

Mécanique des Milieux Continus

Solides

Amphi 3 – Contraintes dans les milieux continus

Master M1 Mécanique

RAPPEL

Notion de contrainte

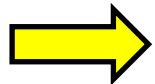
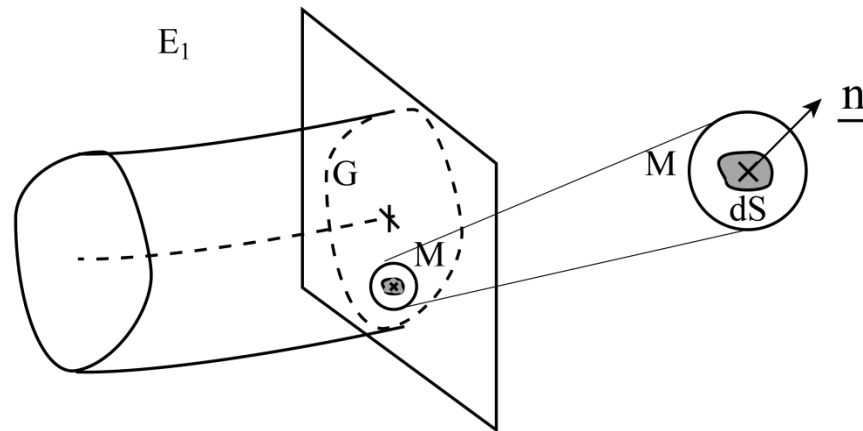
Vecteur contrainte



Notion de contrainte

Nous avons vu précédemment que les actions mécaniques de cohésion sont les efforts qu'un tronçon exerce sur le **tronçon isolé par nos soins** à travers la section droite (S). Nous avons modélisé ces actions mécaniques par une résultante et un moment au point G, centre de la section droite.

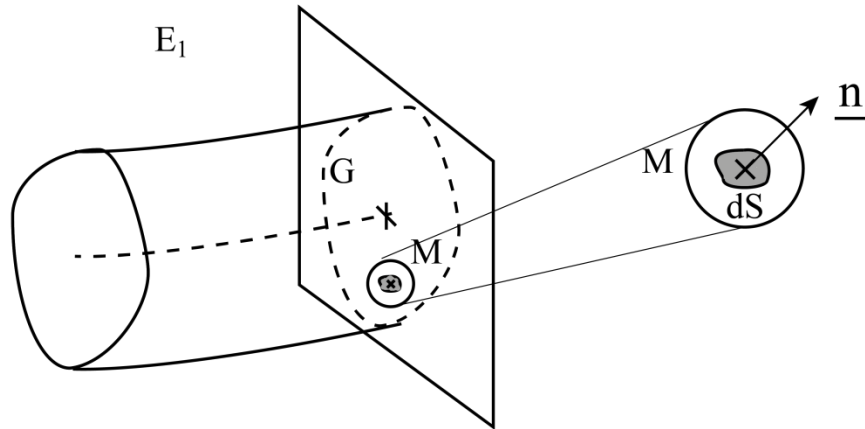
Mais cette résultante et ce moment ne représentent qu'une vision globale sur la section droite de toutes les actions mécaniques qui s'appliquent localement en chaque point de la surface. Ces actions mécaniques locales sont réparties sur toute la surface suivant une loi a priori inconnue.



Hypothèse: En Mécanique des Milieux Continus, les efforts intérieurs exercés sur dS sont une densité surfacique d'efforts ou densité de force par unité de surface.

