Mécanique des Milieux Continus

Solides

Amphi 2 – Cinématique des milieux continus

Master M1 Mécanique

Cinématique: A quoi ca sert?

Mise en forme des matériaux

- Emboutissage, Estampage
- Laminage
- Forgeage
- Tréfilage

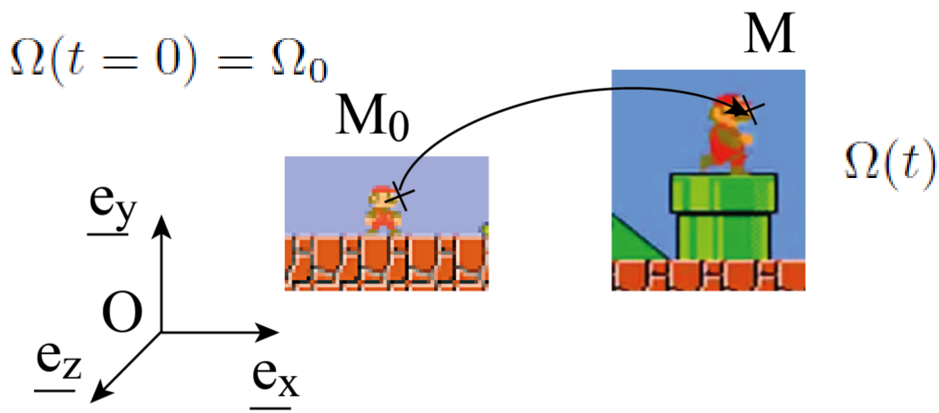
- Même si on va se restreindre au domaine élastique dans ce cours….

Euler VS Lagrange

Notion de référentiel et de mouvement

- Référentiel : ensemble des points de l'espace euclidien animés du mouvement du corps rigide de l'observateur.
- On suppose que l'on peut définir une même chronologie pour tous les observateurs: on parle de référentiel galiléen. Pour définir cette chronologie, il nous faut un instant initial où notre objet est dans une état initial: on parle de **configuration initiale.**
- A chaque référentiel, on associe un repère (une origine + 3 vecteur de base) Attention, deux observateurs peuvent avoir le même repère… c'est la source de confusion…
- On appelle **grandeur intrinsèque** une grandeur qui ne dépend pas de l'observateur: longueur, forme, angle
- Le mouvement et la vitesse cesse d'être intrinsèque puisqu'ils dépendent de l'observateur.
- **Les mouvements** (rotations ou translations) sont intiment liés au référentiel. Exemple: descendre un escalator à l'envers (de l'observateur qui descend ou de l'observateur extérieur).

Description Lagrangienne



- Je suis observateur de Mario: il s'est translaté et aussi changer de forme. La différence entre la configuration actuelle et la configuration de référence sont traduite dans la fonction $\underline{\Phi}$ qui est une **fonction bijective** de l'espace et du temps (c'est la **trajectoire**).

$$\underline{OM}(\underline{OM}_0, t) = \underline{\Phi}(\underline{OM}_0, t)$$

- Il est facile de définir la vitesse

$$\underline{V}(\underline{OM}_0, t) = \frac{\partial}{\partial t}\underline{\Phi}(\underline{OM}_0, t)$$

- Il est facile de définir l'accélération

$$\underline{\Gamma}(\underline{OM}_0, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{\Phi}(\underline{OM}_0, t)$$

➡ **C'est principalement la vision adoptée en MMC Solides.**

Description Eulerienne

- Je suis Mario: Je n'ai des informations relative qu'à la vitesse de déplacement d'un point M dans cet configuration actuelle.

$$\underline{V}(\underline{OM}, t)$$

- J'ai stocké des informations sur ma configuration de référence quelque part si j'en ai besoin.

$$\underline{OM}(t=0) = \underline{OM}_0$$

- Finalement, la connaissance du champ de vitesse me suffit pour déterminer mon état dans la configuration actuelle. Pour retrouver, les trajectoires, je dois intégrer un système différentiel.

$$\frac{d\underline{OM}}{dt} = \underline{V}(M, t) \qquad \underline{OM}(t=0) = \underline{OM}_0$$

C'est principalement la vision adoptée en MMC Fluides.

Mesures des déformations

Une mesure de déformation (1)

- Il s'agit de « mesurer » comment se déforment, au cours du mouvement du milieu continu, les distances (et donc les angles) des points de situés au voisinage d'un point donné. On se place donc d'un point de vue local. Dans un premier temps on s'intéresse à la variation de longueur.

