

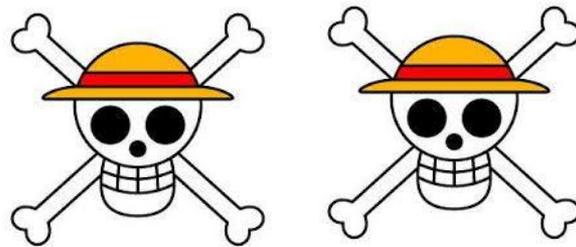
Mécanique des Milieux Continus

Solides

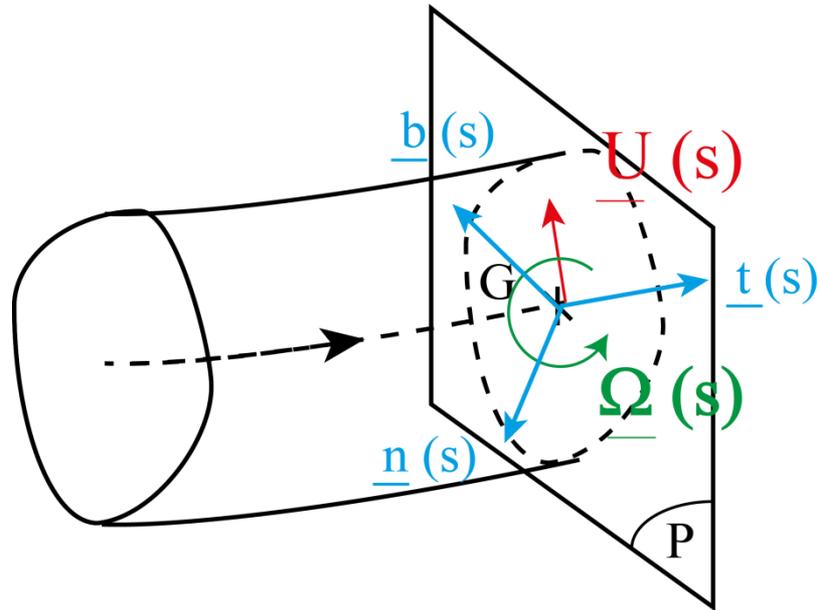
Amphi 1.4 – Modélisation 1D des solides (RdM)

Master M1 Mécanique

Relation de comportement



Rappel: Déplacement généralisé



$$\underline{\Omega}(s) = \omega_t \underline{t} + \omega_n \underline{n} + \omega_b \underline{b}$$

$$\underline{U}(s) = u_t \underline{t} + u_n \underline{n} + u_b \underline{b}$$



Ces deux vecteurs représentent donc **6 inconnues scalaires cinématiques.**

Rappel: Déformation généralisée

$$\underline{\chi}(s) = \frac{d\underline{\Omega}}{ds} \quad \underline{\varepsilon}(s) = \frac{d\underline{U}}{ds} + \underline{t}(s) \wedge \underline{\Omega}(s)$$

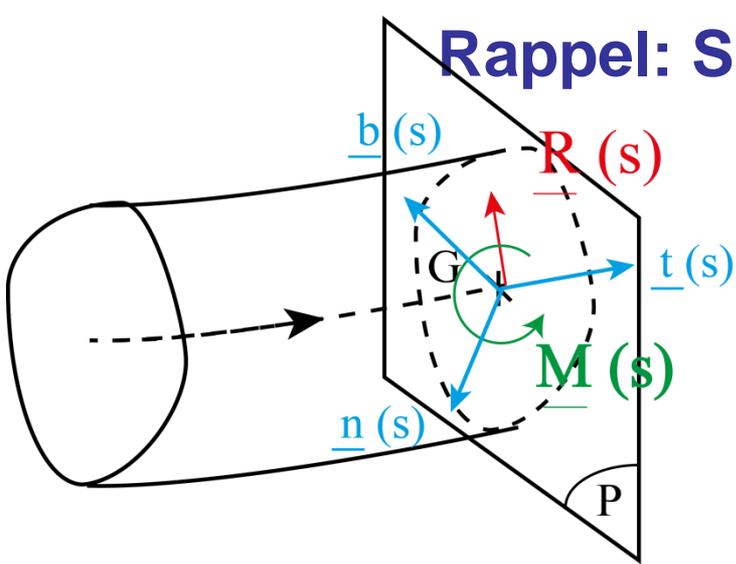
$$\underline{\chi}(s) = \chi_t \underline{t} + \chi_n \underline{n} + \chi_b \underline{b}$$

$$\underline{\varepsilon}(s) = \varepsilon_t \underline{t} + \varepsilon_n \underline{n} + \varepsilon_b \underline{b}$$



Ces deux vecteurs représentent donc **6 inconnues scalaires cinématiques.**

Rappel: Sollicitations élémentaires



Le plan (P) contient la section de la poutre et les vecteurs de bases $\underline{n}(s)$ et $\underline{b}(s)$.

