Mécanique des Milieux Continus

Solides

Amphi 5 – Relation de comportement

Master M1 Mécanique

Relation de comportement

Comportement du solide élastique

Le comportement des solides élastiques est normalement obtenus par une relation entre deux tenseurs:

- Le tenseur des déformation de Green-Lagrange $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$

- Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ qui est relié au tenseur des contraintes de Cauchy par la relation (que je ne vais pas démontrer):

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}} = \det(\underline{\underline{\mathbb{F}}})\, \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-T}\, \underline{\underline{\sigma}}\, \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{T}$$

Le comportement des solides élastiques peut être décrit par une relation entre cet état de déformation et cet état de contrainte par une fonction arbitraire

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}} = \mathcal{G}(\underline{\underline{\mathbb{E}}})$$

Elasticité isotrope

On définit les 3 invariants de $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$

Les invariants sont des **scalaires indépendants** entre eux qui ne dépendent pas de la base d'expression d'un tenseur. C'est une **grandeur objective**.

$$\begin{cases} I_1 = Tr(\underline{\underline{\mathbb{E}}}) \\ I_2 = Tr(\underline{\underline{\mathbb{E}}}^2) \\ I_3 = Tr(\underline{\underline{\mathbb{E}}}^3) \end{cases}$$

Attention, ces définitions ne sont valables que parce que est une matrice 3x3. Effectivement, il n'y a que 3 valeurs propres donc on peut extraire que 3 invariants indépendants.

L'élasticité isotrope nous permet décrire la fonction précédente en 3 sous fonctions qui ne dépendent que des invariants (théorème de Rivlin et Eriksen)

$$\mathcal{G}(\underline{\underline{\mathbb{E}}}) = g_0(I_1, I_2, I_3)\underline{\underline{\mathbb{1}}} + g_1(I_1, I_2, I_3)\underline{\underline{\mathbb{E}}} + g_1(I_1, I_2, I_3)\underline{\underline{\mathbb{E}}}^2$$

Elasticité linéaire isotrope

$$\begin{cases} I_1 = Tr(\underline{\underline{\mathbb{E}}}) \\ \cancel{I_2 = Tr(\underline{\underline{\mathbb{E}}}^2)} \\ \cancel{I_3 = Tr(\underline{\underline{\mathbb{E}}}^3)} \end{cases}$$

$$\mathcal{G}(\underline{\underline{\mathbb{E}}}) = g_0(I_1, \cancel{I_2, I_3})\underline{\underline{\mathbb{1}}} + g_1(I_1, \cancel{I_2, I_3})\underline{\underline{\mathbb{E}}} + g_1(I_1, \cancel{I_2, I_3})\cancel{\underline{\underline{\mathbb{E}}}^2}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{G}$ ne peut etre fonction de que de I_1 et $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$

Hypothèses des petites perturbations

On a dans ce cadre

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}} \simeq \underline{\underline{\sigma}} \qquad\qquad \underline{\underline{\mathbb{E}}} \simeq \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Elasticité linéaire et isotrope - Loi de Hooke

C'est une **relation linéaire entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations**. Elle peut se mettre sous la forme générale:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \, Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{\mathbb{1}}} \; + \; 2\mu \, \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \\ \mu \end{array}\right\}$$ Coefficients de Lamé qui sont des coefficients matériaux

Elle peut être aussi écrite sous la forme

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \; = \; -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \, Tr(\underline{\underline{\sigma}}) \, \underline{\underline{\mathbb{1}}} \; + \; \frac{1}{2\mu} \, \underline{\underline{\sigma}}$$

⇒ Cette écriture est en général la favorite des mécaniciens des milieux continus.

Autre écriture de la loi de Hooke (1)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} Tr(\underline{\underline{\varepsilon}})\, \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \frac{E}{1+\nu}\, \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = -\frac{\nu}{E} Tr(\underline{\underline{\sigma}})\, \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \frac{1+\nu}{E}\, \underline{\underline{\sigma}}$$

E Module d'Young

ν Coefficient de Poisson

Cette écriture est en général la favorite des mécaniciens des matériaux.

