

Correction TD 1 - Poutres droites

1 Prédimensionnement d'une pile de pont

Question 1.1 : On va faire l'hypothèse de problème plan : d'une part les déplacements et les efforts n'ont lieu que dans le plan $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ et d'autre part les rotations et les moments sont autour de $\underline{e}_z$. On isole la pile de pont. On écrit tout d'abord le bilan des actions mécaniques extérieures à la pile :

- ◇ encastrement en O : $\underline{R}_O = X_O \underline{e}_x + Y_O \underline{e}_y$ et $\underline{M}_O = M_O \underline{e}_z$,
- ◇ force en A : $\underline{F} = -F \underline{e}_y$,
- ◇ action de la gravité en G , centre de gravité de la pile : $\underline{P} = -\rho g S H \underline{e}_y$ avec $S = \pi d^2/4$.

On applique le Principe Fondamental de la Statique au point O qui conduit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} X_O = 0 \\ Y_O - F - \rho g S H = 0 \\ M_O = 0 \end{cases}$$

La résolution donne $X_O = 0$, $Y_O = F + \rho g S H$ et $M_O = 0$.

La gravité agit comme une densité linéique de force. On écrit l'équilibre local de la poutre qui conduit aux équations :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dy} - \rho g S = 0 \\ \frac{dT}{dy} = 0 \\ \frac{dM}{dy} + T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(y) = \rho g S y + N(0) \\ T(y) = cte = T(0) \\ M(y) = cte = M(0) \end{cases}$$

On utilise les conditions de saut en O (correspondant à $y = 0$) pour trouver les constantes et on obtient la contrainte généralisée :

$$\begin{cases} N(0) + Y_O = 0 \\ T(0) + X_O = 0 \\ M(0) + M_O = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(y) = \rho g S (y - H) - F \\ T(y) = 0 \\ M(y) = 0 \end{cases}$$

Avec l'hypothèse d'Euler-Bernoulli et la loi de Hooke, on retrouve les équations du déplacement généralisé :

$$\begin{cases} \frac{du_y}{dy} = \frac{1}{ES} N(y) \\ \frac{d\omega}{dy} = \frac{1}{EI} M(y) \\ \frac{du_y}{dy} = \omega \end{cases}$$

En utilisant les conditions limites de l'encastrement en O ($u_y(0) = 0$, $u_x(0) = 0$ et $\omega(0) = 0$), on obtient

le résultat suivant tout calcul fait :

$$\begin{cases} u_y(y) = \frac{1}{ES} y \left[\rho g S \left(\frac{y}{2} - H \right) - F \right] \\ u_x = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$$

Question 1.2 : Le maximum de déplacement est obtenu en $y = H$ et vaut :

$$U_{max} = -\frac{1}{ES} H \left(\rho g S \frac{H}{2} + F \right).$$

2 Prédimensionnement d'un tablier de pont

Question 2.1 : On va faire l'hypothèse de problème plan : d'une part les déplacements et les efforts n'ont lieu que dans le plan $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ et d'autre part les rotations et les moments sont autour de $\underline{e}_z$. On isole le tablier de pont. On écrit tout d'abord le bilan des actions mécaniques extérieures au tablier :

- ◇ articulation en O : $\underline{R}_O = X_O \underline{e}_x + Y_O \underline{e}_y$,
- ◇ appui simple en B : $\underline{R}_B = Y_B \underline{e}_y$,
- ◇ action de la gravité qui est représenté par une densité linéique de force : $\underline{p} = -p \underline{e}_y$.

On applique le Principe Fondamental de la Statique au point O qui conduit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} X_O = 0 \\ Y_O + Y_B - \int p \underline{e}_y dx \cdot \underline{e}_y = 0 \Rightarrow Y_O + Y_B - pL = 0 \\ \left(L \underline{e}_x \wedge Y_B \underline{e}_y - \int_0^L x \underline{e}_x \wedge p \underline{e}_y dx \right) \cdot \underline{e}_z = 0 \Rightarrow LY_B - p \frac{L^2}{2} = 0 \end{cases}$$

La résolution donne $X_O = 0$, $Y_O = p \frac{L}{2}$ et $Y_B = p \frac{L}{2}$.

On écrit l'équilibre local de la poutre qui conduit aux équations :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dx} = 0 \\ \frac{dT}{dx} - p = 0 \\ \frac{dM}{dx} + T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x) = cte = N(0) \\ T(x) = px + T(0) \\ M(x) = -p \frac{x^2}{2} - T(0)x + M(0) \end{cases}$$

On utilise les conditions de saut en O (correspondant à $y = 0$) pour trouver les constantes et on obtient la contrainte généralisée :

$$\begin{cases} N(0) + X_O = 0 \\ T(0) + Y_O = 0 \\ M(0) + M_O = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(x) = 0 \\ T(x) = p(x - \frac{L}{2}) \\ M(x) = -\frac{px}{2}(x - L) \end{cases}$$

Avec l'hypothèse d'Euler-Bernoulli et la loi de Hooke, on retrouve les équations du déplacement généralisé :

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dx} = \frac{1}{ES}N(x) \\ \frac{d\omega}{dx} = \frac{1}{EI}M(x) \\ \frac{du_y}{dx} = \omega \end{cases}$$

En utilisant les conditions limites de l'articulation en O ($u_y(0) = 0$, $u_x(0) = 0$) et de l'appui simple en B ($u_y(L) = 0$), on obtient le résultat suivant tout calcul fait :

$$\begin{cases} u_x(x) = 0 \\ u_y(x) = -\frac{p}{2EI} \left(\frac{x^4}{12} - L\frac{x^3}{6} + L^3\frac{x}{12} \right) \\ \omega(x) = -\frac{p}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - L\frac{x^2}{2} + \frac{L^3}{12} \right) \end{cases}$$

Question 2.2 : Le maximum de déplacement est obtenu en $y = \frac{L}{2}$ et vaut :

$$U_{max} = -\frac{5pL^4}{384EI}.$$