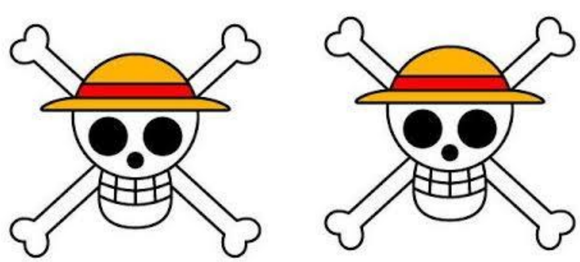
Mécanique des Milieux Continus

Solides

Amphi 1.3 – Modélisation 1D des solides (RdM)

Master M1 Mécanique

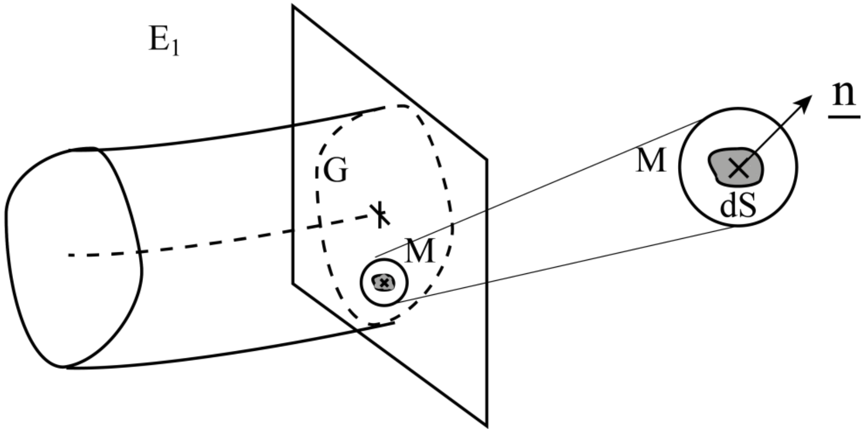
Notion de contrainte
Vecteur contrainte



Notion de contrainte

Nous avons vu précédemment que les actions mécaniques de cohésion sont les efforts qu'un tronçon exerce sur le **tronçon isolé par nos soins** à travers la section droite (S). Nous avons modélisé ces actions mécaniques par une résultante et un moment au point G, centre de la section droite.

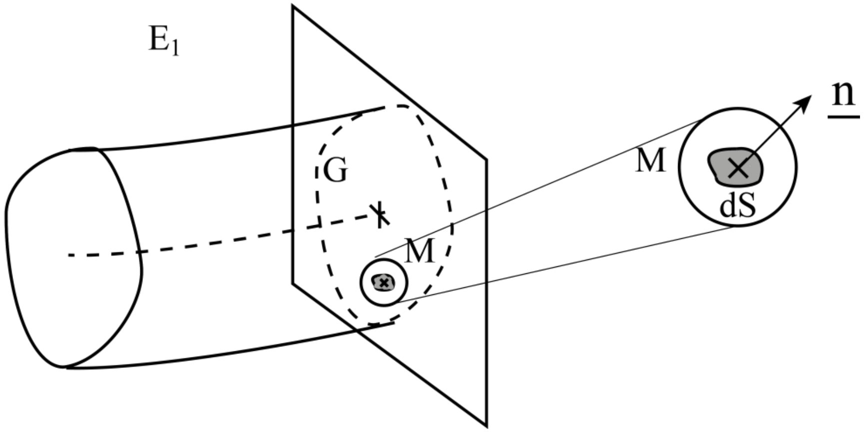
Mais cette résultante et ce moment ne représentent qu'une vision globale sur la section droite de toutes les actions mécaniques qui s'appliquent localement en chaque point de la surface. Ces actions mécaniques locales sont réparties sur toute la surface suivant une loi a priori inconnue.



Hypothèse: En Mécanique des Milieux Continus, les efforts intérieurs exercés sur dS sont une densité surfacique d'efforts ou densité de force par unité de surface.