$\underline{n}(s)$ et $\underline{b}(s)$ constitue la base principale d'inertie de la section.

$$\underline{R}(s) = N \underline{t} + T_n \underline{n} + T_b \underline{b}$$

Effort normal
(ou de traction-
compression)

Effort
tranchant

Effort
tranchant

$$\underline{M}(s) = M_t \underline{t} + M_{fn} \underline{n} + M_{fb} \underline{b}$$

Moment de
torsion

Moment de
flexion

Moment de
flexion

➔ Ces deux vecteurs représentent donc **6 inconnues scalaires statiques.**

Géométrie de section (1)

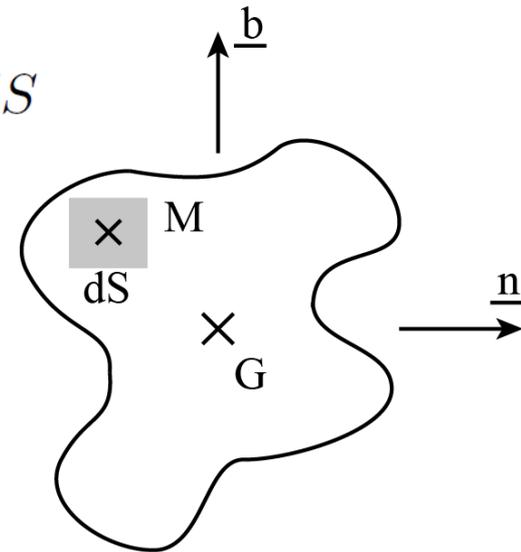
La section possède 4 caractéristiques importantes pour les relations de comportement. G est le centre d'inertie de la section: il est calculé comme le barycentre de la section.

Section $S = \iint_S dS$

Moment quadratique de section par rapport à l'axe (G,n) $I_n = \iint_S (\underline{GM} \wedge \underline{t} \cdot \underline{n})^2 dS$

Moment quadratique de section par rapport à l'axe (G,b) $I_b = \iint_S (\underline{GM} \wedge \underline{t} \cdot \underline{b})^2 dS$

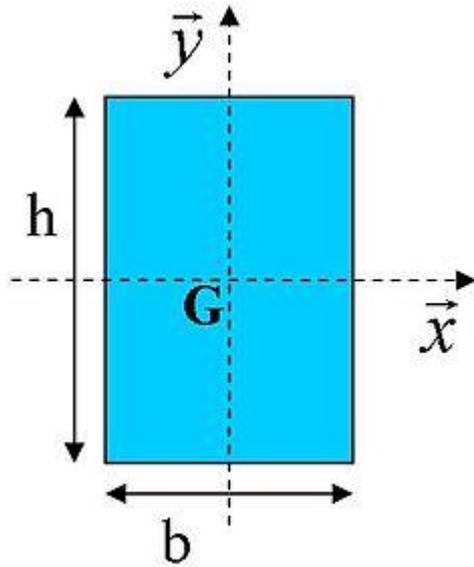
Moment quadratique par rapport à l'axe (G,t) $I_t = I_b + I_n$



On choisit la base principale d'inertie de la section comme base de vecteurs pour exprimer la relation de comportement .

Géométrie de section (2)

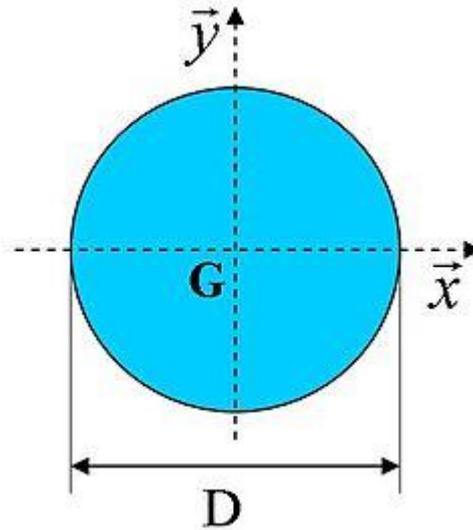
Géométries usuelles (pris sur wikipédia, je me suis pas foulé là)



