Mécanique des Milieux Continus

Solides

Amphi 8 – Retour sur les poutres

Master M1 Mécanique

Contexte

Restriction aux poutres droites

- Poutre droite à section constante $\underline{OM} = \underline{OG} + \underline{GM} = s\underline{t} + \underline{X} = s\underline{t} + y\underline{e}_y + z\underline{e}_z$

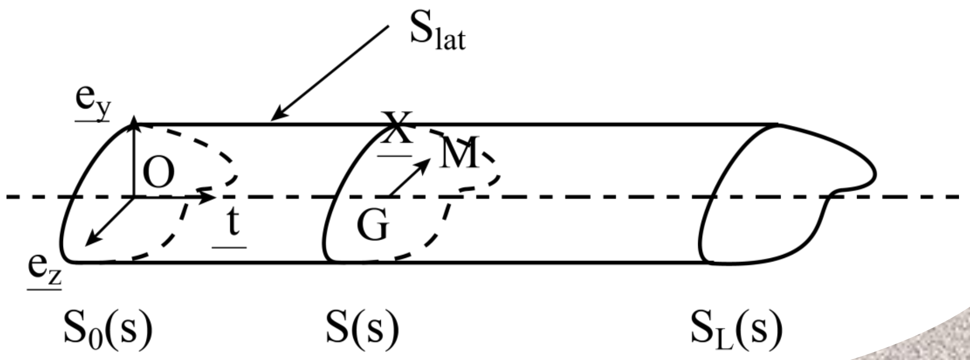
- G est le centre d'inertie de la section $\displaystyle\int_S \underline{X}\,dS = \underline{0}$

- Les axes principaux d'inertie sont $(O, \underline{e}_y)$ et $(O, \underline{e}_z)$

$$I_y = \int_S y^2 dS \qquad I_z = \int_S z^2 dS \qquad I_0 = \int_S y^2 + z^2 dS = I_y + I_z$$

- Le tenseur des contraintes est de la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{tt} & \sigma_{ty} & \sigma_{tz} \\ \sigma_{ty} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{tz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



Calcul de solutions quasi exactes

Problème de Saint-Venant (1)

- Les actions mécaniques appliquées sur la poutre sont des densités surfacique sur les sections extrémités S_0 et S_L, des densités nulles sur S_{lat} et une densité volumique nulle.

- On pose

$$\underline{R}_0 = \int_{S_0} \underline{F}_d \, dS \qquad \underline{H}_0 = \int_{S_0} \underline{t} \wedge \underline{F}_d \, dS$$

$$\underline{R}_L = \int_{S_L} \underline{F}_d \, dS \qquad \underline{H}_L = \int_{S_L} \underline{t} \wedge \underline{F}_d \, dS$$

- On suppose que l'équilibre global de la poutre est vérifié.

⇨ Le problème admet une solution (aux mouvements de corps rigides près).

Problème de Saint-Venant (2)

Le problème est donc de trouver

- Le champ de déplacement (vecteur) $\underline{U}$
- Le champ de contrainte (tenseur) $\underline{\underline{\sigma}}$

Tel que $\underline{\mathrm{Div}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{0}$ $\qquad$ $\underline{\underline{\varepsilon}} = -\dfrac{\nu}{E}\, Tr(\underline{\underline{\sigma}})\, \underline{\underline{1}} + \dfrac{1+\nu}{E}\, \underline{\underline{\sigma}}$

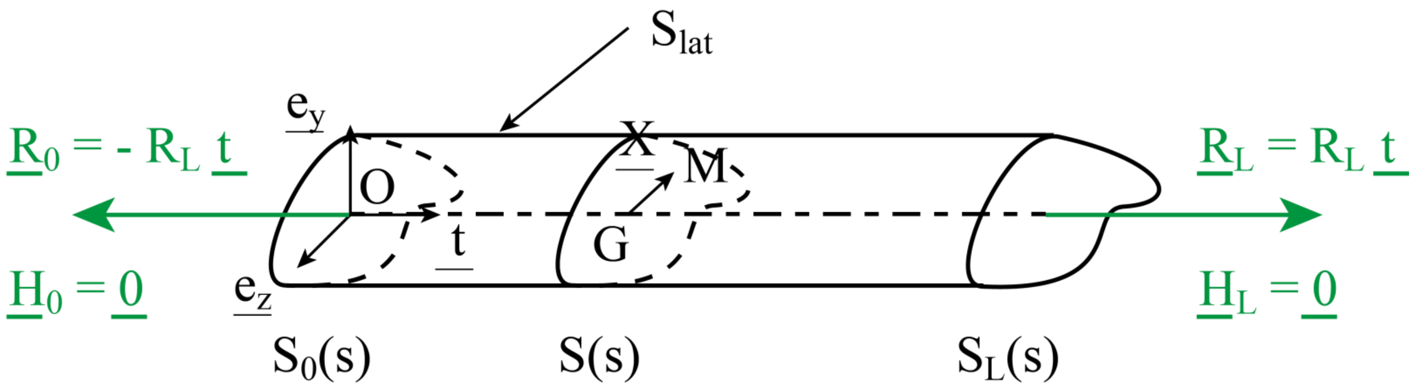
$$\underline{\underline{\sigma}}\, \underline{n} = \underline{0} \quad \text{sur} \quad S_{lat}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \displaystyle\int_{S_0} \underline{\underline{\sigma}}(-\underline{t})\; dS = \underline{R}_0 & \displaystyle\int_{S_0} \underline{t} \wedge \underline{\underline{\sigma}}(-\underline{t})\; dS = \underline{H}_0 \\ \displaystyle\int_{S_L} \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{t}\; dS = \underline{R}_L & \displaystyle\int_{S_L} \underline{t} \wedge \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{t}\; dS = \underline{H}_L \end{array}\right\}$$

Formulation en moyenne (ou faible) des conditions limites

⇨ Une **solution quasi exacte** du problème de Saint Venant vérifie ces équations.

