

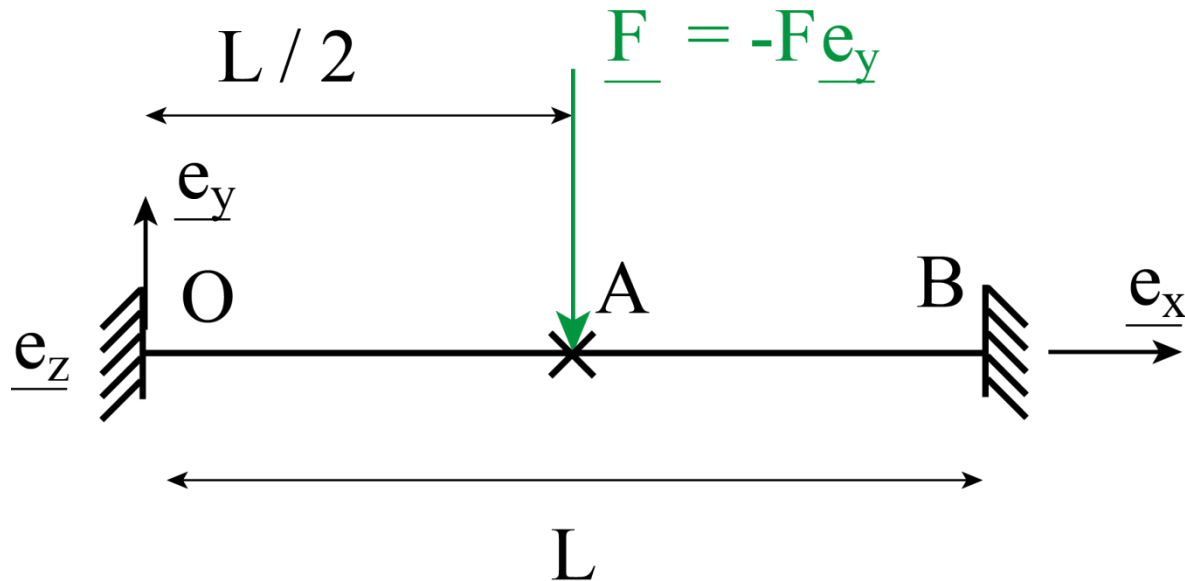
Mécanique des Milieux Continus

Solides

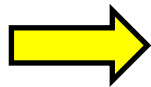
Amphi 1.6 – Modélisation 1D des solides (RdM)