Autre écriture de la loi de Hooke (2)

On décompose les tenseurs en partie sphérique (ou isostatique) et déviatorique.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = e\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\varepsilon}}_D \qquad \underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\sigma}}_D$$

La première relation est donc entre le premier invariant des tenseurs, elle définit le **module de compressibilité K**.

$$e = \frac{1}{3}Tr(\underline{\underline{\varepsilon}}) \qquad p = -\frac{1}{3}Tr(\underline{\underline{\sigma}})$$

$$p = -Ke$$

La deuxième relation est entre les tenseurs déviatoriques, elle définit le **module de cisaillement (ou de rigidité) G**.

$$\underline{\underline{\sigma}}_D = G\,\underline{\underline{\varepsilon}}_D$$

Il faut faire attention aux signes dans ces écritures. Les 2 modules sont toujours positifs.

Cette écriture est en général la favorite des physiciens.

Autre écriture de la loi de Hooke (3)

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \varepsilon_{kk}\delta_{ij} \;+\; 2\mu\, \varepsilon_{ij}$$

Symbole de Kronecker pour dire que c'est l'identité

Cette écriture est en général la favorite des numériciens… car ce dernier ne raisonne pas par objet, il cherche la manière la plus simple de coder.

Autre écriture de la loi de Hooke (4)

Une autre manière est de ne même pas préciser qu'il y a des coefficients ni de les détailler

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}\ \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}$ est **l'opérateur de Hooke** , c'est un Tenseur d'ordre 4

Cette forme est utile car elle conserve le coté **linéaire** mais on peut être anisotrope, ce qui est très utile pour les homogénéisations pour les matériaux composites.

Relations entre tous les coefficients

Relations usuelles (pris sur wikipédia, je me suis pas foulé là)

	(λ, G)	(E, G)	(K, λ)	(K, G)	(λ, ν)	(G, ν)	(E, ν)	(K, ν)	(K, E)
$K =$	$\lambda + \frac{2G}{3}$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$			$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$		
$E =$	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$		$\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$	$\frac{9KG}{3K+G}$	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	$2G(1+\nu)$		$3K(1-2\nu)$	
$\lambda =$		$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$		$K - \frac{2G}{3}$		$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{3K\nu}{1+\nu}$	$\frac{3K(3K-E)}{9K-E}$
$G =$			$\frac{3(K-\lambda)}{2}$		$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$		$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$\frac{3KE}{9K-E}$
$\nu =$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$\frac{E}{2G} - 1$	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$					$\frac{3K-E}{6K}$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Cas des fluides newtoniens

Je ne devrais pas en parler mais je ne peux pas m’en empêcher…

Parallèle entre solides et fluides

Solide - description lagrangienne

Déplacement:

$$\underline{U}$$

Tenseur des déformations:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\ \underline{U} \ + \ (\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\ \underline{U})^T\right]$$

Tenseur des contraintes:

$$\underline{\underline{\sigma}}$$

Loi de Hooke:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda\ Tr(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{\mathbb{1}}} \ + \ 2\mu\ \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Fluide - description eulérienne

Vitesse:

$$\underline{V}$$

Tenseur taux de déformations:

$$\underline{\underline{\mathbb{D}}} = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\ \underline{V} \ + \ (\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\ \underline{V})^T\right]$$

Tenseur des contraintes:

$$\underline{\underline{\sigma}}$$

Comportement newtonien:

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbb{1}}} \ + \ \lambda\ Tr(\underline{\underline{\mathbb{D}}})\ \underline{\underline{\mathbb{1}}} \ + \ 2\eta\ \underline{\underline{\mathbb{D}}}$$

Equilibre: $\rho\underline{\Gamma} = \underline{\mathrm{Div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f}_v$

Un fluide est aussi un milieu continu, donc je peux y faire de la MMC.