$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

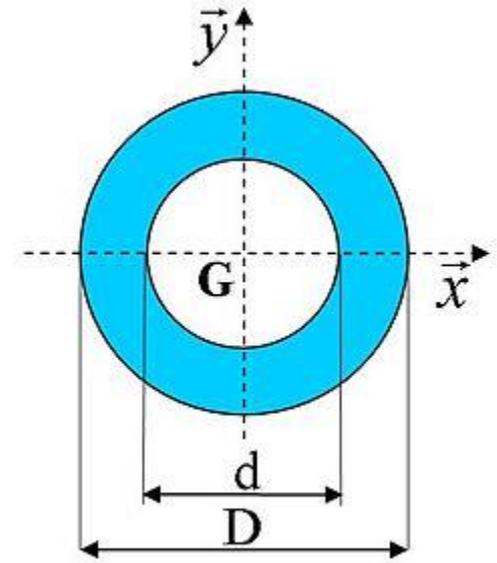
$$I_G = \frac{b \cdot h}{12} \cdot (b^2 + h^2)$$



$$I_x = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

$$I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

$$I_G = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$



$$I_x = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$$

$$I_y = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$$

$$I_G = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}$$

Loi de Hooke – Cas général (1)

C'est une **relation linéaire entre la déformation généralisée et la contrainte généralisée**. C'est donc une application linéaire entre deux vecteurs (ou deux champ de vecteurs), on peut alors l'écrire sous forme matricielle. Elle utilise deux paramètres: le module de Young E et le module de cisaillement G . Ecrite dans la base propre, cette matrice est diagonale.

$$\begin{aligned} \underbrace{\left[\underline{R}(s) \right]}_{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} ES & 0 & 0 \\ 0 & GS & 0 \\ 0 & 0 & GS \end{bmatrix}}_{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}} \left[\underline{\varepsilon}(s) \right]_{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}} \\ \left[\underline{M}(s) \right]_{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} G(I_n + I_b) & 0 & 0 \\ 0 & EI_n & 0 \\ 0 & 0 & EI_b \end{bmatrix}}_{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}} \left[\underline{\chi}(s) \right]_{\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}} \end{aligned}$$

C'est une loi donc ça ne se démontre pas. On montrera plus que la restriction de la loi de Hooke 3D correspond à la loi de Hooke 1D. On remarque qu'elle fait intervenir la géométrie de section

Loi de Hooke – Cas général (2)

Cela conduit aux six relations suivantes.

$$N = ES\varepsilon_t$$

$$T_n = GS\varepsilon_n$$

$$T_b = GS\varepsilon_b$$

$$M_t = G(I_n + I_b)\chi_t$$

$$M_{fn} = EI_n\chi_n$$

$$M_{fb} = EI_b\chi_b$$

C'est une loi donc ça ne se démontre pas. On montrera plus que la restriction de la loi de Hooke 3D correspond à la loi de Hooke 1D.

En fait, ce n'est pas vraiment S qui intervient dans la relation des efforts tranchants mais une autre section appelée section réduite (très proche de S quand même).

Ces 6 relations relient les 6 inconnues statiques aux 6 inconnues cinématiques.

Loi de Hooke – Poutre droites

En utilisant la relation entre la déformation généralisée et le déplacement généralisé, cela conduit aux six relations suivantes.