- Posons

$$\underline{OM}(\underline{OM}_0, t) = \underline{\Phi}(\underline{OM}_0, t)$$

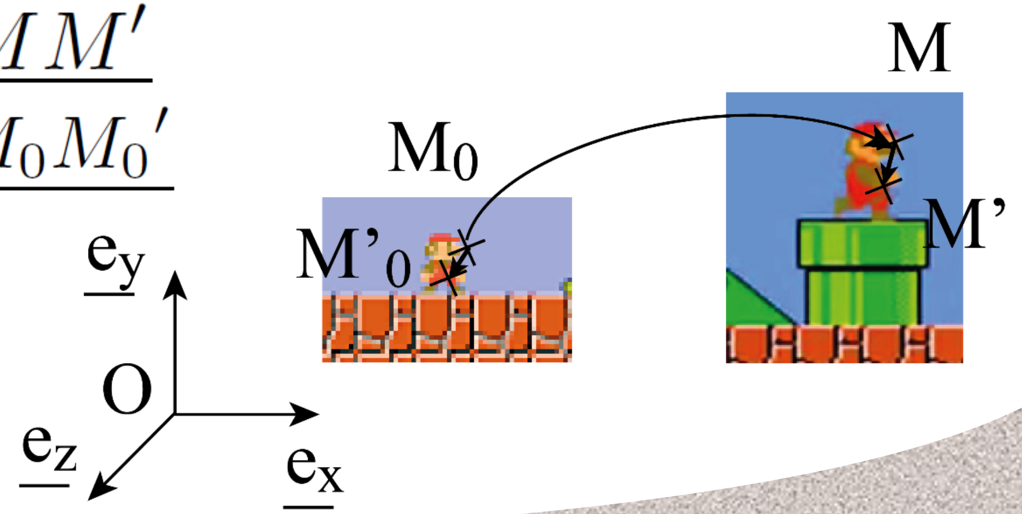
$$\underline{OM'}(\underline{OM'}_0, t) = \underline{\Phi}(\underline{OM'}_0, t)$$

- Dans le cas d'un petit déplacement, on utilise ce formalisme

$$\underline{dM} = \underline{OM'} - \underline{OM} = \underline{MM'}$$

$$\underline{dM_0} = \underline{OM_0'} - \underline{OM_0} = \underline{M_0M_0'}$$

- On cherche la relation entre ces 2 vecteurs.



Une mesure de déformation (2)

- On trouve au premier ordre

$$\underline{dM} = \frac{\partial \underline{\Phi}(\underline{OM}_0, t)}{\partial \underline{OM_0}} \underline{dM_0}$$

- Posons

$$\underline{\underline{\mathbb{F}}}(\underline{OM}_0, t) = \frac{\partial \underline{\Phi}(\underline{OM}_0, t)}{\partial \underline{OM_0}}$$

- On a

$$\underline{\underline{\mathbb{F}}}(\underline{OM}_0, t)$$

Qu'est ce que c'est que ce truc?

$$\underline{\underline{\mathbb{F}}}(\underline{OM}_0, t)$$

En 1D

$$\underline{grad}\ f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}_{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z}$$

En 3D

$$\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\ \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_x}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi_x}{\partial y} & \dfrac{\partial \Phi_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \Phi_y}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi_y}{\partial y} & \dfrac{\partial \Phi_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \Phi_z}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi_z}{\partial y} & \dfrac{\partial \Phi_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z}$$

C'est l'opérateur gradient! Cela fait référence aux variations par rapport à l'espace. Lorsqu'il s'applique à un scalaire, c'est un vecteur. Lorsqu'il s'applique à un vecteur, c'est une matrice.

$$\underline{\underline{\mathbb{F}}} = \underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\ \underline{\Phi}$$

Expression du gradient en coordonnées cylidriques

En 1D

$$\underline{grad}\ f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}_{\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{e}_z}$$

En 3D

$$\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial \Phi_r}{\partial \theta} - \Phi_\theta\right) & \dfrac{\partial \Phi_r}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \Phi_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta} + \Phi_r\right) & \dfrac{\partial \Phi_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \Phi_z}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi_z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial \Phi_z}{\partial z} \end{bmatrix}_{\underline{e}_r,\underline{e}_\theta,\underline{e}_z}$$

Déformation de Green-Lagrange (1)