Vecteur contrainte

Cette densité surfacique d'effort est caractérisée par le **vecteur contrainte**:



Les actions mécaniques qui s'exercent sur la surface dS sont donc :

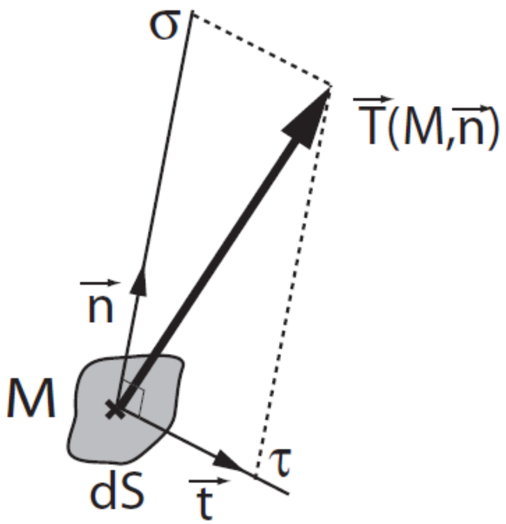
$$\underline{dF}(s) = \underline{T}(M, \underline{n})dS$$

Même si n est la normale à l'élément de surface dS, le vecteur contrainte n'est pas forcément normal à ce plan.

L'unité du vecteur contrainte est le rapport d'une force par une unité de surface, il est donc homogène à une pression (Pa ou MPa).

Contrainte normale et tangentielle

A partir du vecteur contrainte, on peut définir ses projections sur le vecteur normal et un vecteur tangentiel de la surface dS respectivement appelées contraintes normale et tangentielle

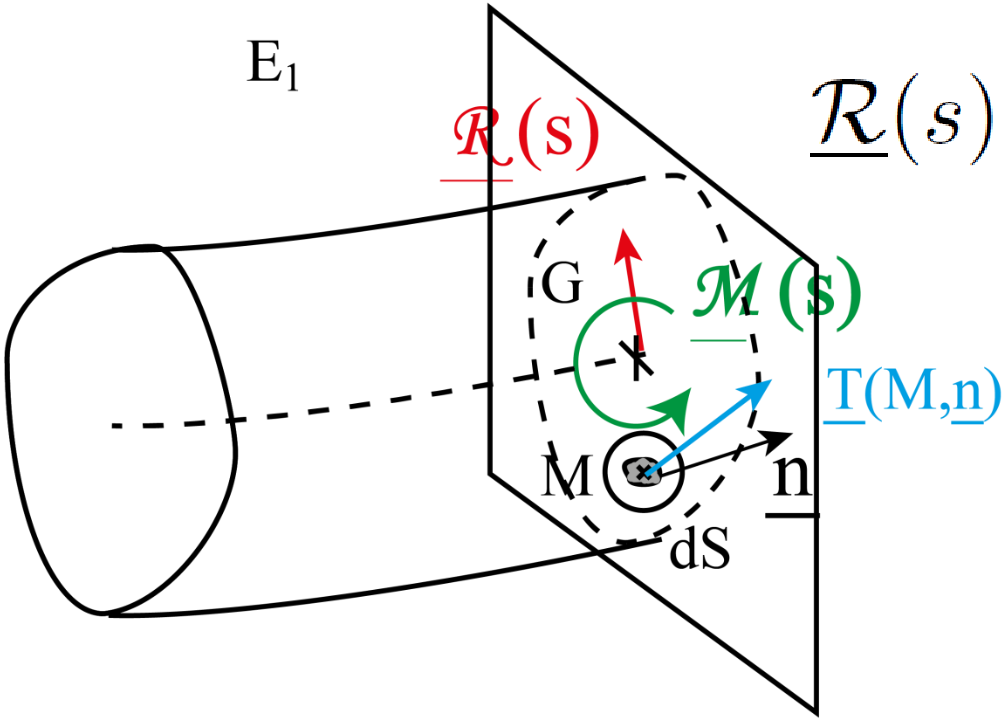


$$\underline{T}(M,\underline{n}) = \sigma\,\underline{n} + \tau\,\underline{t}$$

Ces deux composantes du vecteur contrainte ont des sens physiques différents :

