Correction TD 2 - Poutres planes et gauches

1 Fonctionnement d'un winch de bateau

Question 1.1 : Il n'y a que de la traction dans le cable et le problème est plan, dans le plan $(\underline{t},\underline{n})$. Il est raisonnable d'intuiter :

$$\begin{cases} \text{déplacement généralisé :} & \underline{U} = U_t\underline{t} & \text{et} & \underline{\Omega} = \underline{0} \\ \text{déformation généralisée :} & \underline{\varepsilon} = \varepsilon_t\underline{t} & \text{et} & \underline{\chi} = \underline{0} \\ \text{contrainte généralisée :} & \underline{R} = N\underline{t} & \text{et} & \underline{M} = \underline{0} \end{cases}$$

Question 1.2 : Pour $s \in [C, O]$, le cable est en traction pure. L'équilibre local se traduit par $\dfrac{dN}{ds} = 0$. En utilisant la condition limite en C, on trouve $N = F$, et donc $N(O) = F$.

Dans la zone où la corde appuie sur le tambour, on a $s \in [O, B]$. Le rayon du tabour est R est assimilable à un arc de cercle. On peut donc effectuer le changement de variable $s = R\theta$ est l'angle décrivant l'enroulement autour du tambour. De plus, la voile en Cayant tendance à tirer sur la corde, la force de frottement sur le tambour qui la retient est porté par $\underline{t}$. L'équilibre local conduit à :

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{ds} + fp(s) = 0 \\ -\dfrac{N}{R} + p(s) = 0 \end{cases}$$

soit

$$\frac{dN}{ds} + f\frac{N}{R} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dN}{d\theta} + fN = 0$$

Sachant que $N(O) = F$, la résoultion conduit à $N(\theta) = Fe^{-f\theta}$ pour $s \in [O, B]$.

Pour $s \in [B, A]$, le cable est en traction pure. L'équilibre local se traduit par $\dfrac{dN}{ds} = 0$. En utilisant la continuité du tronçon précédent, on trouve $N(B) = Fe^{-f\alpha}$ puisque θ varie de 0 à α sur le tambour. Par conséquent, on a $N(A) = Fe^{-f\alpha}$.

Question 1.3 : Pour résumer lorsque la voile va appliquer un effort F sur le cable en C, l'utilisateur situé en A n'a qu'un effort $Fe^{-f\alpha}$ a efffectuer pour le compenser. Le rapport de démultiplication vaut donc $\dfrac{N_A}{F} = e^{-f\alpha}$. Quand $\alpha \to \infty$, on aura $N_A \to 0$. L'utilisateur a intérêt d'enrouler la corde au maximum pour minimiser ces efforts à fournir.

2 Prédiemensionnement d'un mobile pour bébé

2.1 Chargement plan

Question 2.1.1 : Le problème est plan tous les dépalcements vont se produire dans le plan $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$. On isole la poutre et on fait le bilan des actions mécaniques extérieures :

- ◇ encastrement en A : $\underline{R_A} = X_a\underline{e}_x + Y_A\underline{e}_y$ et $\underline{M_A} = M_A\underline{e}_z$,
- ◇ force en B : $\underline{F} = -F\underline{e}_y$.

On applique le Principe Fondamental de la Statique au point A qui conduit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A - F = 0 \\ \underline{M_A} + \underline{AB} \wedge \underline{F} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{M_A} + (R\underline{e}_x + R\underline{e}_y) \wedge \underline{F} = \underline{0} \end{cases}$$

La résolution donne $X_A = 0$, $Y_A = F$ et $M_A = RF$.

Question 2.1.2 : La forme de la contrainte généralisée sera $\underline{R} = N\underline{t} + T\underline{n}$ et $\underline{M} = M\underline{e}_z$. On écrit les équations conditions limites en effort (ou condition d'admissibilié statique) :

$$\begin{cases} N(B) = 0 \\ T(B) = -F \\ M(B) = 0 \end{cases}$$

On écrit l'équilibre local de la poutre qui conduit aux équations :

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{ds} + \dfrac{T}{R} = 0 \\ \dfrac{dT}{ds} - \dfrac{N}{R} = 0 \\ \dfrac{dM}{ds} + T = 0 \end{cases}$$

En combinant les équations, on trouve $\dfrac{d^2N}{ds^2} + \dfrac{N}{R^2} = 0$. Etant donné la géométrie du problème, on peut appliquer le changement de variable $s = R\theta$ avec R constant. L'équation devient alors $\dfrac{d^2N}{d\theta} + N = 0$. L'utilisation des conditions limites nous donne :

- ⋄ encastrement en A où $\theta = 0$: $N(0) + Y_A = 0$ soit $N(0) = -F$,
- ⋄ force en B où $\theta = \pi/2$: $N(B) = N(\pi/2) = 0$.

