Mécanique des Milieux Continus

Solides

Amphi 4 – Equations de Conservation

Master M1 Mécanique

Conservation de la masse

Densité volumique de masse

- La répartition de masse est décrite par la donnée d'une densité de masse définie en tout point M et à tout instant t par la quantité

$$\rho(M,t)$$

- Dans la configuration initiale

$$\rho(M_0,0) = \rho_0(M_0)$$

- On peut défini la masse dans le volume Ω du solide (qui peut dépendre de t)

$$m = \int_{\Omega} \rho(M,t)d\Omega$$

Conservation de la masse

- **Principe:** Toute partie d'un milieu continu que l'on suit dans son mouvement a une masse constante.

- Pour rappel
$$d\Omega = \det(\underline{\underline{\mathbb{F}}})\, d\Omega_0$$

- Conséquence

$$\Rightarrow \quad \rho_0 = \det(\underline{\underline{\mathbb{F}}})\, \rho$$

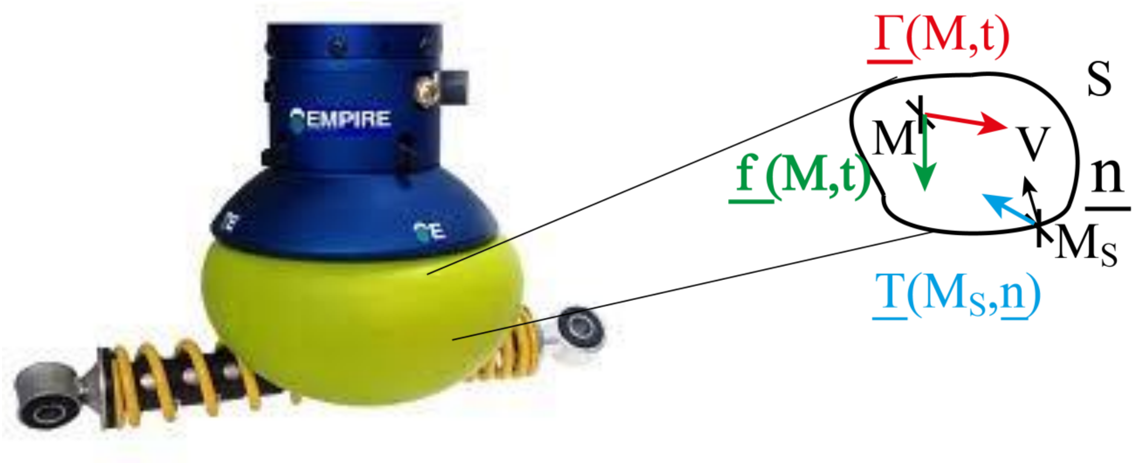
Equation d'équilibre


Rappel: Théorème de la divergence

- Grosso modo, la variation d'une quantité à l'intérieur d'un volume est égale à ce qui est rentré (ou sorti) de cette même quantité sur sa surface….

$$\iiint_V div(\underline{U})\ dV = \oiint_S \underline{U} \cdot \underline{n}\ dS$$

Principe fondamental de la dynamique



- On extrait un bout de matériau de volume V et de surface S. On étudie son équilibre dynamique.

$$\int_V \rho(M,t)\underline{\Gamma}(M,t)dV = \int_V \underline{f}(M,t)dV + \int_S \underline{T}(M_S,\underline{n})dS$$

Equation locale de la dynamique

$$\underline{\mathrm{Div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f} = \rho\underline{\Gamma}$$

Actions de cohésion: la variation des actions de cohésion est liée à ce qui lui est appliqué sur les bords

Densité volumique d'efforts à l'interieur de la matière

Inertie

Equilibre local statique

- Il n'y a d'effet d'inertie

$$\underline{\mathrm{Div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f} = \underline{0}$$

- Dans la plupart des cas (sauf des fois), la densité volumique d'effort (gravité par exemple) est négligée

$$\underline{\mathrm{Div}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{0}$$

Opérateur divergence


En coordonnées cartésiennes

En 1D

$$div\ \underline{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

En 3D, pour un **tenseur symétrique** (je crois qu'il y a une blague mathématique sinon)

$$\underline{\mathrm{Div}}\ \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix}_{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z}$$

En coordonnées cylindriques

En 1D

$$div\ \underline{U} = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

En 3D, pour un **tenseur symétrique** (je crois qu'il y a une blague mathématique sinon)

$$\underline{\mathrm{Div}}\ \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r\theta} + \sigma_{\theta r}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} \end{bmatrix}_{\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z}$$

Puissance des actions mécaniques intérieures

Puissance dans des actions mécaniques intérieures

La puissance des actions mécaniques intérieures provient de la somme des puissances volumique locale.

Pour un **milieu continu fluide**, la vision est **eulérienne** et on travaille sur la **configuration actuelle**:

$$P_i = \int_\Omega \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\mathbb{D}}} \; d\Omega$$

Pour un **milieu continu solide**, la vision est **lagrangienne** et on travaille sur la **configuration initiale**:

$$P_i = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\mathbb{C}}} : \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}} \; d\Omega_0$$

Puissance en N.m.s^{-1} (Watt)

Volume (en m^3)

Tenseur des contraintes (en Pa)

Tenseur taux de déformation (en s^{-1}Pa)

Tenseur de Piola-Kirchoff

Les Puissances sont indépendantes de l'observateur, elle doivent être équivalentes quelle que soit la formulation.

Le tenseur associé à la vision lagrangienne est le tenseur de Piola-Kirchoff. On peut déduire son expression à partir de la puissance.

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}} = \det(\underline{\underline{\mathbb{F}}})\ \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-1}\ \underline{\underline{\sigma}}\ \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-T}$$

Son expression tient compte du changement de courbure locale associé à la transformation et de la variation de volume associé à la transformation.