- ❑ la contrainte normale σ traduit des actions surfaciques locales de tension au sein de la matière
- ❑ la contrainte tangentielle τ traduit des actions surfaciques locales de cisaillement au sein de la matière

Relation entre vecteur contrainte et actions de cohésion

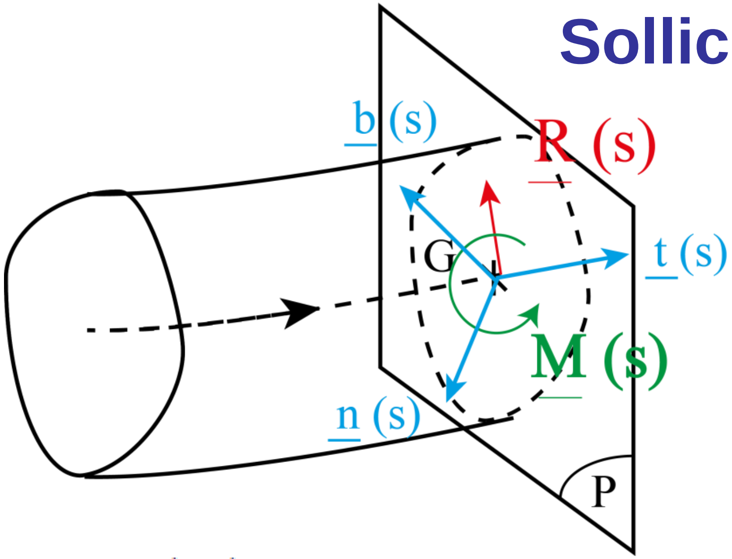


$$\underline{\mathcal{R}}(s) = \iint_S \underline{T}(M, \underline{n})\, dS$$

$$\underline{\mathcal{M}}(s) = \iint_S \underline{GM} \wedge \underline{T}(M, \underline{n})\, dS$$

Le champ de vecteurs {R(s),M(s)} est aussi appelée **la contrainte généralisée** (bien que ce ne soit pas homogène à une contrainte…).

Sollicitations élémentaires



Le plan (P) contient la section de la poutre et les vecteurs de bases n(s) et b(s).
n(s) et b(s) contituent la base principale d'inertie de la section.

$$\underline{R}(s) = N\underline{t} + T_n\underline{n} + T_b\underline{b}$$

Effort normal (ou de traction-compression) — Effort tranchant — Effort tranchant

$$\underline{M}(s) = M_t\underline{t} + M_{fn}\underline{n} + M_{fb}\underline{b}$$

Moment de torsion — Moment de flexion — Moment de flexion

Ces deux vecteurs représentent donc **6 inconnues scalaires statiques.**

Sollicitations élémentaires – Problème plan

$$\underline{R}(s) = N\underline{t} + T_n\underline{n}$$

Effort normal (ou de traction-compression)

Effort tranchant

$$\underline{M}(s) = M_{fb}\underline{b}$$

Moment de flexion

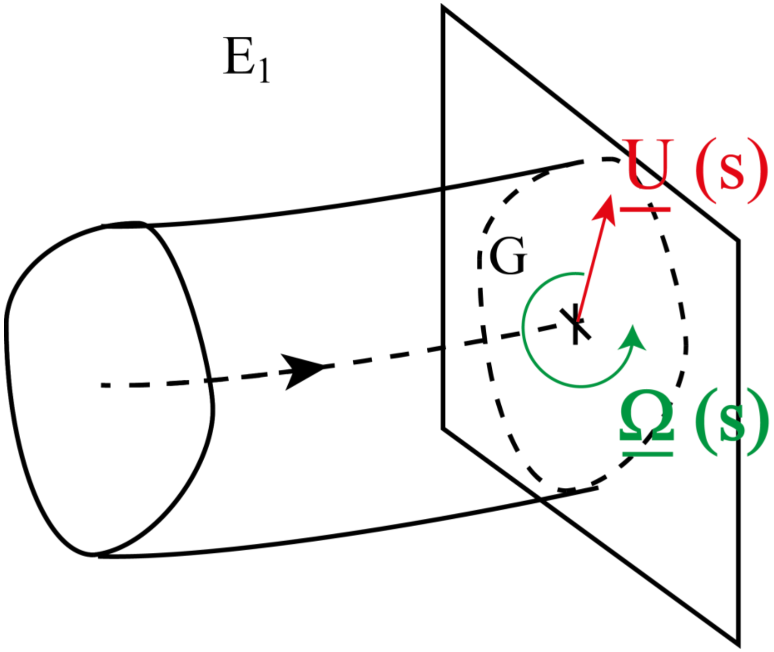
Ces deux vecteurs représentent donc **3 inconnues scalaires statiques.**

