

Correction TD 3 - Théorèmes énergétiques

1 Poutre en cisaillement

Question 1.1 : L'équilibre global et l'application du PFS vont montrer que le problème possède plus d'inconnues que d'équations. On ne peut pas passer par les méthodes usuelles des équations des poutres : il faut utiliser une méthode énergétique. Il n'y a pas de traction dans la poutre et le problème est plan, dans le plan $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$. On peut utiliser l'hypothèse d'Euler-Bernoulli. Il est raisonnable d'intuiter :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{déplacement généralisé :} & \underline{U} = v(x)\underline{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{\Omega} = \omega(x)\underline{e}_z = \frac{dv}{dx}\underline{e}_z \\ \text{déformation généralisée :} & \underline{\varepsilon} = \varepsilon(x)\underline{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{\chi} = \chi(x)\underline{e}_z \\ \text{contrainte généralisée :} & \underline{R} = T(x)\underline{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{M} = M(x)\underline{e}_z \end{array} \right.$$

Pour les équations d'admissibilité cinématique (CA), on a :

- ◇ encastrement en A : $v(0) = 0$ et $\omega(0) = \frac{dv}{dx}(0) = 0$,
- ◇ déplacement en B : $v(L) = U_d$.

Pour les équations d'admissibilité statique (SA), on a uniquement l'équilibre local :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{dx} = 0 \\ \frac{dM}{dx} + T = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T(x) = -\lambda_1 \\ M(x) = \lambda_1 x + \lambda_2 \end{array} \right.$$

où λ_1 et λ_2 vont être des constantes à déterminer.

Question 1.2 : On écrit l'énergie complémentaire :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2}{GS} dx - T(L)U_d,$$

où le second terme est négligeable par l'hypothèse d'Euler-Bernoulli et où le troisième terme représente le travail des actions mécaniques dans les déplacements imposés. En remplaçant,

$$E_c(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(\lambda_1 x + \lambda_2)^2}{EI} dx + \lambda_1 U_d,$$

On minimise cette énergie par rapport aux inconnues du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_c}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \frac{\partial E_c}{\partial \lambda_2} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \frac{L^3}{3} + \lambda_2 \frac{L^2}{2} + EI U_d = 0 \\ \lambda_1 L + 2\lambda_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -12 \frac{EI}{L^3} U_d \\ \lambda_2 = 6 \frac{EI}{L^2} U_d \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(x) = 12 \frac{EI}{L^3} U_d \\ M(x) = -6 \frac{EI}{L^3} U_d (2x - L) \end{array} \right.$$

Question 1.3 : Avec la loi de Hooke et les conditions CA, on remonte à la déformée de la poutre :

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \Rightarrow v(x) = -\frac{6U_d}{L^3} \left(\frac{x^3}{3} - L \frac{x^2}{2} \right)$$

2 Poutre biencastree en flexion

Question 2.1 : L'équilibre global et l'application du PFS vont montrer que le problème possède plus d'inconnues que d'équations. On ne peut pas passer par les méthodes usuelles des équations des poutres : il faut utiliser une méthode énergétique. Il n'y a pas de traction dans la poutre et le problème est plan, dans le plan $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$. On peut utiliser l'hypothèse d'Euler-Bernoulli. La poutre étant droite, on n'est pas obligé de s'intéresser à la déformation généralisée. La présence d'une force ponctuelle oblige à considérer deux tronçons : tronçon 1 pour $x \in [0; A]$ et tronçon 2 pour $x \in [A; B]$.

Il est raisonnable d'intuiter :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{déplacement généralisé pour le tronçon 1 : } \underline{U}_1 = v_1(x)\underline{e}_y & \text{et } \underline{\Omega}_1 = \omega_1(x)\underline{e}_z = \frac{dv_1}{dx}\underline{e}_z \\ \text{déplacement généralisé pour le tronçon 2 : } \underline{U}_2 = v_2(x)\underline{e}_y & \text{et } \underline{\Omega}_2 = \omega_2(x)\underline{e}_z = \frac{dv_2}{dx}\underline{e}_z \\ \text{contrainte généralisée pour le tronçon 1 : } \underline{R}_1 = T_1(x)\underline{e}_y & \text{et } \underline{M}_1 = M_1(x)\underline{e}_z \\ \text{contrainte généralisée pour le tronçon 2 : } \underline{R}_2 = T_2(x)\underline{e}_y & \text{et } \underline{M}_2 = M_2(x)\underline{e}_z \end{array} \right.$$

