiplication aux extrémités de la corde. Conclure.

2 Prédimensionnement d'un mobile pour bébé

On considère le mobile pour bébé ci-dessous. Afin d'assurer la sécurité de bébé, on cherche le déplacement de la structure lorsque bébé applique un effort à l'extrémité du mobile, modélisé par \underline{F} . On modélise le mobile par une poutre homogène AB dont la ligne moyenne est constituée d'un quart de cercle de rayon R centré en O . Sa section est circulaire et on notera d son diamètre qui est petit devant R . Le comportement du matériau est élastique linéaire isotrope et on appelle E son module d'Young. On fera l'hypothèse d'Euler-Bernoulli.



2.1 Chargement dans le plan de la poutre

L'effort exercé par l'enfant est tel $\underline{F} = -F \underline{e}_y$ au point B.

Question 2.1.1 : Déterminer les actions mécaniques au point A.

Question 2.1.2 : Déterminer la contrainte généralisée.

Question 2.1.3 : Déterminer la déformation généralisée.

Question 2.1.4 : Déterminer le déplacement généralisé au point B avec les formules de Bresse dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$.

2.2 Chargement hors plan de la poutre

L'effort exercé par l'enfant est tel $\underline{F} = -F \underline{e}_z$ au point B.

Question 2.2.1 : Déterminer les actions mécaniques au point O.

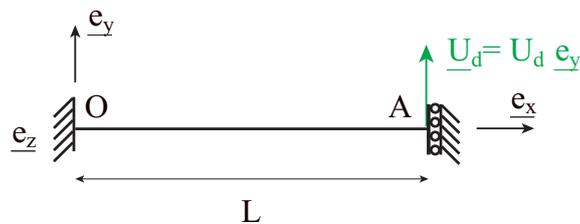
Question 2.2.2 : Déterminer la contrainte généralisée.

Question 2.2.3 : Déterminer la déformation généralisée.

Question 2.2.4 : Déterminer le déplacement généralisé au point B avec les formules de Bresse dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$.

TD 3 - Théorèmes énergétiques

1 Poutre en cisaillement



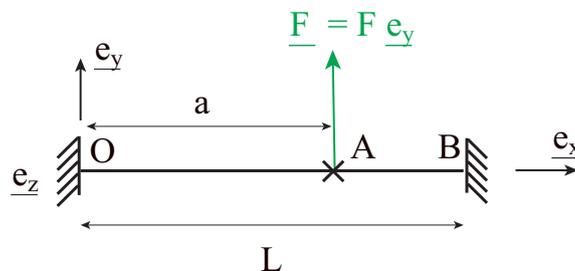
On considère la poutre définie ci-dessus, de longueur L , de module d'Young E , de section S et d'inertie I . Le modèle de poutre utilisé est celui d'Euler-Bernoulli. Elle est soumise à un déplacement imposé et une rotation nulle au point A et un encastrement au point O .

Question 1.1 : Écrire les relations CA et SA.

Question 1.2 : À l'aide du théorème de l'énergie complémentaire, déterminer la contrainte généralisée.

Question 1.3 : Déterminer l'équation de la déformée.

2 Poutre biencastée en flexion



On considère cette poutre biencastée. Elle est soumise à un effort concentré F . On fait l'hypothèse d'Euler-Bernoulli.

Question 2.1 : Écrire les équations du problème.

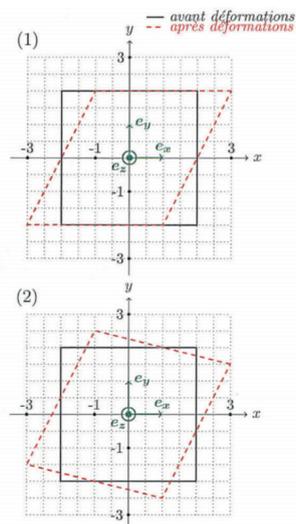
Question 2.2 : À l'aide du théorème de l'énergie complémentaire, résoudre le problème.

Question 2.3 : Déterminer l'équation de la déformée.

Question 2.3 : Vérifier que le champ de déplacement et le champ de contrainte de ce résultat vérifie toutes les équations du problème.