Notion de déformation

Déplacement généralisé (1)

Lorsque des actions mécaniques sont transmises, elles génèrent des déplacements de la matière. Il est important de connaitre ce champ de déplacement qui va être lui aussi vectoriel. **Il est important de remarquer que le modèle poutre suppose que les plans orthogonaux restent des plans (même si leur orientation à changée): le gauchissement éventuel des sections ne peut être prédit dans ce modèle poutre.**



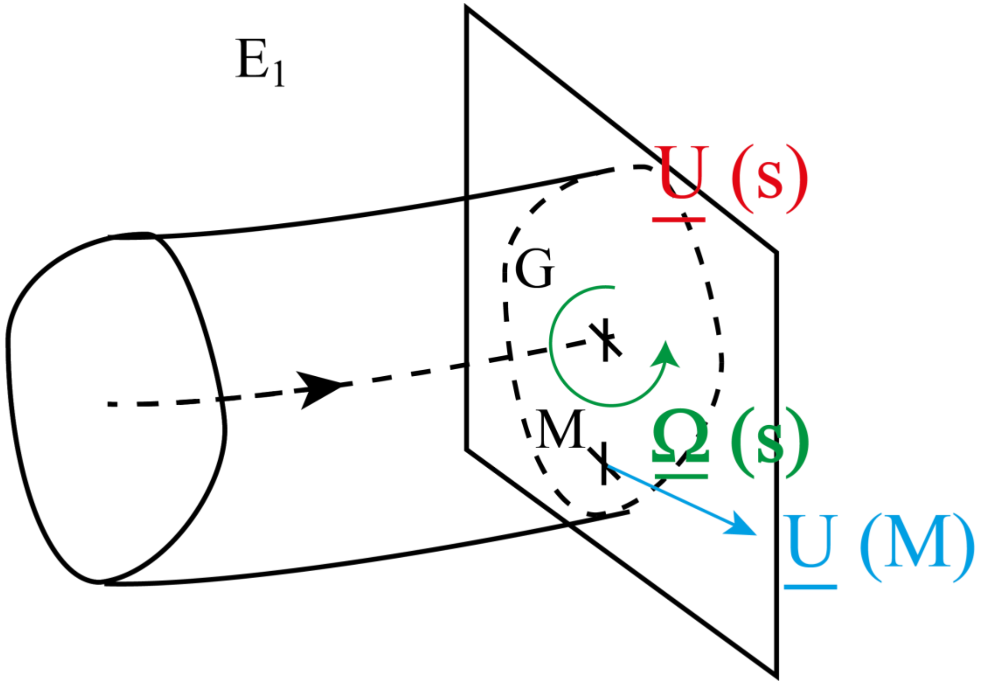
$\underline{U}(s)$ Vecteur représentant la translation de la section au point de la fibre neutre

$\underline{\Omega}(s)$ Vecteur représentant la rotation de la section au point de la fibre neutre

⇨ Le fait que ces deux vecteurs existent et soient a priori indépendants l'un de l'autre est le **modèle de Timoshenko**. Ils représentent donc **6 inconnues scalaires cinématiques.**

