

Mécanique des Milieux Continus

Solides

Amphi 1.2 – Modélisation 1D des solides (RdM)

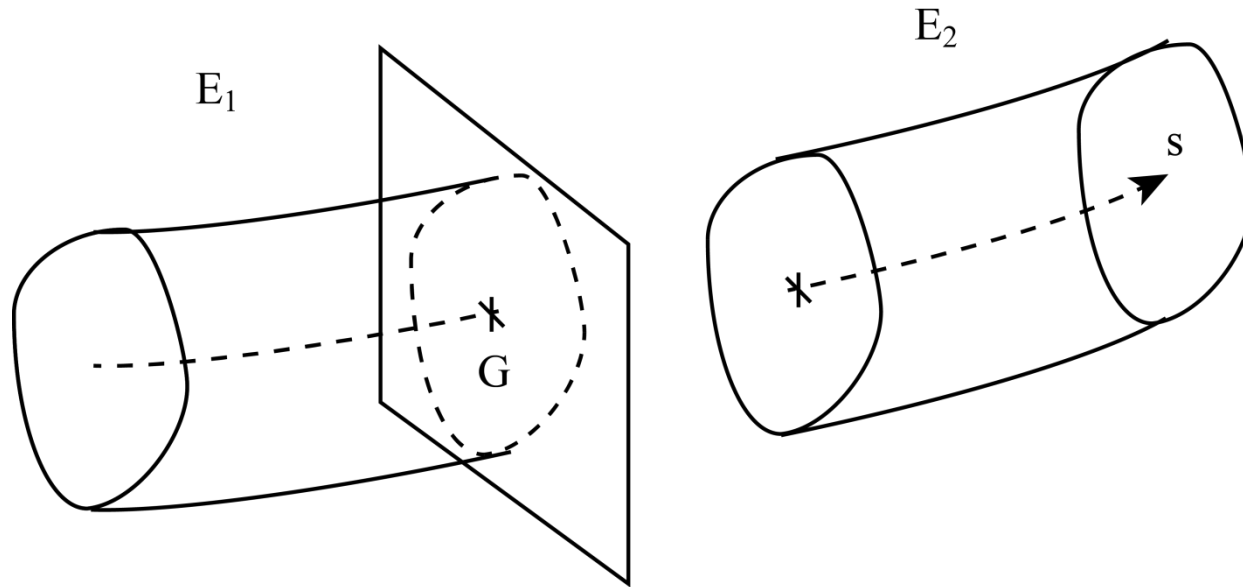
Master M1 Mécanique

Efforts intérieurs

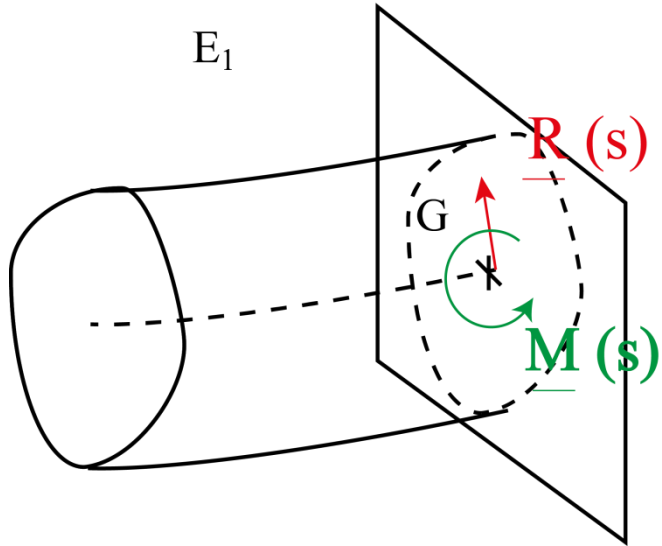
Equilibre local des poutres



Actions mécaniques intérieures dans une poutre



Actions mécaniques intérieures dans une poutre



Les actions mécaniques intérieures exercées à travers une coupure par la partie située à droite (E_2) de la coupure sur la partie située à gauche (E_1) de la coupure (l'axe étant supposé orienté de gauche à droite) sont représentées par une résultante et un moment. Ces actions sont définies positives dans le sens des s croissant (c'est-à-dire que les s^+ appuient « avec un signe positif sur les vecteur » sur les s^-).

Ces actions mécaniques intérieures sont aussi appelées des **actions de cohésion**.

Ces actions de cohésion sont modifiées (et dépendent donc de s !!) lorsque l'on déplace la coupure le long de la poutre. On peut être amené à distinguer plusieurs coupures en particulier lorsqu'on rencontre :

- une discontinuité d'ordre géométrique (changement de direction de la ligne moyenne), cas d'une poutre en équerre par exemple,
- une discontinuité liée à des efforts concentrés ou à une liaison.

 Ces deux vecteurs représentent donc **6 inconnues scalaires statiques**.