Vecteur contrainte

Cette densité surfacique d'effort est caractérisée par le vecteur contrainte:



Les actions mécaniques qui s'exercent sur la surface dS sont donc :

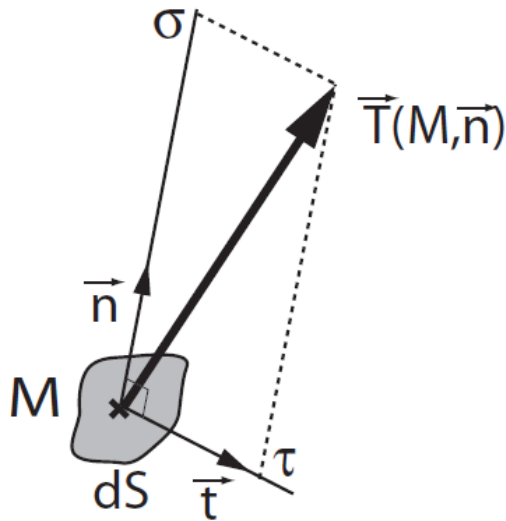
$$\underline{dF}(s) = \underline{T}(M, \underline{n})dS$$

Même si $\underline{n}$ est la normale à l'élément de surface dS , le vecteur contrainte n'est pas forcément normal à ce plan.

L'unité du vecteur contrainte est le rapport d'une force par une unité de surface, il est donc homogène à une pression (Pa ou MPa).

Contrainte normale et tangentielle

A partir du vecteur contrainte, on peut définir ses projections sur le vecteur normal et un vecteur tangentiel de la surface dS respectivement appelées contraintes normale et tangentielle



$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \sigma \underline{n} + \tau \underline{t}$$

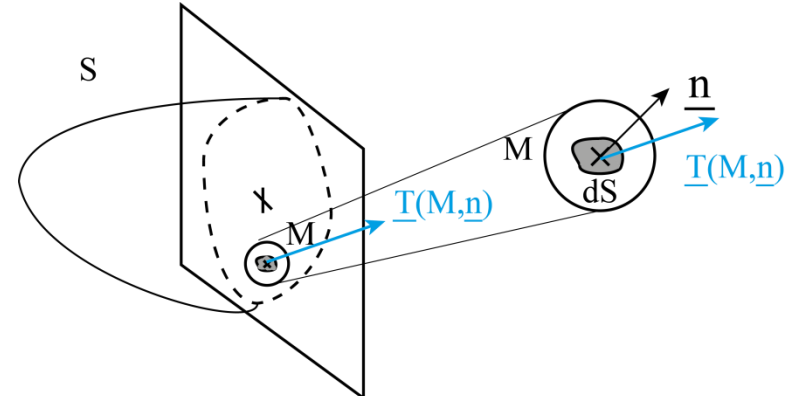
Ces deux composantes du vecteur contrainte ont des sens physiques différents :

- ❑ la contrainte normale σ traduit des actions surfaciques locales de tension au sein de la matière
- ❑ la contrainte tangentielle τ traduit des actions surfaciques locales de cisaillement au sein de la matière

Vecteur contrainte

C'est la même définition que pour les poutres... c'est normal c'est le même vecteur.
Par hypothèse, la matière ne transmet que des **efforts** de type **surfaccique**

$$\underline{dF}(s) = \underline{T}(M, \underline{n}) dS$$



Ce vecteur traduit les actions réciproques $\underline{T}(M, -\underline{n}) = -\underline{T}(M, \underline{n})$

Le vecteur contrainte est un vecteur qui n'est pas forcément colinéaire au plan qui s'applique du coup, c'est une fonction de ce vecteur normal. Quelle peut être la relation entre ces deux vecteur?

$$\underline{T}(M, \underline{n})$$

$$\underline{n}$$

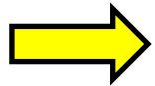
Tenseur des contraintes



Tenseur des contraintes (1)

Le seul moyen de lier ces deux vecteur est d'avoir une application linéaire entre les deux (ou finalement une matrice appelée aussi tenseur)

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}} \underline{n}$$



$\underline{\underline{\sigma}}$

Tenseur des contraintes (aussi appelé tenseur des contraintes de Cauchy)

L'hypothèse de transmission d'effort impose que le **tenseur des contraintes est symétrique** (égalité des moments) et cela même si le problème est un problème dynamique avec des effets d'inertie.

Il y a une exception dans le cas de couplage magnétique qui peut le rendre non-symétrique...