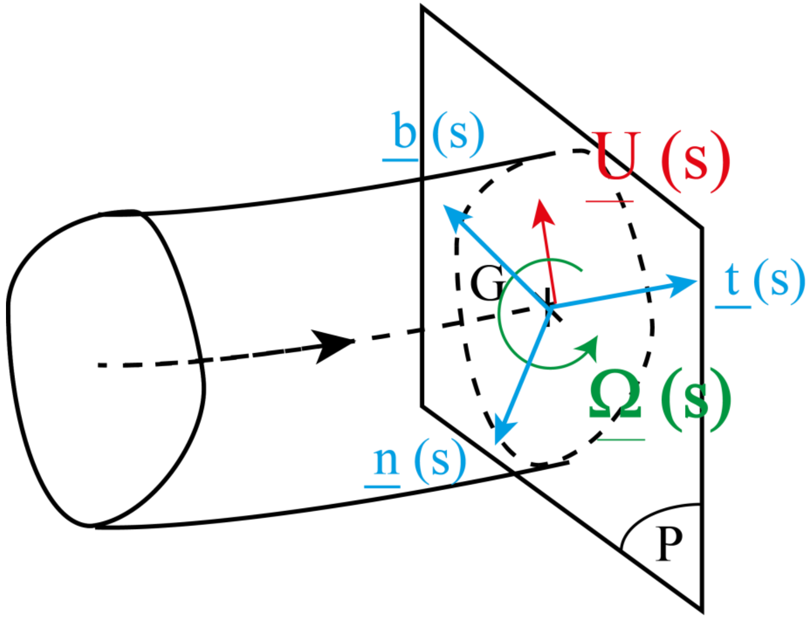
Déplacement généralisé (2)

Il est alors possible de décrire le déplacement dans n'importe quel point de la section de poutre et donc de la poutre



$$\underline{U}(M) = \underline{U}(s) + \underline{\Omega}(s) \wedge \underline{GM}$$

Déplacement généralisé (3)



$$\underline{\Omega}(s) = \omega_t \underline{t} + \omega_n \underline{n} + \omega_b \underline{b}$$

$$\underline{U}(s) = u_t \underline{t} + u_n \underline{n} + u_b \underline{b}$$

Ces deux vecteurs représentent donc **6 inconnues scalaires cinématiques.**

Déplacement généralisé – Problème plan

$$\underline{\Omega}(s) = \omega_b \underline{b}$$

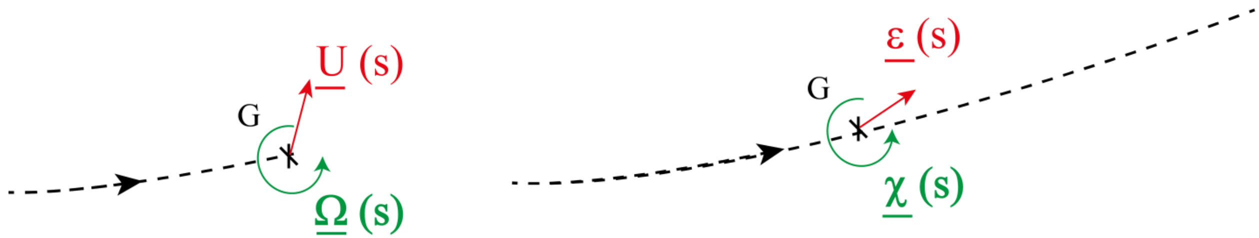
$$\underline{U}(s) = u_t \underline{t} + u_n \underline{n}$$

Ces deux vecteurs représentent donc **3 inconnues scalaires cinématiques.**

Notion de déformation

Déformation généralisée (1)

Comme pour le déplacement, la déformation peut être représentée à partir d'un champ vectoriel. Ce champ se calcule aisément à partir du champ de déplacement généralisé, selon les relations:



$\underline{\chi}(s)$ Vecteur représentant la variation de rotation de section de poutre.

$\underline{\varepsilon}(s)$ Vecteur représentant la déformation.

$$\underline{\chi}(s) = \frac{d\underline{\Omega}}{ds} \qquad \underline{\varepsilon}(s) = \frac{d\underline{U}}{ds} + \underline{t}(s) \wedge \underline{\Omega}(s)$$

Je ne suis pas capable de démontrer de manière convaincante et efficace ces formules par contre je peux vous les faire ressentir par des petits croquis. La seule démonstration que je connaisse fait intervenir la modélisation 3D (et je trouve cela pas pertinent ici).

