Correction TD 4 - Cinématique des milieux continus

1 Mesure d'une transformation

Question 1.1 :

Pour le cas 1

$$\underline{U} = \frac{y}{2}\underline{e}_x$$

Pour le cas 2

$$\underline{U} = \frac{y}{4}\underline{e}_x - \theta\underline{e}_z \wedge (x\underline{e}_x + y\underline{e}_y)$$

θ petit en petites perturbations donc les longueurs peuvent être confondues $\tan\theta = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ d'où $\theta = \arctan\left(\frac{1}{4}\right)$

$$\underline{U} = \left(\frac{y}{4} + \theta y\right)\underline{e}_x - \theta x \underline{e}_y$$

Question 1.2 :

Pour le cas 1

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour le cas 2

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Question 1.3 :

Pour le cas 1

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

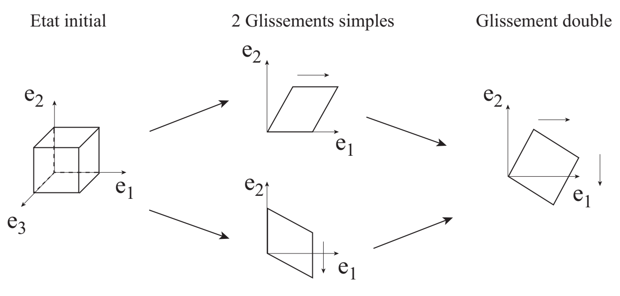
Pour le cas 2

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} + \theta & 0 \\ -\frac{1}{8} - \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 Expansion plane homogène

Question 2.1 : Il s'agit ici d'un double glissement. On peut le voir comme la somme de deux simples glissement consécutif et combiné

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} x_1 = X_1 \\ x_2 = X_2 - \alpha t X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$



Question 2.2 : α est l'inverse d'un temps tel que $\tau = \alpha t$ soit sans unité.

Question 2.3 :

$$\underline{\underline{\mathbb{F}}} = \underline{\underline{\mathbb{G}rad}}\ \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial X_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\tau & 0 \\ \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Question 2.4 :

$$\underline{\underline{\mathbb{E}}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\mathbb{F}}}^T\underline{\underline{\mathbb{F}}} - \underline{\underline{\mathbb{1}}}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tenseur étant diagonales, les déformations principales valent $(\tau^2/2, \tau^2/2, 0)$ et les directions principales respectivement $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$.

Question 2.5 : Par démonstration vue en cours

$$\rho_0 = det(\underline{\underline{\mathbb{F}}})\rho \qquad \Leftrightarrow \qquad \rho = \frac{\rho_0}{1+\tau^2}$$

Question 2.6 : Par définition vue en cours, la vitesse lagrangienne vaut

$$\underline{V} = \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial t} = \alpha X_2 \underline{e}_1 - \alpha X_1 \underline{e}_2$$

Question 2.7 : Il suffit d'exprimer les coordonnées initiales (x_1, x_2, x_3) en fonction des coordonnées courantes (X_1, X_2, X_3) et de remplacer dans l'expression de la vitesse lagrangienne.

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 = X_2 - \alpha t X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{x_2 + \tau x_1}{1+\tau^2} \\ X_2 = \dfrac{x_1 - \tau x_2}{1+\tau^2} \\ X_3 = x_3 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \underline{V} = \alpha\frac{x_1 - \tau x_2}{1+\tau^2}\underline{e}_1 - \alpha\frac{x_2 + \tau x_1}{1+\tau^2}\underline{e}_2$$

3 Transformation finie d'un tube épais

Question 3.1 : Le vecteur position est exprimé selon $\underline{e}_R$ et $\underline{e}_Z$ en coordonnées cylindrique.Cependant, il se peut que le déplacement résultant possède uen composante selon $\underline{e}_\Theta$.

$$\underline{U} = \underline{OM} - \underline{OM}_0 = r\underline{e}_R - R\underline{e}_R + z\underline{e}_Z - Z\underline{e}_Z = \alpha t Z^2 \underline{e}_R + \beta t Z \underline{e}_Z$$

Question 3.2 : Un cercle reste un cercle puisque $\underline{U}$ ne dépend pas de R, ni de Θ à Z fixé. On a donc l'aire S par

$$S = \pi\left[(R_1 + \alpha t Z^2)^2 - (R_0 + \alpha t Z^2)^2\right] = \pi\left[{R_1}^2 - {R_0}^2 + 2\alpha t Z^2 (R_1 - R_0)\right]$$

Question 3.3 :

$$\underline{\underline{\mathbb{F}}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\mathbb{G}rad}}\ \underline{U} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial U_R}{\partial R} + 1 & \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\partial U_R}{\partial \Theta} - U_\Theta\right) & \dfrac{\partial U_R}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial U_\Theta}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\partial U_\Theta}{\partial \Theta} + U_R\right) + 1 & \dfrac{\partial U_\Theta}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial U_Z}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial U_Z}{\partial \Theta} & \dfrac{\partial U_Z}{\partial Z} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\alpha t Z \\ 0 & 1 + \dfrac{\alpha t Z^2}{R} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \beta t \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{E}}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{\mathbb{F}}}^T \underline{\underline{\mathbb{F}}} - \underline{\underline{\mathbb{1}}}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\alpha t Z \\ 0 & \left(1 + \dfrac{\alpha t Z^2}{R}\right)^2 - 1 & 0 \\ 2\alpha t Z & 0 & (1+\beta t)^2 + (2\alpha t Z)^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Question 3.4 : On a la relation :

$$dV = det(\underline{\underline{\mathbb{F}}})dV_0$$

$$V = \int_{\Theta=0}^{\Theta=2\pi} \int_{Z=0}^{Z=H} \int_{R=R_0}^{R=R_1} \pi \left(1 + \frac{\alpha t Z^2}{R}\right)(1+\beta t) R dR dZ d\Theta$$

$$V = \pi(1+\beta t)H(R_1 - R_0)\left[(R_1 + R_0) + \frac{2}{3}\alpha t H^2\right]$$