Mesurons maintenant la variation de longueur MM' en fonction de M_0M_0'

$$MM'^2 = ||\underline{MM'}||^2 = \underline{MM'}\cdot\underline{MM'} = \underline{dM}^T\underline{dM}$$

$$M_0M_0'^2 = ||\underline{M_0M_0'}||^2 = \underline{M_0M_0'}\cdot\underline{M_0M_0'} = \underline{dM_0}^T\underline{dM_0}$$

On arrive à

$$MM'^2 - M_0M_0'^2 = 2\underline{dM_0}^T\frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\mathbb{F}}}^T\underline{\underline{\mathbb{F}}} - \underline{\underline{\mathbb{1}}}\right]\underline{dM_0}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{E}}}(\underline{OM}_0, t) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\mathbb{F}}}^T\underline{\underline{\mathbb{F}}} - \underline{\underline{\mathbb{1}}}\right]$$

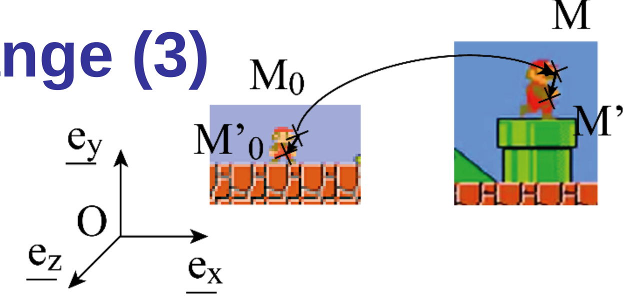
Tenseur des déformations de Green-Lagrange

Déformation de Green-Lagrange (2)

Propriétés de $$\underline{\underline{\mathbb{E}}}(\underline{OM}_0, t) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\mathbb{F}}}^T \underline{\underline{\mathbb{F}}} - \underline{\underline{\mathbb{1}}}\right]$$

- C'est un opérateur symétrique
- Si on a un mouvement de corps rigide, ce tenseur est nul
- Si ce tenseur est nul en tout point de M_0 , on a un comportement global de solide rigide.

Déformation de Green-Lagrange (3)



Introduisons le déplacement comme nouvelle grandeur $\underline{OM} = \underline{OM}_0 + \underline{U}(t, \underline{OM}_0)$

Dérivons par rapport à l'espace, on obtient $\underline{\underline{\mathbb{F}}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{OM_0}} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \underline{U}$

Calculons le tenseur de Green-Lagrange

$$\underline{\underline{\mathbb{E}}}(\underline{OM}_0, t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{OM_0}} + \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{OM_0}}\right)^T + \underbrace{\left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{OM_0}}\right)^T \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{OM_0}}}\right]$$

Ce terme est négligeables dans l'hypothèses des petits déplacements car il est d'ordre 2

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{OM}_0, t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{OM_0}} + \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{OM_0}}\right)^T\right]$$

Tenseur des déformations linéarisées

Tenseur des déformations linéarisées (1)

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{OM}_0, t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{OM_0}} + \left(\frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{OM_0}}\right)^T\right]$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \underline{U} \ + \ (\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \underline{U})^T\right]$$

⇨ **Le Tenseur des déformations linéarisées est la partie symétrique du gradient des déplacements.**

Expression en coordonnées cartésiennes

Expression en coordonnées cylindriques

Tenseur des déformations linéarisées (2)

Que représente la partie antisymétrique du gradient des déplacements?

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \underline{U} \ + \ (\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \underline{U})^T\right]$$

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{U}) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \underline{U} \ - \ (\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \underline{U})^T\right]$$

$$\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \underline{U} = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}) + \underline{\underline{\Omega}}(\underline{U})$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{U})$ **Tenseur des rotations infinitésimales**: représente les distorsions angulaires locales, son inconvénient majeur est qu'il intègre aussi les mouvements de corps rigides

Notations diverses

Notation « objet » $$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \underline{U} + \left(\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \underline{U}\right)^T\right]$$

On utilise la notation indicielle d'Einstein sous différentes formes

- Ecriture du mathématicien: $$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

- Ecriture du physicien: $$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j\right)$$

- Ecriture du mécanicien et du numéricien: $$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

Toutes ces écritures sont équivalentes

Variation de volume élémentaire

$$\Rightarrow \quad d\Omega = \det(\underline{\underline{\mathbb{F}}})\, d\Omega_0$$

Mesures des taux de déformations

Tenseur taux de déformation lagrangien

Jusqu'à présent, nous n'avons pas trop discuté de la variable lié au temps. Pourtant, cette variable devient essentielle lorsqu'on parle de vitesse. Les variations temporelles des déformations vont être définies à travers le tenseur taux de déformation.