TD 4 - Cinématique des milieux continus

1 Mesure d'une transformation



Considérons un solide déformable parallélépipédique dans un repère cartésien $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$. Nous nous plaçons dans l'hypothèse des petites perturbations. On observe ici des déplacements uniquement contenus dans le plan $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$. Dans chacun des deux cas représentés sur les figures ci-contre :

Question 1.1 : Déterminer les composantes du champs de déplacement $\underline{U} = U_x \underline{e}_x + U_y \underline{e}_y + U_z \underline{e}_z$.

Question 1.2 : Déterminer le tenseur des déformations linéarisées.

Question 1.3 : Déterminer le tenseur des rotations infinitésimales.

2 Expansion plane homogène

On donne, dans l'espace physique \mathbb{R}^3 rapporté au repère orthonormé direct $R = (O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$, la transformation linéaire $\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t)$ suivante :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 = X_2 - \alpha t X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

où $t \geq 0$ est la variable temps, $\alpha > 0$ une constante donnée et où $\underline{X} = X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2 + X_3 \underline{e}_3$ désignent les coordonnées de la particule M à l'instant de référence $t = 0$ (variables de Lagrange) et $\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$ désignent les coordonnées de la particule M à l'instant courant t . Enfin, on pourra poser, dans tout le problème et afin d'alléger l'écriture, poser $\tau = \alpha t$.

Question 2.1 : Déterminer la nature des trajectoire des particules. On pourra, par exemple, expliciter la déformation d'un cube de longueur η .

Question 2.2 : Donner la dimension du paramètre α .

Question 2.3 : Déterminer la transformation $\underline{\mathbb{F}} = \underline{\text{Grad}} \underline{\Phi}$.

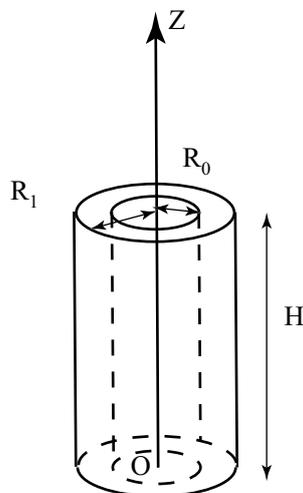
Question 2.4 : En déduire le tenseur de Green-Lagrange $\underline{\mathbb{E}}$. Donner les déformations principales et les directions principales de $\underline{\mathbb{E}}$.

Question 2.5 : Donner l'expression de la masse volumique ρ à l'instant t en supposant celle-ci uniforme et égale à ρ_0 à l'instant de référence $t = 0$.

Question 2.6 : Déterminer la vitesse lagrangienne.

Question 2.7 : Déterminer la vitesse eulérienne.

3 Transformation finie d'un tube épais



Le tube épais de rayon intérieur R_0 , de rayon R_1 et de hauteur H représenté sur la figure ci-dessus est soumis à un système d'actions mécaniques extérieures induisant la transformation

$$\begin{cases} r = R + \alpha t Z^2 \\ \theta = \Theta \\ z = (1 + \beta t) Z \end{cases}$$

où (R, Θ, Z) (respectivement (r, θ, z)) sont les coordonnées cylindriques d'une particule quelconque mais fixée avant (respectivement après) transformation, où $t \geq 0$ désigne la variable temps et où α et β sont deux constantes données et strictement positives de dimensions respectives $L^{-1}T^{-1}$ et T^{-1} .

Question 3.1 : Donner, en fonction des variables de Lagrange R, Θ et Z , les expressions des champs des déplacements.

Question 3.2 : Soient à présent les couronnes matérielles ayant pour équations à l'instant initial $Z = cste$, $R \in [R_0, R_1]$. Évaluer l'aire de leurs transformées à l'instant t .

Question 3.3 : Évaluer successivement la transformation $\underline{\underline{F}}$ et le tenseur de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$.

Question 3.4 : Calculer le volume V qu'occupe la transformée du cylindre à l'instant t .