$$N = ES \frac{du_t}{ds}$$

$$T_n = GS \left(\frac{du_n}{ds} - \omega_b \right)$$

$$T_b = GS \left(\frac{du_b}{ds} + \omega_n \right)$$

$$M_t = G (I_n + I_b) \frac{d\omega_t}{ds}$$

$$M_{fn} = EI_n \frac{d\omega_n}{ds}$$

$$M_{fb} = EI_b \frac{d\omega_b}{ds}$$

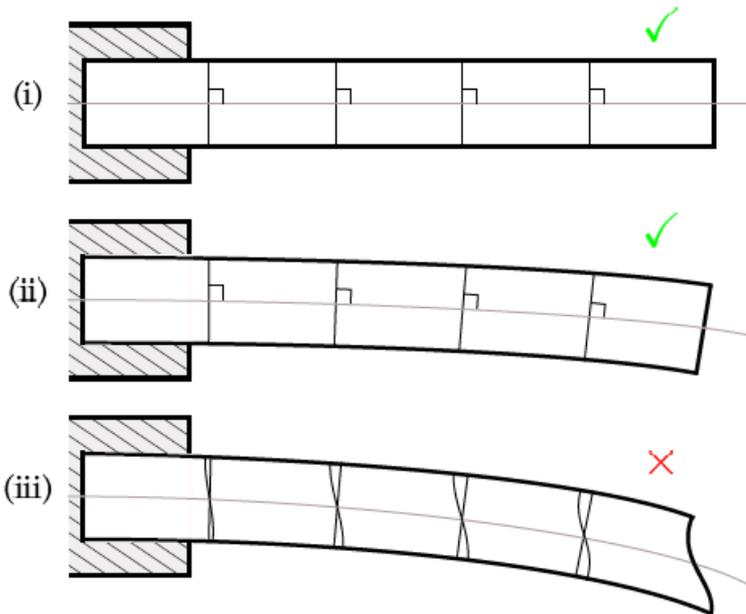
C'est une loi donc ça ne se démontre pas. On montrera plus que la restriction de la loi de Hooke 3D correspond à la loi de Hooke 1D.

En fait, ce n'est pas vraiment S qui intervient dans la relation des efforts tranchants mais une autre section appelée section réduite (très proche de S quand même).

Ces 6 relations relient les 6 inconnues statiques aux 6 inconnues cinématiques.

Hypothèse “Euler ou Navier” - Bernoulli

Enoncé: Les sections planes normales à la fibre moyenne avant transformation restent planes et normales à la fibre moyenne au cours de la transformation



Sections initialement droites

Sections droites perpendiculaires à la fibre moyenne qui restent des plans

Gauchissement des sections

Cette hypothèse est correctement vérifiée par l'expérience dans le cadre des petites perturbations. En revanche, elle n'est plus valable lorsque les déformations liées à l'effort tranchant sont trop importantes. Il faut alors conserver le modèle de Timoshenko

Hypothèse “Euler ou Navier” Bernoulli – Cas général

Cela revient donc à dire $\underline{\varepsilon}(s)$ et \underline{t} sont colinéaires, soit $\underline{\varepsilon}(s) \wedge \underline{t} = \underline{0}$

Ou plutôt

$$\underline{\Omega}(s) = \Omega_t \underline{t} + \underline{t} \wedge \frac{d\underline{U}}{ds}$$

Cela ne signifie pas pour autant que les efforts tranchants sont nuls. Car cette hypothèse revient aussi à dire que la section est infiniment rigide, donc GS infini. Il y a ici une forme indéterminée. Dans ce cas, pour calculer les efforts tranchants, il faut passer les équations d'équilibre.

Finalement, cette relation vectorielle supprime 2 inconnues cinématiques mais aussi 2 relations de la relation de comportement. On passe donc à **4 inconnues cinématiques**.



On fera toujours cette hypothèse pour les TD et les applications.

Hypothèse “Euler ou Navier” Bernoulli – Poutres droites

Cela traduit 2 relations:

$$0 = \frac{du_n}{ds} - \omega_b \qquad 0 = \frac{du_b}{ds} + \omega_n$$

Cela ne signifie pas pour autant que les efforts tranchants sont nuls. Car cette hypothèse revient aussi à dire que la section est infiniment rigide, donc GS infini. Il y a ici une forme indéterminée. Dans ce cas, pour calculer les efforts tranchants, il faut passer les équations d'équilibre.

Finalement, ces 2 relations suppriment 2 inconnues cinématiques mais aussi 2 relations de la relation de comportement. On passe donc à **4 inconnues cinématiques**.



On fera toujours cette hypothèse pour les TD et les applications.

Loi de Hooke avec Euler-Bernoulli – Poutres droites

En utilisant la relation entre la déformation généralisée et le déplacement généralisé, cela conduit aux six relations suivantes.

$$N = ES \frac{du_t}{ds}$$

$$M_t = G (I_n + I_b) \frac{d\omega_t}{ds}$$

$$M_{fn} = -EI_n \frac{d^2 u_b}{ds^2}$$

$$M_{fb} = EI_b \frac{d^2 u_n}{ds^2}$$

Les efforts tranchants sont alors calculés avec l'équation d'équilibre et les angles de rotations restants sont calculés avec l'hypothèse d'Euler-Bernoulli.