Pour les équations d'admissibilité cinématique (CA), on a :

- ◇ encastrement en O : $v_1(0) = 0$ et $\omega_1(0) = \frac{dv_1}{dx}(0) = 0$,
- ◇ encastrement en B : $v_2(L) = 0$ et $\omega_2(L) = \frac{dv_2}{dx}(L) = 0$,
- ◇ continuité des déplacement en A : $v_2(a) = v_1(a)$ et $\frac{dv_1}{dx}(a) = \frac{dv_2}{dx}(a)$,

Pour les équations d'admissibilité statique (SA), on a uniquement l'équilibre local :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_1}{dx} = 0 \\ \frac{dM_1}{dx} + T_1 = 0 \\ \frac{dT_2}{dx} = 0 \\ \frac{dM_2}{dx} + T_2 = 0 \\ T_2(a) - T_1(a) + F = 0 \\ M_2(a) - M_1(a) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_1(x) = -\lambda_1 \\ M_1(x) = \lambda_1 x + \lambda_2 \\ T_2(x) = -\lambda_3 \\ M_2(x) = \lambda_3 x + \lambda_4 \\ -\lambda_3 + \lambda_1 + F = 0 \\ (\lambda_3 a + \lambda_4) - (\lambda_1 a + \lambda_2) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_1(x) = -\lambda_1 \\ M_1(x) = \lambda_1 x + \lambda_2 \\ T_2(x) = -\lambda_1 - F \\ M_2(x) = (\lambda_1 + F)x + \lambda_2 - Fa \end{array} \right.$$

où λ_1 et λ_2 vont être des constantes à déterminer.

Question 2.2 : On écrit l'énergie complémentaire : on néglige les énergies dues aux cisaillement (par EB) et il n'y a pas de déplacement imposé donc pas de travail associé à ces déplacements :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{M_1^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_a^{L-a} \frac{M_2^2}{EI} dx.$$

$$E_c(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(\lambda_1 x + \lambda_2)^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_a^L \frac{[(\lambda_1 + F)x + \lambda_2 - Fa]^2}{EI} dx.$$

$$E_c(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2EI} \left(\int_0^a (\lambda_1 x + \lambda_2)^2 dx + \int_a^L [(\lambda_1 + F)x + \lambda_2 - Fa]^2 dx \right).$$

$$E_c(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2EI} \left(\int_0^a \lambda_1^2 x^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 x + \lambda_2^2 dx + \int_a^L (\lambda_1 + F)^2 x^2 + 2(\lambda_1 + F)(\lambda_2 - Fa)x + (\lambda_2 - Fa)^2 dx \right).$$

On minimise cette énergie par rapport aux inconnues du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_c}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \frac{\partial E_c}{\partial \lambda_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 \frac{a^3}{3} + \lambda_2 a^2 + 2(\lambda_1 + F) \left(\frac{L^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) + (\lambda_2 - Fa)(L^2 - a^2) = 0 \\ \lambda_1 a^2 + 2\lambda_2 a + (\lambda_1 + F)(L^2 - a^2) + 2(\lambda_2 - Fa)(L - a) = 0 \end{cases}$$

La résolution donne :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -F \frac{-2a^3 L + 3a^2 L^2 + 2L^4 - 3a^4}{L^2(2L^2 - 3a^2)} \\ \lambda_2 = 2Fa \frac{(L - a)(2a + L)}{2L^2 - 3a^2} \end{cases}$$

Question 2.3 : Avec la loi de Hooke et les conditions CA, on remonte à la déformée de la poutre :

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} = \frac{M_1(x)}{EI} \\ \frac{d^2 v_2(x)}{dx^2} = \frac{M_2(x)}{EI} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_1}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\lambda_1 \frac{x^2}{2} + \lambda_2 x \right) \\ \frac{dv_2}{dx} = \frac{1}{EI} \left((\lambda_1 + F) \frac{(x - L)^2}{2} + (\lambda_2 - Fa)(x - L) \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(x) = \frac{1}{EI} \left(\lambda_1 \frac{x^3}{6} + \lambda_2 \frac{x^2}{2} \right) \\ v_2(x) = \frac{1}{EI} \left((\lambda_1 + F) \frac{(x - L)^3}{6} + (\lambda_2 - Fa) \frac{(x - L)^2}{2} \right) \end{cases}$$

Question 2.4 : Assez fastidieux mais ça marche...