TD 5 - Problèmes élémentaires des milieux continus

1 Equilibre d'un sphère

On étudie l'équilibre d'une sphère pleine élastique homogène isotrope, de centre O , de rayon R . On se place dans le repère orthonormé $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$, où l'axe (O, \underline{e}_z) est vertical orienté vers le haut. On suppose que le champ de déplacement $\underline{U} = U_x \underline{e}_x + U_y \underline{e}_y + U_z \underline{e}_z$ s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_x = -\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} x \left(\frac{R}{3} - \frac{z}{5} \right) \\ U_y = -\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} y \left(\frac{R}{3} - \frac{z}{5} \right) \\ U_z = -\frac{\rho g}{2(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{R^2 + 2Rz}{3} - \frac{x^2 + y^2 + 3z^2}{5} \right) \end{cases}$$

où ρ est la densité de la sphère, g l'accélération de la pesanteur, λ et μ les coefficients de Lamé.

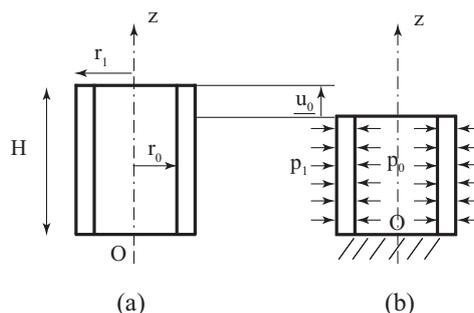
Question 1.1 : Calculer le tenseur de Green-Lgrange linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Question 1.2 : Calculer le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$.

Question 1.3 : Calculer les forces volumiques qui doivent s'exercer à l'intérieur de la sphère pour que la sphère soit à l'équilibre.

Question 1.4 : Calculer l'accroissement de volume de la sphère.

2 Compression-confinement d'un cylindre creux



Un cylindre creux de hauteur H , de rayon intérieur r_0 et de rayon extérieur r_1 est constitué d'un matériau homogène, élastique, linéaire et isotrope, de coefficient de Lamé λ et μ . Ce matériau obéit à la loi de Hooke. Le cylindre est soumis à une pression intérieure p_0 en $r = r_0$ et à une pression extérieure p_1 en $r = r_1$. Le déplacement vertical à la base $z = 0$ vaut $u_z(0) = 0$, alors que sa valeur en tête $z = H$ est égale à $u_z(H) = -u_0$. La figure ci-dessus illustre le problème et les conditions limites. Enfin, le champ des déplacements exprimé dans le repère local $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ associé au système de coordonnées cylindrique (r, θ, z) est supposé adopter la forme $\underline{u} = u_r(r)\underline{e}_r + u_z(z)\underline{e}_z$.

Question 2.1 : Écrire les équations de liaisons, les équations d'équilibre et la relation de comportement.

Question 2.2 : Calculer le tenseur de Green-Lgrange linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Question 2.3 : Calculer le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$.

Question 2.4 : Déterminer $u_z(z)$.

Question 2.5 : Montrer que

$$u_r(r) = Ar + \frac{B}{r},$$

où A et B sont des constantes à déterminer en fonction $u_0, p_0, p_1, \lambda, \mu, H, R_0$ et R_1 .

Question 2.6 : Écrire $\underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ en fonction de $\lambda, \mu, A, B, u_0, H$ et r .

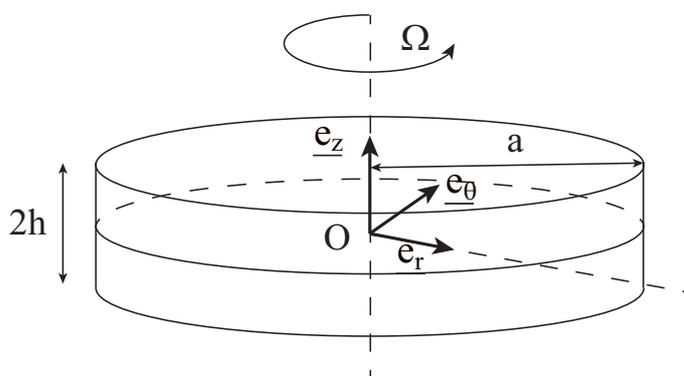
Question 2.7 : On s'intéresse ici aux sollicitations (u_0, p_0, p_1) qui annulent u_r . Montrer que $p = p_0 = p_1$ et donner l'expression de p en fonction de λ, u_0 et H .