Chargement de traction-compression

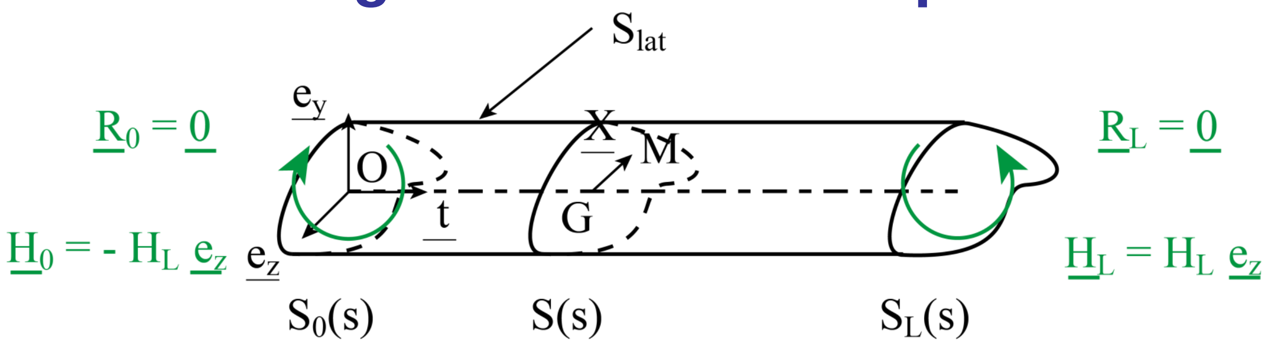


$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{R_L}{S} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{R_L}{ES} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu R_L}{ES} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu R_L}{ES} \end{bmatrix} \qquad \underline{U} = \begin{bmatrix} \frac{R_L}{ES}s \\ -\frac{\nu R_L}{ES}y \\ -\frac{\nu R_L}{ES}z \end{bmatrix}$$

On retrouve la loi de Hooke pour le modèle poutre droite. Le truc c'est qu'on ne s'intéresse finalement qu'à la ligne moyenne en 1D.

$$N = ES\frac{du_t}{ds}$$

Chargement de flexion pure



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -\frac{H_L}{I_z}y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -\frac{H_L}{EI_z}y & 0 & 0 \\ 0 & \nu\frac{H_L}{EI_z}y & 0 \\ 0 & 0 & \nu\frac{H_L}{EI_z}y \end{bmatrix} \quad \underline{U} = \begin{bmatrix} -\frac{H_L}{EI_z}ys \\ \nu\frac{H_L}{2EI_z}(y^2 - z^2) + \frac{H_L}{EI_z}\frac{s^2}{2} \\ \nu\frac{H_L}{2EI_z}yz \end{bmatrix}$$

En posant $u_n = \frac{H_L}{EI_z}\frac{s^2}{2} \qquad \omega_b = \frac{H_L}{EI_z}s$

$$0 = \frac{du_n}{ds} - \omega_b$$

On retrouve la loi de Hooke pour le modèle poutre droite. Le truc c'est qu'on ne s'intéresse finalement qu'à la ligne moyenne en 1D.

$$M_{fb} = EI_b\frac{d\omega_b}{ds}$$

Chargement de torsion

- Ce cas sera étudié en détail au TD 8.

Construction du modèle poutre

Objectif

- Il s’agit d’utiliser les particularités des solutions quasi-exactes pour construire un modèle plus simple que l’élasticité 3D. L’objectif est d’obtenir ce que l’on appelle un modèle monodimensionnel c’est-à-dire un modèle où seul la variable d’espace s intervient.

Déplacement généralisé

- Compte tenu des exemples précédents, nous sommes conduits à rechercher les champs de déplacement sous la forme

$$\underline{U}(M) = \underline{u}(s) + \underline{\Omega}(s) \wedge \underline{X}$$

- Le champ de déplacement tridimensionnel est donc complètement déterminé par la donnée des deux champs de déplacement généralisé

$$\underline{u}(s) \qquad \underline{\Omega}(s)$$

- **Il est à noter que cette hypothèse revient à supposer que la section droite reste rigide.** Le champ $\underline{u}(s)$ représente le déplacement de la ligne moyenne et $\underline{\Omega}(s)$ représente rotation de section droite.

- Compte tenu de ce choix, les liaisons cinématiques que l'on pourra imposer à l'une et/ou l'autre extrémité de la poutre sont le déplacement et/ou la rotation de section.

⇨ On retrouve le résultat de la modélisation 1D pour le déplacement généralisé.

Contrainte généralisée

- Sur les solutions quasi-exactes précédentes, nous avons constaté que dans tous les cas la contrainte est complètement déterminé par la donnée du vecteur contrainte

$$\underline{T} = \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{t}$$

- De plus, compte tenu des dimensions de la section droite, on ne cherchera à déterminer dans un premier temps que l'action mécanique associé au vecteur contrainte dans la section droite

$$\underline{R}(s) = \int_S \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{t}\ dS \qquad \underline{M}(s) = \int_S \underline{X} \wedge \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{t}\ dS$$

⇒ On retrouve le résultat de la modélisation 1D pour la contrainte généralisée.