Après résolution complète, on obtient :

$$N(\theta) = -F\cos\theta$$

En injectant ce résultat dans les autres équations et en utilisant les autres conditions limites, on trouve tout calcul fait :

$$\begin{cases} N(\theta) = -F\cos\theta \\ T(\theta) = -F\sin\theta \\ M(\theta) = -FR\cos\theta \end{cases}$$

Question 2.1.3 : Avec l'hypothèse Euler-Bernoulli $\underline{\varepsilon} \wedge \underline{t} = \underline{0}$ et la simplification problème plan, la déformation généralisée est de la forme $\underline{\varepsilon} = \varepsilon\underline{t}$ et $\underline{\chi} = \chi\underline{e}_z$. Les propriétés géométrique de la section sont $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ et $I = \dfrac{\pi d^4}{64}$. L'application de la loi de Hooke donne :

$$\begin{cases} N = ES\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = -\dfrac{F}{ES}\cos\theta \\ M = EI\chi \Leftrightarrow \chi = -\dfrac{FR}{EI}\cos\theta \end{cases}$$

Question 2.1.4 : Avec la formule de Bresse pour les rotations, on remonte au déplacement généralisé au point B en $\theta = \pi/2$:

$$\underline{\Omega}(B) = \underline{\Omega}(\pi/2) = \underline{\Omega}(0) + \int_A^B \chi\underline{e}_z ds.$$

Or, il y a un encastrement en A donc $\underline{\Omega}(A) = \underline{0}$. D'où

$$\underline{\Omega}(B) = \int_0^{\pi/2} -\frac{FR}{EI}\cos\theta R d\theta \underline{e}_z.$$

$$\underline{\Omega}(B) = -\frac{FR^2}{EI}\underline{e}_z.$$

Avec la formule de Bresse pour les translations, on remonte au déplacement généralisé au point B en $\theta = \pi/2$:

$$\underline{U}(B) = \underline{U}(\pi/2) = \underline{U}(A) + \underline{\Omega}(A) \wedge \underline{AB} + \int_A^B \underline{\varepsilon} + \underline{\chi} \wedge \underline{GB} ds.$$

Or, il y a un encastrement en A donc $\underline{\Omega}(A) = \underline{0}$ et $\underline{U}(A) = \underline{0}$. D'où

$$\underline{U}(B) = \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{F}{ES} \cos\theta \underline{t} + -\frac{FR}{EI} \cos\theta \underline{e}_z \wedge (\underline{GO} + \underline{OB}) \right] R d\theta$$

On a $\underline{OG} = R\underline{n}$ et $\underline{OB} = R\underline{e}_y$. Dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$, on a $\underline{n} = -\cos\theta \underline{e}_x + \sin\theta \underline{e}_y$ et $\underline{t} = \sin\theta \underline{e}_x + \cos\theta \underline{e}_y$. En injectant et en calculant,

$$\underline{U}(B) = -\frac{FR}{ES} \int_0^{\pi/2} (\cos\theta \sin\theta \underline{e}_x + \cos^2\theta \underline{e}_y) d\theta \ - \frac{FR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \cos\theta (\underline{t} - \underline{e}_x) d\theta$$

$$\underline{U}(B) = -\frac{FR}{ES} \int_0^{\pi/2} (\cos\theta \sin\theta \underline{e}_x + \cos^2\theta \underline{e}_y) d\theta \ - \frac{FR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} (\cos\theta(\sin\theta - 1) \underline{e}_x + \cos^2\theta \underline{e}_y) d\theta$$

$$\underline{U}(B) = -\frac{FR}{ES} \left(\frac{1}{2} \underline{e}_x + \frac{\pi}{4} \underline{e}_y \right) \ - \frac{FR^3}{EI} \left(-\frac{1}{2} \underline{e}_x + \frac{\pi}{4} \underline{e}_y \right)$$

$$\underline{U}(B) = \frac{FR}{2E} \left(-\frac{1}{S} + \frac{R^2}{I} \right) \underline{e}_x \ - \frac{\pi FR}{4E} \left(\frac{1}{S} + \frac{R^2}{I} \right) \underline{e}_y$$