Question 2.8 : On s'intéresse ici aux sollicitations (u_0, p_0, p_1) qui annulent la contrainte verticale σ_{zz} . Quelle est la relation entre u_0, p_0 , et p_1 ?

TD 6 - Équilibre des milieux continus

1 Vitesse de rotation maximale d'un disque

On considère un disque homogène et isotrope de coefficients de Lamé λ et μ , de masse volumique ρ , de rayon a et d'épaisseur $2h$, tournant à la vitesse Ω autour de son axe que l'on notera \underline{e}_z . On se rend compte que la rotation soumet le disque à une force inertielle de densité $\underline{f} = \rho\Omega^2 r \underline{e}_r$, le poids du disque devenant alors négligeable devant cette action mécanique. Le disque est maintenu par des contacts sans frottement sur les surfaces horizontales en $z = \pm h$. On considèrera de plus que la surface latérale est libre d'effort. Cette étude se fait dans le cadre de l'élasticité linéaire : on note λ et μ les coefficients de Lamé du matériau. Cependant, ce matériau possède une limite d'élasticité qui est évalué à R_e . On effectue les calculs dans une base cylindrique $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$.



Question 1.1 : Écrire l'équation d'équilibre du disque.

Question 1.2 : Donner les conditions aux limites du problème.

On cherche le champ de déplacement du disque sous la forme : $\underline{U} = u_r(r) \underline{e}_r$.

Question 1.3 : Montrer $\text{rot } \underline{U} = \underline{0}$.

Question 1.4 : Écrire l'équation de Navier pour ce champ de déplacement.

Question 1.5 : Montrer que les champs de déplacement solutions sont de la forme :

$$\underline{U}(r) = \left(-\frac{\rho\Omega^2}{8(\lambda + 2\mu)} r^3 + \frac{Cr}{2} + \frac{B}{r} \right) \underline{e}_r$$

Question 1.6 : Déterminer la valeur de B par un argument physique pertinent.

Question 1.7 : Déterminer le champ de déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$ et le champ de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ associés à ce déplacement.

Question 1.8 : Dédire des conditions aux limites du problème la constante C et donc le champ de déplacement.

On suppose pour la suite que $\lambda = \mu$.

Question 1.9 : Appliquer le critère de Tresca. En déduire la vitesse maximale autorisée Ω_{\max} . Quelle application voyez-vous à ce problème ?

Question 1.10 : Déterminer la pression $p(r)$ dans le disque.

Question 1.11 : À partir du tenseur déviatorique, appliquer le critère de Von Mises. En déduire la vitesse maximale autorisée Ω_{\max} .

Question 1.12 : Déterminer l'action mécanique exercée par les contacts sans frottement. Que représente t'elle?

TD 8 - Torsion de poutre avec gauchissement de section

1 Mise en équations

On étudie sous l'hypothèse des petites perturbations, la torsion d'une poutre droite de hauteur L d'axe (O, \underline{e}_z) et de section S constante. Le matériau constitutif de la poutre est isotrope de module d'Young E et coefficient de Lamé μ . La poutre est soumise à des efforts surfaciques tels que l'action mécanique résultante vaut respectivement $C\underline{e}_z$ sur l'extrémité S_L alors qu'elle est soumise à une action mécanique inconnue sur l'extrémité S_0 . Le scalaire J tel que $C = \alpha\mu J$ est appelé inertie de torsion de la section S .

Question 1.1 : Faire un schéma du problème et déterminer l'action mécanique sur l'extrémité S_0 .

Question 1.2 : Écrire les équations du problème d'élasticité.

Question 1.3 : Donner une condition nécessaire d'existence de solution unique. Cette condition est-elle vérifiée ?