Master M1 Mécanique

Problème à résoudre

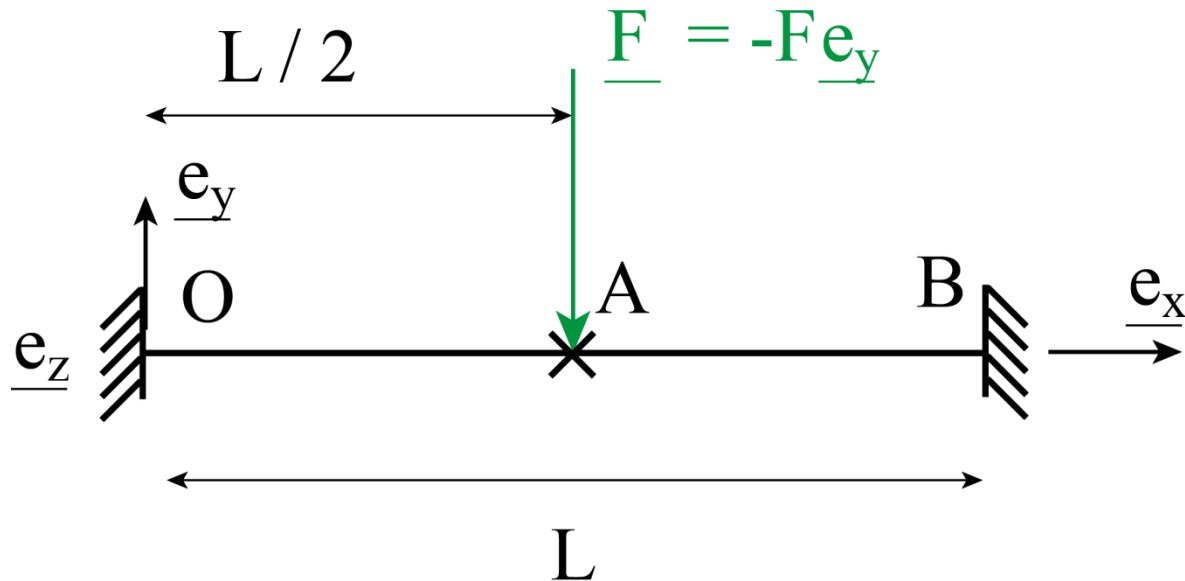


Poutre section circulaire de diamètre d .
Le module d'Young vaut E .

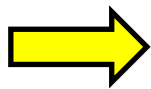


Déterminer la flèche maximale ?

Problème à résoudre



- ❑ On ne peut pas résoudre l'équilibre global puisqu'il y a 2 équations pour 4 inconnues statiques. **On parle de système hyperstatique d'ordre 2.** Il y a a priori une infinité de solutions.
- ❑ Pourtant, si on fait l'expérience, il n'y a qu'une solution...



Besoin d'un nouvel outil...

Que peut on remettre en cause?

☐ L'équilibre local?



Difficile, car on remet en cause le fondement de toute la mécanique générale moderne (hors relativité générale) qui a déjà fait ses preuves dans tous les domaines...

☐ La cinématique?



Difficile, car c'est de la géométrie et on remet en cause les mathématiques et la géométrie euclidienne qui est utilisée depuis la nuit des temps...

☐ La relation de comportement?



C'est le plus facile conceptuellement car ce n'est qu'un modèle. En fait, vouloir écrire une relation locale entre effort et déformation est trop fort (on parle de **formulation forte**) mathématiquement. Il serait préférable d'écrire une relation globale ou moyenne ou intégrée qui serait moins violente mathématiquement (on parle de **formulation faible**).

Théorèmes énergétiques



Rappel: Loi de Hooke

C'est une relation linéaire entre la déformation généralisée et la contrainte généralisée. C'est donc une application linéaire entre deux vecteurs (ou deux champ de vecteurs), on peut alors l'écrire sous forme matricielle. Elle utilise deux paramètres: le module de Young E et le coefficient de Poisson ν . Ecrite dans la base propre, cette matrice est diagonale.

$$\begin{aligned} \underbrace{\left[\underline{R}(s) \right]_{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}}}_{\underline{\mathbb{K}}_R} &= \begin{bmatrix} ES & 0 & 0 \\ 0 & GS & 0 \\ 0 & 0 & GS \end{bmatrix}_{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}} \left[\underline{\varepsilon}(s) \right]_{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}} \\ \underbrace{\left[\underline{M}(s) \right]_{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}}}_{\underline{\mathbb{K}}_M} &= \begin{bmatrix} G(I_n + I_b) & 0 & 0 \\ 0 & EI_n & 0 \\ 0 & 0 & EI_b \end{bmatrix}_{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}} \left[\underline{\chi}(s) \right]_{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}} \end{aligned}$$

C'est une loi donc ça ne se démontre pas. On montrera plus que la restriction de la loi de Hooke 3D correspond à la loi de Hooke 1D.