Ce tenseur est fondamentalement eulérien, il tient compte de l'orientation du vecteur contrainte au cours de la déformation.

Tenseur des contraintes (2)

- ❑ Le tenseur des contraintes peut être vu comme une matrice 3x3 symétrique à coefficient réel. Il est donc diagonalisable.
- ❑ Il est défini dans une certaine base donc il faut toujours bien faire attention à cela.
- ❑ Avec tout cela, il possède donc 3 valeurs propres qu'on appelle **contraintes principales**
- ❑ Il possède donc une base de vecteurs propres orthonormés qu'on appelle **directions principales**. Pour rappel, un vecteur propre associé à la valeur propre σ_1 est un vecteur qui respecte

$$\underline{\underline{\sigma}} \underline{u} = \sigma_1 \underline{u}$$

- ❑ Il peut être décomposé sous la forme $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\sigma}}_D$

$$p = -\frac{1}{3}Tr(\underline{\underline{\sigma}})$$

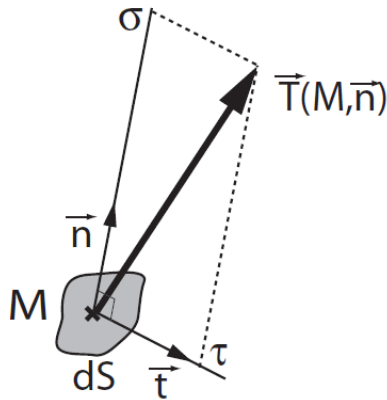
Pression

$$\underline{\underline{\sigma}}_D = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}Tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}}$$

Déviateur des contraintes

Contrainte normale et tangentielle

A partir du vecteur contrainte, on peut définir ses projections sur le vecteur normal et un vecteur tangentiel de la surface dS respectivement appelées contraintes normale et tangentielle



$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \sigma \underline{n} + \tau \underline{t}$$

$$\sigma = \underline{T}(M, \underline{n}) \cdot \underline{n} = (\underline{\underline{\sigma}} \underline{n}) \cdot \underline{n} = (\underline{\underline{\sigma}} \underline{n})^T \underline{n} = \underline{n}^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{n}$$

$$\tau = \underline{T}(M, \underline{n}) \cdot \underline{t} = (\underline{\underline{\sigma}} \underline{n}) \cdot \underline{t} = (\underline{\underline{\sigma}} \underline{n})^T \underline{t} = \underline{n}^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{t}$$

Critères de dimensionnement de structure



Critère de Tresca

- ❑ La plupart des matériaux cèdent ou quittent le domaine élastique lorsque l'état de contrainte passe au-delà d'une certaine valeur appelée limite élastique Re . Cette limite étant un scalaire, il est nécessaire d'avoir une formulation 3D de cette notion construite à partir du tenseur des contraintes. On cherche à définir une fonction f d'écoulement plastique qui dépend du tenseur des contraintes et de Re .

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, Re) < 0 \quad \text{Le matériau est dans son domaine élastique}$$

- ❑ Henri Tresca proposa en 1864 un critère basé sur **les contraintes principales**. Soit f une fonction d'écoulement plastique

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, Re) = \max_{i,j} (|\sigma_i - \sigma_j| - Re)$$

Critère de Von Mises

- ❑ Le critère de Tresca n'est pas le seul critère isotrope permettant de prévoir avec une bonne précision l'apparition de la plasticité, loin s'en faut. D'un usage plus courant dans les simulations numériques de la réponse de structures élastoplastiques, le critère dit de von Mises (d'après Richard von Mises qui le valida en 1913) fait appel à **une fonction quadratique des différences entre les contraintes principales**.

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, Re) = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} - Re$$

- ❑ Le critère de Von Mises fait apparaître une contrainte dite **contrainte équivalente de Von Mises** qui est basé sur **le déviateur des contraintes**. Pour un physicien, c'est tout simplement la « contrainte de cisaillement », parce que ce dernier adore parler de cisaillement...

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, Re) = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{\sigma}}_D : \underline{\underline{\sigma}}_D} - Re$$