2 Approche en déplacement

2.1 Section quelconque

Un point M de la poutre est repéré par sa cote z et par sa position dans la section \underline{X} :

$$\underline{OM} = \underline{X} + z\underline{e}_z = x\underline{e}_x + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z$$

Une solution en déplacement de ce problème est recherchée sous la forme :

$$\underline{U} = \alpha(z\underline{e}_z \wedge \underline{OM} + \varphi(\underline{X})\underline{e}_z),$$

où φ est la fonction de gauchissement.

Question 2.1.1 : À quelle condition ce champ est-il cinématiquement admissible ? On supposera cette condition vérifiée dans la suite de problème.

Question 2.1.2 : Calculer $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U})$ puis $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{U})$.

Question 2.1.3 : Déterminer les équations vérifiées par φ pour que $\underline{\underline{\sigma}}$ soit statiquement admissible. Exprimer J en fonction de φ .

Question 2.1.4 : On note $\underline{\tau}$ le vecteur de cisaillement tel que $\underline{\tau} = \underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_z$. Vérifier que $\underline{\tau}$ appartient au plan de la section S . Les enveloppes du champ $\underline{\tau}$ seront appelées lignes de cisaillement ou lignes de cisssion. Donner l'expression de $\underline{\tau}$ en fonction de φ , de \underline{X} , de μ et de α . En déduire l'expression de $\underline{\tau}$ en fonction de J et de C . Montrer que le bord libre est une ligne de cisaillement.

2.2 Cas d'une section pleine elliptique de grand axe a et de petit axe b

Question 2.2.1 : Montrer que $\varphi(x, y) = kxy$ vérifie les équations de la question 2.1.3 pour une valeur de k que l'on précisera. Sachant que $I_x = \frac{\pi ab^3}{4}$ et $I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$, déterminer alors J .

Question 2.2.2 : Donner l'expression du champ \underline{U} dans ce cas particulier. Faire une représentation schématique du déplacement hors plan \underline{U} .

Question 2.2.3 : Donner l'expression de $\underline{\sigma}$ puis de $\underline{\tau}$ en fonction du couple appliqué C . Déterminer le lieu géométrique des lignes de cisaillement.

2.3 Cas particulier de la section circulaire de diamètre d

Question 2.3.1 : Donner l'expression du champ \underline{U} dans ce cas particulier.

Question 2.3.2 : Déterminer J .

Question 2.3.3 : Donner l'expression de $\underline{\sigma}$ puis de $\underline{\tau}$ en fonction du couple appliqué C . Déterminer le lieu géométrique des lignes de cisaillement.

3 Approche en contraintes

3.1 Section quelconque

On recherche une solution en contrainte du problème précédent. Pour cela, il est supposé que les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sont σ_{xz} et σ_{yz} . On pose de plus

$$\sigma_{xz}\underline{e}_x + \sigma_{yz}\underline{e}_y = -\alpha\mu (\underline{e}_z \wedge \underline{\text{grad}} \psi(\underline{X}))$$

Question 3.1.1 : À quelle condition portant sur ψ , la contrainte est Statiquement Admissible?

Question 3.1.2 : Quelles autres relations ψ devrait elle vérifier pour être associée à la solution exacte?

Question 3.1.3 : Déterminer l'expression de J en fonction de ψ .

3.2 Cas d'une section pleine elliptique de grand axe a et de petit axe b

Question 3.2.1 : Montrer que $\psi(x, y) = Ax^2 + By^2 + D$ vérifie les équations pour des valeurs de A , B que l'on précisera.

Question 3.2.2 : Donner l'expression de $\underline{\sigma}$ puis de $\underline{\tau}$ en fonction du couple appliqué C . Tracer les lignes de cisaillement.

Question 3.2.4 : Montrer que les lignes de cisaillement sont les lignes de niveau de la fonction $\psi(x, y)$.