Erreur en relation de comportement (1)

- ❑ Dire que la relation de comportement n'est pas respectée localement, c'est dire qu'il y a un écart entre l'action mécanique et son estimation par rapport à la relation de comportement.

$$N - ES\varepsilon_t$$

- ❑ Cependant, il faut tenir compte de tous ces écarts pour l'ensemble des quantités généralisés. Ces écarts doivent tous être comptés positivement. Comme ce sont des vecteurs, la notion de distance est plus appropriée donc de norme, voir même du carré de cette norme. De plus, il faut tenir compte de la somme de tous ces écarts positifs sur l'ensemble de la poutre.

$$\psi(\underline{\varepsilon}, \underline{\chi}, \underline{R}, \underline{M}) = ||\underline{R}(s) - \underline{\mathbb{K}}_R \underline{\varepsilon}(s)||_{poutre}^2 + ||\underline{M}(s) - \underline{\mathbb{K}}_M \underline{\chi}(s)||_{poutre}^2$$

- ❑ C'est **l'erreur en relation de comportement**.

Choix du produit scalaire

Avant de définir la norme, on va se donner un produit scalaire. Ce produit scalaire doit être vrai pour l'ensemble des quantités qu'on choisit. Il doit donc donner un résultat avec la même unité pour tout le monde. On choisit

$$< \underline{R}_1(s) | \underline{R}_2(s) > = \frac{1}{2} \int_{poutre} \underline{R}_1(s)^T \underline{\mathbb{K}}_R^{-1} \underline{R}_2(s) ds$$

$$< \underline{M}_1(s) | \underline{M}_2(s) > = \frac{1}{2} \int_{poutre} \underline{M}_1(s)^T \underline{\mathbb{K}}_M^{-1} \underline{M}_2(s) ds$$

Ce choix semble un peu bizarre mais quand on y réfléchit, si on veut respecter l'homogénéité on a pas vraiment le choix. On remarque que les produits scalaires sont homogènes à **une énergie**.

Norme

La norme se définit de manière immédiate lorsqu'on a défini le produit scalaire.

$$||\underline{R}(s)||^2 = \langle \underline{R}(s) | \underline{R}(s) \rangle = \frac{1}{2} \int_{poutre} \underline{R}(s)^T \underline{\mathbb{K}}_R^{-1} \underline{R}(s) ds$$

$$||\underline{M}(s)||^2 = \langle \underline{M}(s) | \underline{M}(s) \rangle = \frac{1}{2} \int_{poutre} \underline{M}(s)^T \underline{\mathbb{K}}_M^{-1} \underline{M}(s) ds$$

Les normes sont homogènes à des **énergies**.

Erreur en relation de comportement (2)

$$\psi(\underline{\varepsilon}, \underline{\chi}, \underline{R}, \underline{M}) = ||\underline{R}(s) - \underline{\mathbb{K}}_R \underline{\varepsilon}(s)||_{poutre}^2 + ||\underline{M}(s) - \underline{\mathbb{K}}_M \underline{\chi}(s)||_{poutre}^2$$

- ❑ Cette expression est homogène à une **énergie** et elle toujours positive.
- ❑ Connaissant le lien entre le déplacement généralisé et la déformation généralisé, le problème peut s'écrire aussi tel que

$$\psi(\underline{\varepsilon}, \underline{\chi}, \underline{R}, \underline{M}) = \psi(\underline{U}, \underline{\Omega}, \underline{R}, \underline{M})$$

- ❑ La relation de comportement locale conduit naturellement à

$$\psi(\underline{U}, \underline{\Omega}, \underline{R}, \underline{M}) = 0$$

... ce qui est le minimum qu'on peut obtenir pour cette fonction d'énergie.

Nouvelle formulation du problème d'élasticité (1)

- ❑ Les contraintes généralisées doivent respecter les conditions limites et l'équilibre, on parle d'**admissibilité statique (SA)**.
- ❑ Les déplacements généralisés doivent respecter les conditions limites, on parle d'**admissibilité cinématiques (CA)**.
- ❑ Maintenant, pour un système hyperstatique qui ne peut satisfaire fortement la relation de comportement locale, on va **minimiser cette énergie tout en respectant les conditions limites**. C'est la **formulation faible**.
- ❑ Finalement, le problème revient à trouver

$$\begin{array}{l} \text{Min} \quad \psi(\underline{U}, \underline{\Omega}, \underline{R}, \underline{M}) \\ \underline{U}, \underline{\Omega} \quad \text{CA} \\ \underline{R}, \underline{M} \quad \text{SA} \end{array}$$