On reprend la définition de la vitesse lagrangienne:

$$\underline{OM}(\underline{OM}_0, t) = \underline{\Phi}(\underline{OM}_0, t)$$

$$\underline{V}(\underline{OM}_0, t) = \frac{\partial}{\partial t}\underline{\Phi}(\underline{OM}_0, t)$$

Puisque les variables espace et temps sont indépendantes, on peut simplement calculer et définir:

$$\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \underline{V} = \underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \underline{\Phi} = \frac{\partial}{\partial t}\underline{\underline{\mathbb{F}}} = \underline{\underline{\dot{\mathbb{F}}}}$$

Le taux de déformation lagrangien est un tenseur qui est la dérivée temporelle du tenseur de Green-Lagrange qui se calcule par la relation:

$$\frac{\partial}{\partial t}\underline{\underline{\mathbb{E}}} = \underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}} = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\dot{\mathbb{F}}}}^T\underline{\underline{\mathbb{F}}} + \underline{\underline{\mathbb{F}}}^T\underline{\underline{\dot{\mathbb{F}}}}\right]$$

Tenseur taux de déformation eulérien (1)

En vision eulérienne, les variables de travail étant celle de la configuration actuelle, elle dépendent éventuellement du temps et n'y sont pas indépendantes. Cela oblige à définir un gradient qui est une variation spatiale par rapport aux variable de la configuration actuelle, on le note pour la suite:

$$\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}_e$$

En revenant au calcul du gradient de vitesse lagrangien et à l'égalité entre vitesse eulérienne et lagrangienne

$$\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ V(\underline{OM}_0, t) = \left(\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}_e\ V(\underline{OM}, t)\right)\ \underline{\underline{\mathbb{F}}}$$

$$\underline{\underline{\dot{\mathbb{F}}}} = \left(\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}_e\ V(\underline{OM}, t)\right)\ \underline{\underline{\mathbb{F}}}$$

En injectant dans la relation du taux de déformation lagrangien

$$\underline{\underline{\dot{\mathbb{E}}}} = \underline{\underline{\mathbb{F}}}^T \underbrace{\left[\frac{1}{2}\left(\left(\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}_e\ V\right)^T + \underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}_e\ V\right)\right]}_{\text{Taux de déformation eulérien}} \underline{\underline{\mathbb{F}}}$$

Tenseur taux de déformation eulérien (2)

Tenseur Taux de déformation eulérien

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{D}}} = \frac{1}{2}\left(\left(\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}_e \; V\right)^T + \underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}_e \; V \right)$$

Ce tenseur est l'analogue du tenseur de Green-Lagrange linéarisé sauf qu'il n'a pas été nécessaire de linéariser.

Il est particulièrement utilisé pour les milieux fluides puisque la vision eulérienne est prédominante. Il est aussi symétrique.

Il n'y a pas ici de notion de petits déplacements, ni de petites perturbations

Existence et Unicité du déplacement

Mouvement de corps rigide

- Si on a une forme du type

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z}$$

- Peut on trouver U tel que? $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \underline{U} + (\underline{\underline{\mathbb{G}\mathrm{rad}}}\ \underline{U})^T\right]$

- Montrons que la solution suivante est compatible?

$$\underline{U} = \underline{U}_0 + \underline{\Omega} \wedge \underline{OM}$$

Translation

Rotation

Ces champs solutions sont appelés les **mouvements de corps rigide**.
Il faut bien vérifier dans notre problème où il sont et s'ils ont été mis à 0.
Sinon attention…

Admissibilité Cinématique

- La première étape est de trouver un champ de déplacement compatible avec

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{U}) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\ \underline{U} \ + \ (\underline{\underline{\mathrm{Grad}}}\ \underline{U})^T\right]$$

- La seconde étape est de ne pas se noyer avec les mouvement de corps rigides

- Il faut aussi que le champ de déplacement compatible avec les conditions limites en déplacement: ces sont les équations **cinématiquement admissible (CA)**

⇨ Ce n'est pas parce qu'on trouve une solution de champ de déplacement que c'est la bonne solution de notre problème. Il faut valider l'ensemble de ces conditions. Tout cela fait qu'en fait il n'y a pas beaucoup de problème qu'on peut résoudre analytiquement ou exactement.