2.2 Chargement hors plan

Question 2.2.1 : On ne peut plus appliquer l'hypothèse problème plan. Il faut considérer toutes les composantes des actions mécaniques. On isole la poutre et on fait le bilan des actions mécanique extérieure :

- ◇ encastrement en A : $\underline{R_A} = X_a \underline{e}_x + Y_A \underline{e}_y + Z_a \underline{e}_z$ et $\underline{M_A} = L_A \underline{e}_x + M_A \underline{e}_y + Q_A \underline{e}_z$,
- ◇ force en B : $\underline{F} = -F \underline{e}_z$.

On applique le Principe Fondamental de la Statique au point A qui conduit à la solution : $X_A = 0$, $Y_A = 0$, $Z_A = F$, $L_A = RF$, $M_A = -FR$ et $Q_A = 0$.

Question 2.2.2 : La forme de la contrainte généralisée sera $\underline{R} = N\underline{t} + T_n \underline{n} + T_z \underline{e}_z$ et $\underline{M} = M_t \underline{t} + M_n \underline{n} + M_z \underline{e}_z$. On écrit les équations conditions limites en effort (ou condition d'admissibilié statique) :

$$\begin{cases} N(B) = 0, \quad T_n(B) = 0 \quad \text{et} \quad T_z(B) = -F \\ M_t(B) = 0, \quad M_n(B) = 0 \quad \text{et} \quad M_z(B) = 0 \end{cases}$$

On écrit l'équilibre local qui conduit aux 6 équations suivantes écrites en variable θ :

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{d\theta} + T_n = 0 \\ \dfrac{dT_n}{d\theta} - N = 0 \\ \dfrac{dT_z}{d\theta} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dM_t}{d\theta} + M_n = 0 \\ \dfrac{dM_n}{d\theta} - M_t - RT_z = 0 \\ \dfrac{dM_z}{d\theta} + RT_n = 0 \end{cases}$$

La résolution complète en utilisant les conditions limites conduit à :

$$\begin{cases} N(\theta) = 0 \\ T_n(\theta) = 0 \\ T_z(\theta) = -F \end{cases} \qquad \begin{cases} M_t(\theta) = RF(1 - \sin\theta) \\ M_n(\theta) = RF\cos\theta \\ M_z(\theta) = 0 \end{cases}$$

Question 2.2.3 : Avec l'hypothèse Euler-Bernoulli $\underline{\varepsilon} \wedge \underline{t} = \underline{0}$, la déformation généralisée est de la forme $\underline{\varepsilon} = \varepsilon \underline{t}$ et $\underline{\chi} = \chi_t \underline{t} + \chi_n \underline{n} + \chi_z \underline{e}_z$. Les propriétés géométrique de la section sont $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ et $I = \dfrac{\pi d^4}{64}$. L'application de la loi de Hooke donne :

$$\begin{cases} N = ES\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = 0 \\ M_t = 2GI\chi_t \Leftrightarrow \chi_t = \dfrac{FR}{2GI}(1 - \sin\theta) \\ M_n = EI\chi_n \Leftrightarrow \chi_n = \dfrac{FR}{EI}\cos\theta \\ M_z = EI\chi_z \Leftrightarrow \chi_z = 0 \end{cases}$$

Question 2.2.4 : Avec les formules de Bresse et la condition d'encastrement en A, on remonte au déplacement généralisé au point B en $\theta = \pi/2$:

$$\underline{\Omega}(B) = \frac{FR^2}{I}\left[\left(-\frac{1}{2E} + \frac{1}{4G}\right)\underline{e}_x + \left(\frac{\pi}{4E} + \frac{4-\pi}{8G}\right)\underline{e}_y\right]$$

$$\underline{U}(B) = -\frac{FR^3}{I}\left(\frac{1}{2E} + \frac{5-\pi}{4G}\right)\underline{e}_z$$