Rappel: Loi de Hooke – Cas général

Cela conduit aux six relations suivantes.

$$N = ES\varepsilon_t$$

$$T_n = GS\varepsilon_n$$

$$T_b = GS\varepsilon_b$$

$$M_t = G(I_n + I_b)\chi_t$$

$$M_{fn} = EI_n\chi_n$$

$$M_{fb} = EI_b\chi_b$$

Découplage (1)

$$\psi(\underline{\varepsilon}, \underline{\chi}, \underline{R}, \underline{M}) = ||\underline{R}(s) - \underline{\mathbb{K}}_R \underline{\varepsilon}(s)||_{poutre}^2 + ||\underline{M}(s) - \underline{\mathbb{K}}_M \underline{\chi}(s)||_{poutre}^2$$

□ Ecrivons l'expression complète dans le cas général des poutres (la poutre est appelée P ici)

$$\begin{aligned} \psi(\underline{\varepsilon}, \underline{\chi}, \underline{R}, \underline{M}) = & \frac{1}{2} \int_P \frac{1}{ES} (N - ES\varepsilon_t)^2 ds + \frac{1}{2} \int_P \frac{1}{G(I_n + I_b)} (M_t - G(I_n + I_b)\chi_t)^2 ds \\ & + \frac{1}{2} \int_P \frac{1}{GS} (T_n - GS\varepsilon_n)^2 ds + \frac{1}{2} \int_P \frac{1}{EI_n} (M_{fn} - EI_n\chi_n)^2 ds \\ & + \frac{1}{2} \int_P \frac{1}{GS} (T_b - GS\varepsilon_b)^2 ds + \frac{1}{2} \int_P \frac{1}{EI_b} (M_{fb} - EI_b\chi_b)^2 ds \end{aligned}$$

Découplage (2) – Cas général

□ On obtient **l'énergie potentielle** (qui ne dépend que de la déformation généralisée)

$$E_p(\underline{\varepsilon}, \underline{\chi}) = \frac{1}{2} \int_P ES \varepsilon_t^2 ds + \frac{1}{2} \int_P GS \varepsilon_n^2 ds + \frac{1}{2} \int_P GS \varepsilon_b^2 ds$$
$$+ \frac{1}{2} \int_P G(I_n + I_b) \chi_t^2 ds + \frac{1}{2} \int_P EI_n \chi_n^2 ds + \frac{1}{2} \int_P EI_b \chi_b^2 ds$$

– [Travail des déplacements dans les actions mécaniques imposées]

□ On obtient **l'énergie complémentaire** (qui ne dépend que de la contrainte généralisée)

$$\frac{1}{2} \int_P \frac{N^2}{ES} ds + \frac{1}{2} \int_P \frac{T_n^2}{GS} ds + \frac{1}{2} \int_P \frac{T_b^2}{GS} ds$$
$$E_c(\underline{R}, \underline{M}) = \frac{1}{2} \int_P \frac{M_t^2}{G(I_n + I_b)} ds + \frac{1}{2} \int_P \frac{M_{fn}^2}{EI_n} ds + \frac{1}{2} \int_P \frac{M_{fb}^2}{EI_b} ds$$

– [Travail des actions mécaniques dans les déplacements imposés]