Théorèmes énergétiques

Rappel: Theorèmes énergétiques pour les poutres (1)

Erreur en relation de comportement

$$\psi(\underline{\varepsilon}, \underline{\chi}, \underline{R}, \underline{M}) = ||\underline{R}(s) - \underline{\underline{\mathbb{K}}}_R \underline{\varepsilon}(s)||_{poutre}{}^2 + ||\underline{M}(s) - \underline{\underline{\mathbb{K}}}_M \underline{\chi}(s)||_{poutre}{}^2$$

Choix du produit scalaire

$$< \underline{R}_1(s)|\underline{R}_2(s) >= \frac{1}{2}\int_{poutre} \underline{R}_1(s)^T \underline{\underline{\mathbb{K}}}_R{}^{-1} \underline{R}_2(s) ds$$

$$< \underline{M}_1(s)|\underline{M}_2(s) >= \frac{1}{2}\int_{poutre} \underline{M}_1(s)^T \underline{\underline{\mathbb{K}}}_M{}^{-1} \underline{M}_2(s) ds$$

Norme

$$||\underline{R}(s)||^2 =< \underline{R}(s)|\underline{R}(s) >= \frac{1}{2}\int_{poutre} \underline{R}(s)^T \underline{\underline{\mathbb{K}}}_R{}^{-1} \underline{R}(s) ds$$

$$||M(s)||^2 =< \underline{M}(s)|\underline{M}(s) >= \frac{1}{2}\int_{poutre} \underline{M}(s)^T \underline{\underline{\mathbb{K}}}_M{}^{-1} \underline{M}(s) ds$$

Finalement, le problème revient à trouver

$$\underset{\substack{\underline{U}, \underline{\Omega} \ \text{CA} \\ \underline{R}, \underline{M} \ \text{SA}}}{\text{Min}} \quad \psi(\underline{U}, \underline{\Omega}, \underline{R}, \underline{M})$$

Théorème de l'énergie complémentaire:

$$\underset{\underline{R}, \underline{M} \ \text{SA}}{\text{Min}} \quad E_c(\underline{R}, \underline{M})$$

Théorème de l'énergie potentielle:

$$\underset{\underline{U}, \underline{\Omega} \ \text{CA}}{\text{Min}} \quad E_p(\underline{U}, \underline{\Omega})$$

Theorèmes énergétiques en élasticité 3D

Erreur en relation de comportement

$$\psi(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}), \underline{\underline{\sigma}}) = ||\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{K}}}}}\ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U})||_{solide}{}^2$$

Choix du produit scalaire

Norme

$$< \underline{\underline{\sigma}}_1 \mid \underline{\underline{\sigma}}_2 >= \frac{1}{2}\int_{solide} Tr(\ \underline{\underline{\sigma}}_1\ \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{K}}}}}^{-1}\ \underline{\underline{\sigma}}_2)\ dV$$

$$||\underline{\underline{\sigma}}||^2 =< \underline{\underline{\sigma}} \mid \underline{\underline{\sigma}} >= \frac{1}{2}\int_{solide} Tr(\ \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbb{K}}}}}^{-1}\ \underline{\underline{\sigma}})\ dV$$

Finalement, le problème revient à trouver

$$\underset{\substack{\underline{U}\ \ \mathrm{CA} \\ \underline{\underline{\sigma}}\ \ \mathrm{SA}}}{\mathrm{Min}} \quad \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}), \underline{\underline{\sigma}})$$

Théorème de l'énergie complémentaire:

$$\underset{\underline{\underline{\sigma}}\ \ \mathrm{SA}}{\mathrm{Min}} \quad E_c(\underline{\underline{\sigma}})$$

Théorème de l'énergie potentielle:

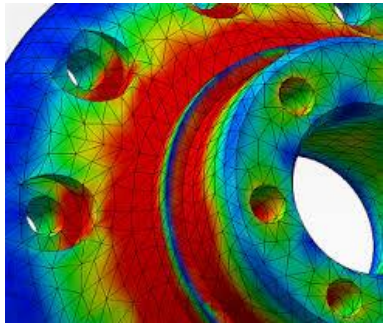
$$\underset{\underline{U}\ \ \mathrm{CA}}{\mathrm{Min}} \quad E_p(\underline{U})$$

Remarques

- Même si l'analogie est évidente, les calculs sont beaucoup plus fastidieux... Il ne faut pas minimiser la chose non plus.

- C'est cette minimisation qui est la base des éléments finis 3D.

- On fait du **calcul de structure**.



Spécialité de Master 2…