Formulaire Poutres

- ◇ Equilibre local en résultante : $\frac{d\underline{R}}{ds} + \underline{p}(s) = \underline{0}$
- ◇ Equilibre local en moment : $\frac{d\underline{M}}{ds} + \underline{t}(s) \wedge \underline{R}(s) + \underline{m}(s) = \underline{0}$
- ◇ Saut à l'effort concentré : $\underline{R}(s_c^+) - \underline{R}(s_c^-) + \underline{F}_c = \underline{0} \Leftrightarrow \llbracket \underline{R} \rrbracket_{s_c} + \underline{F}_c = \underline{0}$
- ◇ Saut au moment concentré : $\underline{M}(s_c^+) - \underline{M}(s_c^-) + \underline{M}_c = \underline{0} \Leftrightarrow \llbracket \underline{M} \rrbracket_{s_c} + \underline{M}_c = \underline{0}$
- ◇ Contrainte généralisée :
$$\begin{array}{l} \underline{R}(s) = N\underline{t} + T_n\underline{n} + T_b\underline{b} \\ \underline{M}(s) = M_t\underline{t} + M_{fn}\underline{n} + M_{fb}\underline{b} \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Déplacement généralisé :} \\ \underline{\Omega}(s) = \omega_t\underline{t} + \omega_n\underline{n} + \omega_b\underline{b} \\ \underline{U}(s) = u_t\underline{t} + u_n\underline{n} + u_b\underline{b} \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Déformation généralisée :} \\ \underline{\chi}(s) = \chi_t\underline{t} + \chi_n\underline{n} + \chi_b\underline{b} \\ \underline{\varepsilon}(s) = \varepsilon_t\underline{t} + \varepsilon_n\underline{n} + \varepsilon_b\underline{b} \end{array} \right.$$
- ◇ Relations déplacements et déformations généralisées : $\underline{\chi}(s) = \frac{d\underline{\Omega}(s)}{ds} \quad \underline{\varepsilon}(s) = \frac{d\underline{U}(s)}{ds} + \underline{t} \wedge \underline{\Omega}(s)$
- ◇ Moment quadratique de section de hauteur h et le largeur b : $I = \frac{bh^3}{12}$ ou de diamètre d : $I = \frac{\pi d^4}{64}$
- ◇ Loi de Hooke : $N = ES\varepsilon_t \quad T_n = GS\varepsilon_n \quad T_b = GS\varepsilon_b$
 $M_t = G(I_n + I_b)\chi_t \quad M_{fn} = EI_n\chi_n \quad M_{fb} = EI_b\chi_b$
- ◇ Hypothèse Euler-Bernoulli : $\underline{\varepsilon}(s) \wedge \underline{t} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{\Omega}(s) = \Omega_t\underline{t} + \underline{t} \wedge \frac{d\underline{U}}{ds}$
- ◇ Formules de Bresse :
$$\underline{\chi}(s) = \frac{d\underline{\Omega}}{ds} \quad \underline{\varepsilon}(s) = \frac{d\underline{U}}{ds} + \underline{t}(s) \wedge \underline{\Omega}(s)$$

$$\underline{\Omega}(s_B) - \underline{\Omega}(s_A) = \int_{s_A}^{s_B} \underline{\chi}(s) ds \quad \underline{U}(s_B) - \underline{U}(s_A) = \underline{\Omega}(s_A) \wedge \underline{AB} + \int_{s_A}^{s_B} \underline{\varepsilon}(s) + \underline{\chi}(s) \wedge \underline{GB} ds$$
- ◇ Energie complémentaire :
$$\frac{1}{2} \int_P \frac{N^2}{ES} ds + \frac{1}{2} \int_P \frac{T_n^2}{GS} ds + \frac{1}{2} \int_P \frac{T_b^2}{GS} ds$$

$$E_c(\underline{R}, \underline{M}) = + \frac{1}{2} \int_P \frac{M_t^2}{G(I_n + I_b)} ds + \frac{1}{2} \int_P \frac{M_{fn}^2}{EI_n} ds + \frac{1}{2} \int_P \frac{M_{fb}^2}{EI_b} ds$$

 - [Travail des actions mécaniques dans les déplacements imposés]
- ◇ Energie potentielle :
$$\frac{1}{2} \int_P ES\varepsilon_t^2 ds + \frac{1}{2} \int_P GS\varepsilon_n^2 ds + \frac{1}{2} \int_P GS\varepsilon_b^2 ds$$

$$E_p(\underline{\varepsilon}, \underline{\chi}) = + \frac{1}{2} \int_P G(I_n + I_b)\chi_t^2 ds + \frac{1}{2} \int_P EI_n\chi_n^2 ds + \frac{1}{2} \int_P EI_b\chi_b^2 ds$$