Découplage (2) - Poutres droites

□ On obtient **l'énergie potentielle** (qui ne dépend que du déplacement généralisé)

$$\begin{aligned} E_p(\underline{U}, \underline{\Omega}) = & \frac{1}{2} \int_P ES \left(\frac{du_t}{ds} \right)^2 ds + \frac{1}{2} \int_P GS \left(\frac{du_n}{ds} - \omega_b \right)^2 ds + \frac{1}{2} \int_P GS \left(\frac{du_b}{ds} + \omega_n \right)^2 ds \\ & + \frac{1}{2} \int_P G(I_n + I_b) \left(\frac{d\omega_t}{ds} \right)^2 ds + \frac{1}{2} \int_P EI_n \left(\frac{d\omega_n}{ds} \right)^2 ds + \frac{1}{2} \int_P EI_b \left(\frac{d\omega_b}{ds} \right)^2 ds \\ & - [\text{Travail des déplacements dans les actions mécaniques imposées}] \end{aligned}$$

□ On obtient **l'énergie complémentaire** (qui ne dépend que de la contrainte généralisée)

$$\begin{aligned} E_c(\underline{R}, \underline{M}) = & \frac{1}{2} \int_P \frac{N^2}{ES} ds + \frac{1}{2} \int_P \frac{T_n^2}{GS} ds + \frac{1}{2} \int_P \frac{T_b^2}{GS} ds \\ & + \frac{1}{2} \int_P \frac{M_t^2}{G(I_n + I_b)} ds + \frac{1}{2} \int_P \frac{M_{fn}^2}{EI_n} ds + \frac{1}{2} \int_P \frac{M_{fb}^2}{EI_b} ds \\ & - [\text{Travail des actions mécaniques dans les déplacements imposés}] \end{aligned}$$

Nouvelle formulation du problème d'élasticité (2)

Le problème peut se formuler de deux manières. On peut se contenter de minimiser une des deux énergies pour trouver un champ. L'autre champ se déduira grâce à la relation de comportement.

Théorème de l'énergie complémentaire:

La solution en contrainte est solution du problème de minimisation

$$\begin{array}{l} \text{Min} \quad E_c(\underline{R}, \underline{M}) \\ \underline{R}, \underline{M} \quad \text{SA} \end{array}$$

Théorème de l'énergie potentielle: La solution est déplacement est solution du problème de minimisation

$$\begin{array}{l} \text{Min} \quad E_p(\underline{U}, \underline{\Omega}) \\ \underline{U}, \underline{\Omega} \quad \text{CA} \end{array}$$

On peut choisir l'une ou l'autre de ces formulations selon nos envies.

Minimiser l'énergie complémentaire

- ☐ On écrit nos équations SA, on trouve une solution générale où il reste des constantes inconnues.
- ☐ On calcule notre énergie complémentaire.
- ☐ On cherche le minimum par rapport aux constantes. On la dérive par rapport aux constantes. Ces dérivées doivent être nulle (minimum). On a alors un système d'équations sur nos constantes.
- ☐ On résout pour trouver la contrainte généralisée.
- ☐ On utilise la relation de comportement pour trouver la déformation généralisée.

Minimiser l'énergie potentielle

Posons

$$\underline{U} = \underline{U}_e + \lambda \underline{U}^*$$
$$\underline{\Omega} = \underline{\Omega}_e + \beta \underline{\Omega}^*$$