Déformation généralisée (2)

$$\chi(s) = \chi_t \underline{t} + \chi_n \underline{n} + \chi_b \underline{b}$$

$$\underline{\varepsilon}(s) = \varepsilon_t \underline{t} + \varepsilon_n \underline{n} + \varepsilon_b \underline{b}$$

Ces deux vecteurs représentent donc **6 inconnues scalaires cinématiques.**

Déformation généralisée (2) – Problème plan

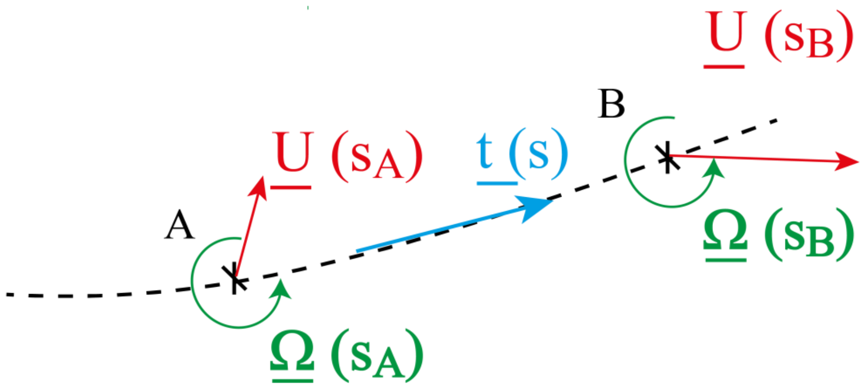
$$\chi(s) = \chi_b \underline{b}$$

$$\underline{\varepsilon}(s) = \varepsilon_t \underline{t} + \varepsilon_n \underline{n}$$

⇒ Ces deux vecteurs représentent donc **3 inconnues scalaires cinématiques.**

Déformation généralisée (3)

Connaissant le champ de déformation il est possible de remonter au champ de déplacement. Ce sont les **formules de Bresse**.



$$\underline{\Omega}(s_B) = \int_{s_A}^{s_B} \underline{\chi}(s)ds + \underline{\Omega}(s_A)$$

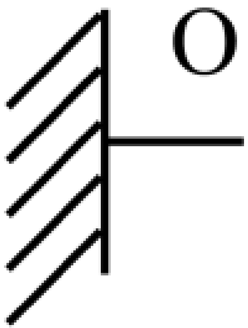
$$\underline{U}(s_B) - \underline{U}(s_A) = \underline{\Omega}(s_A) \wedge \underline{AB} + \int_{s_A}^{s_B} \underline{\varepsilon}(s) + \underline{\chi}(s) \wedge \underline{GB}ds$$

Conditions limites

Condition limite encastrement

Cette condition limite donne l'information nécessaire pour résoudre les équations des poutres. Il n'y a aucun mouvement possible ce qui se traduit par un déplacement généralisé nul. Cependant, il existe une résultante et un moment dans toutes les directions.



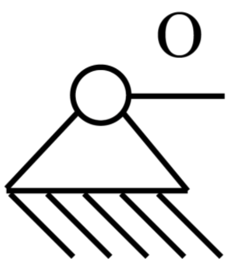
$$\begin{cases} \underline{R}(s=0) = -\underline{R}_O \\ \\ \underline{M}(s=0) = -\underline{M}_O \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\Omega}(s=0) = \underline{0} \\ \\ \underline{U}(s=0) = \underline{0} \end{cases}$$

Les actions mécaniques de liaisons sont calculées avec l'équilibre global de la poutre.

Condition limite articulation

Cette condition limite donne l'information nécessaire pour résoudre les équations des poutre. Elle traduit l'existence d'une résultante non nulle a priori et d'un moment nul au point considéré. Comme le moment est nul, toutes les rotations sont a priori possibles mais aucune translation, ce qui se traduit sur le champ de déplacement.