 - [Travail des déplacements dans les actions mécaniques imposées]
- ◇ Minimisation Energie potentielle : $\left[\frac{dE_p(\underline{U}_e + \lambda \underline{U}^*, \underline{\Omega}_e)}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} = 0 \quad \left[\frac{dE_p(\underline{U}_e, \underline{\Omega}_e + \beta \underline{\Omega}^*)}{d\beta} \right]_{\beta=0} = 0$

Formulaire 3D

◇ Gradient d'une transformation $\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t) : \underline{F} = \underline{\text{Grad}} \underline{\Phi} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial \underline{X}}$

◇ Tenseur de Green-Lagrange : $\underline{E} = \frac{1}{2} [(\underline{F}^T)\underline{F} - \underline{1}]$

◇ Définition du déplacement : $\underline{U} = \underline{x} - \underline{X}$ avec $\underline{F} = \underline{1} + \underline{\text{Grad}} \underline{U} = \underline{1} + \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{X}}$

◇ Gradient d'une fonction scalaire f en coordonnées cartésiennes $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$:

$$\underline{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \underline{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \underline{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{e}_z$$

◇ Gradient d'un champ de vecteurs \underline{U} en coordonnées cartésiennes $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$:

$$\underline{\text{Grad}} \underline{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{\partial U_x}{\partial y} & \frac{\partial U_x}{\partial z} \\ \frac{\partial U_y}{\partial x} & \frac{\partial U_y}{\partial y} & \frac{\partial U_y}{\partial z} \\ \frac{\partial U_z}{\partial x} & \frac{\partial U_z}{\partial y} & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

◇ Gradient d'une fonction scalaire f en coordonnées cylindriques $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$:

$$\underline{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{e}_z$$

◇ Gradient d'un champ de vecteurs \underline{U} en coordonnées cylindriques $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$:

$$\underline{\text{Grad}} \underline{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - U_\theta \right) & \frac{\partial U_r}{\partial z} \\ \frac{\partial U_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r \right) & \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial U_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \theta} & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

◇ Tenseur de Green-Lagrange linéarisé : $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}) = \frac{1}{2} [\underline{\text{Grad}} \underline{U} + (\underline{\text{Grad}} \underline{U})^T]$

◇ Tenseur des rotations infinitésimales : $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{U}) = \frac{1}{2} [\underline{\text{Grad}} \underline{U} - (\underline{\text{Grad}} \underline{U})^T]$

◇ Variation de volume élémentaire : $d\Omega = \det(\underline{F}) d\Omega_0$

◇ Mouvement de corps rigide : $\underline{U} = \underline{U}_0 + \underline{\Omega} \wedge \underline{OM}$ ◇ Vecteur contrainte : $\underline{T}(M, \underline{n}) = \underline{\sigma} \underline{n}$

◇ Pression : $p = -\frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\sigma})$ Déviatorique : $\underline{\sigma}_D = \underline{\sigma} + p\underline{1}$ Von Mises : $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\sigma}_D : \underline{\sigma}_D}$

◇ Conservation de la masse : $\rho_0 = \det(\underline{F}) \rho$ Equilibre local : $\underline{\text{Div}}(\underline{\sigma}) + \underline{f} = \rho \underline{g}$

◇ Divergence d'un vecteur \underline{U} en coordonnées cartésiennes $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$:

$$\text{div} \underline{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

◇ Divergence d'un vecteur \underline{U} en coordonnées cylindriques $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$:

$$\text{div} \underline{U} = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

◇ Divergence d'un tenseur $\underline{\sigma}$ en coordonnées cartésiennes $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$:

$$\underline{\text{Div}} \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

◇ Divergence d'un tenseur $\underline{\sigma}$ en coordonnées cylindriques $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$:

$$\underline{\text{Div}} \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} \end{bmatrix}$$

◇ Loi de Hooke : $\underline{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{1} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$

$$\underline{\sigma} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{1} + \frac{E}{1+\nu} \underline{\underline{\varepsilon}}$$