Solution exacte $\underline{U}_e$ $\underline{\Omega}_e$

$\underline{U}^*$ et $\underline{\Omega}^*$ sont les champs CA à 0

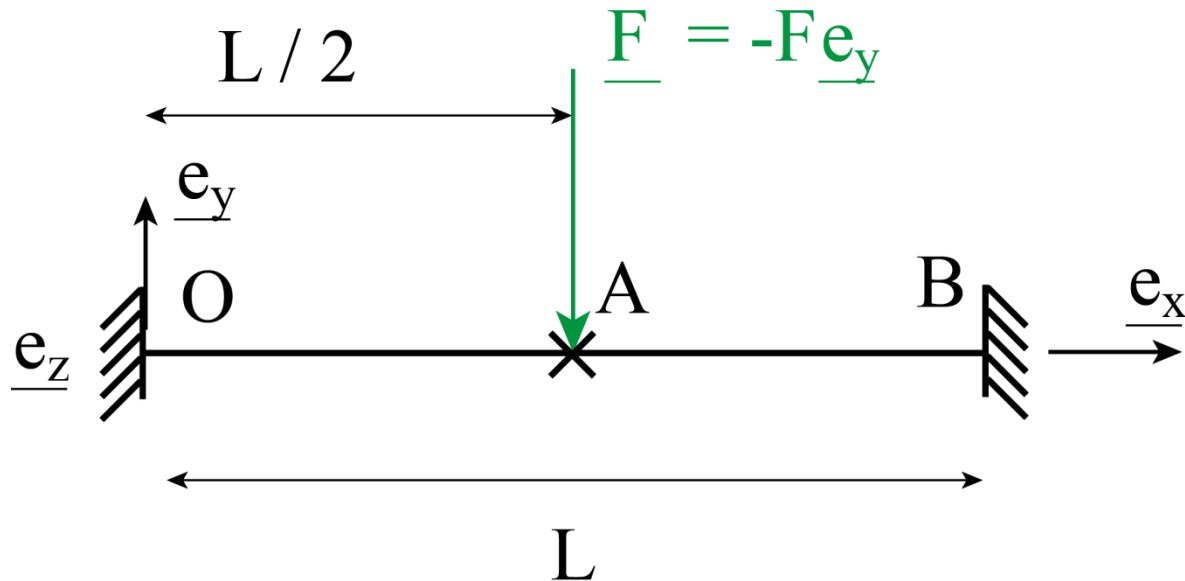
Les conditions de minimisation sont, pour tout $\underline{U}^*$ et pour tout $\underline{\Omega}^*$

$$\left[\frac{dE_p(\underline{U}_e + \lambda \underline{U}^*, \underline{\Omega}_e)}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} = 0 \quad \left[\frac{dE_p(\underline{U}_e, \underline{\Omega}_e + \beta \underline{\Omega}^*)}{d\beta} \right]_{\beta=0} = 0$$

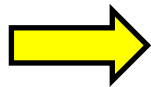
Cette formulation est aussi appelée **formulation variationnelle**.

- ❑ On résout pour trouver le déplacement généralisée.
- ❑ On utilise la relation de comportement pour trouver la contrainte généralisée.

Problème à résoudre



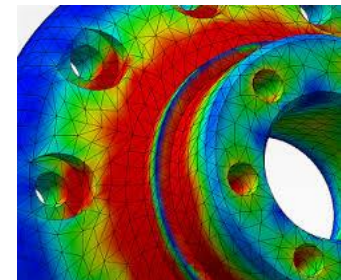
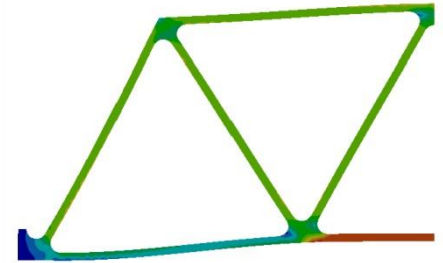
Poutre section circulaire de diamètre d .
Le module d'Young vaut E .



Déterminer l'équation de la déformée?

Base des Elements finis

- ❑ Avec le modèle poutre 1D muni des théorèmes énergétiques, on peut maintenant envisager des structures treillis (ensemble de barres reliées dans l'espace). C'est le début du calcul par éléments finis. **Les éléments finis seront des poutres, donc des éléments 1D. La solution EF sera la solution qui minimise les énergies mentionnées plus haut.** La complexité du modèle EF dépend du modèle de poutre et du modèle de liaison (soit que des poutres qui encaisse de la traction-compression ou alors que de la flexion etc..).
- ❑ Si on met des poutres dans tout l'espace, on commence à faire des treillis 3D, qui commence à ressembler à des structures plus complexes.
- ❑ On peut étendre notre formulation énergétique des problème en élasticité 3D (cela sera évoqué très brièvement) et dans ce cas, on arrive à des éléments finis 3D. On fait du **calcul de structure**.



Spécialité de Master 2...