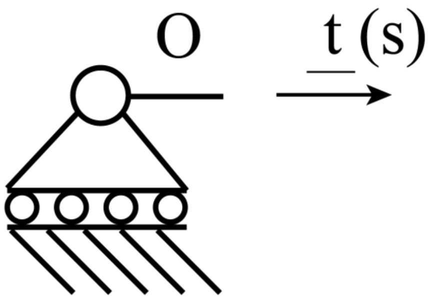
$$\begin{cases} \underline{R}(s=0) = -\underline{R}_O \\ \\ \underline{M}(s=0) = \underline{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\Omega}(s=0) = \underline{?} \\ \\ \underline{U}(s=0) = \underline{0} \end{cases}$$

Les actions mécaniques de liaisons sont calculées avec l'équilibre global de la poutre.

Condition limite appui simple

Cette condition limite donne l'information nécessaire pour résoudre les équations des poutre. Elle traduit l'existence d'une résultante non nulle a priori et d'un moment nul au point considéré.



$$\left\{\begin{aligned} &\underline{R}(s=0)\cdot\underline{t}(s=0)=0 \\ &\underline{M}(s=0)=\underline{0}\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\underline{\Omega}(s=0)=\underline{?} \\ &\underline{U}(s=0)-(\underline{U}(s=0)\cdot\underline{t}(s=0))\underline{t}(s=0)=\underline{0}\end{aligned}\right.$$

Les actions mécaniques de liaisons sont calculées avec l'équilibre global de la poutre.

Condition limite libre

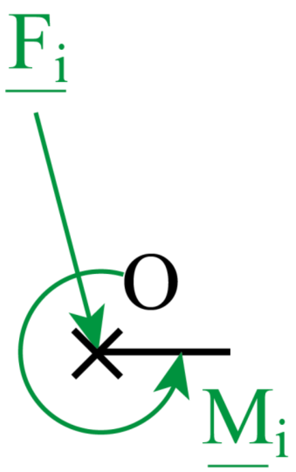
Cette condition limite donne l'information nécessaire pour résoudre les équations des poutre. Elle traduit l'existence d'une résultante non nulle a priori et d'un moment nul au point considéré.

$$\begin{cases} \underline{R}(s=0) = 0 \\ \\ \underline{M}(s=0) = \underline{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\Omega}(s=0) = \underline{?} \\ \\ \underline{U}(s=0) = \underline{?} \end{cases}$$

Condition limite action mécanique imposée

Cette condition limite donne l'information nécessaire pour résoudre les équations des poutre. Elle traduit l'existence d'une résultante non nulle a priori et d'un moment nul au point considéré.



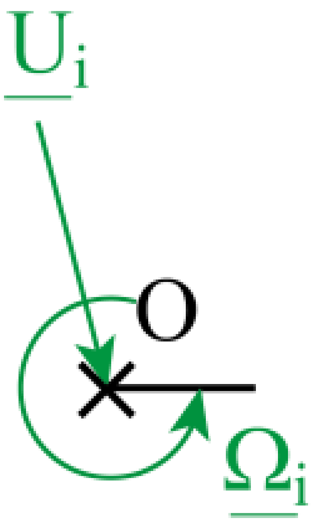
$$\begin{cases} \underline{R}(s=0) = -\underline{F}_i \\ \underline{M}(s=0) = -\underline{M}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\Omega}(s=0) = \underline{?} \\ \underline{U}(s=0) = \underline{?} \end{cases}$$

Il peut exister un version mixte sur l'un ou l'autre des éléments avec des autres conditions limite.

Condition limite déplacement généralisé imposé

Cette condition limite donne l'information nécessaire pour résoudre les équations des poutre. Elle traduit l'existence d'une résultante non nulle a priori et d'un moment nul au point considéré.



$$\begin{cases} \underline{R}(s=0) = \underline{?} \\ \\ \underline{M}(s=0) = \underline{?} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega(s=0) = \underline{\Omega}_i \\ \\ \underline{U}(s=0) = \underline{U}_i \end{cases}$$

Il peut exister un version mixte sur l'un ou l'autre des éléments avec des autres conditions limite.