Equilibre local (1)

Equilibre local (2)

□ Equation de résultante:

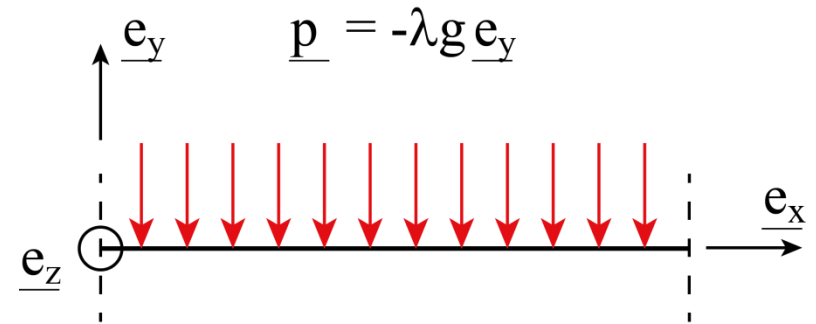
$$\frac{d\underline{R}}{ds} + \underline{p}(s) = \underline{0}$$

□ Equation de Moment:

$$\frac{d\underline{M}}{ds} + \underline{t}(s) \wedge \underline{R}(s) + \underline{m}(s) = \underline{0}$$

Application aux poutres droites

❑ Poutre soumise à son propre poids



❑ Equations scalaires de résultante:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dx} = 0 \\ \frac{dT_y}{dx} - \lambda g = 0 \\ \frac{dT_z}{dx} = 0 \end{cases}$$

❑ Equations scalaires de moment:

$$\begin{cases} \frac{dM_t}{dx} = 0 \\ \frac{dM_{fy}}{dx} - T_z = 0 \\ \frac{dM_{fz}}{dx} + T_y = 0 \end{cases}$$

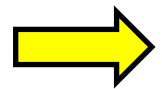
Rappel sur la courbure

Définition usuelles (pris sur wikipédia, je me suis pas foulé là)

Courbe dans le plan:

Mode de définition	Paramètre et repérage du point M	Fonction courbure algébrique
Graphe	$(x, f(x))$	$\frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}$
Paramétrique ⁵	$(x(t), y(t))$	$\frac{x' y'' - y' x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$
Polaire paramétré ⁶	$[\rho(t); \theta(t)]$	$\frac{\rho \rho' \theta'' + 2 \rho'^2 \theta' - \rho \rho'' \theta' + \rho^2 \theta'^3}{(\rho'^2 + \rho^2 \theta'^2)^{3/2}}$
Polaire ⁶	$[\rho(\theta); \theta]$	$\frac{2 \rho'^2 + \rho^2 - \rho \rho''}{(\rho'^2 + \rho^2)^{3/2}}$

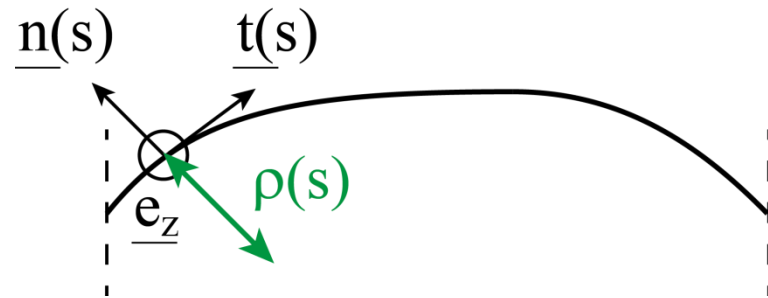
Courbe dans l'espace: il faut définir 2 courbures par rapport aux 2 directions considérées



Attention le rayon de courbure est l'inverse de la courbure!!!!

Application aux poutres planes

□ Poutre plane non chargée:



□ Equations scalaires de résultante:

$$\begin{cases} \frac{dN}{ds} + \frac{1}{\rho} T_n = 0 \\ \frac{dT_n}{ds} - \frac{1}{\rho} N = 0 \\ \frac{dT_z}{ds} = 0 \end{cases}$$

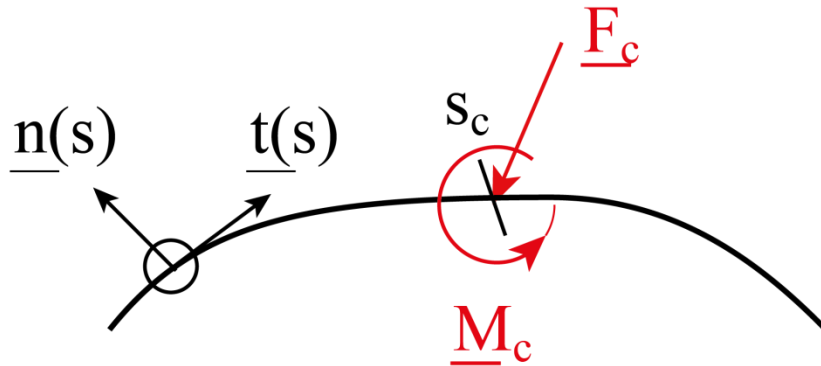
□ Equations scalaires de moment:

$$\begin{cases} \frac{dM_t}{ds} + \frac{1}{\rho} M_{fn} = 0 \\ \frac{dM_{fn}}{ds} - \frac{1}{\rho} M_t - T_z = 0 \\ \frac{dM_{fz}}{ds} + T_n = 0 \end{cases}$$

Application aux poutres gauches

- ❑ C'est le même principe. C'est plus compliquée, il faut avoir le rayon de courbure dans les deux directions de l'espace. Après c'est le même principe. C'est aussi plus dur à dessiner au tableau.

Gestion des actions mécaniques concentrées



□ Equation de résultante:

$$\underline{R}(s_c^+) - \underline{R}(s_c^-) + \underline{F}_c = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad [[\underline{R}]]_{s_c} + \underline{F}_c = \underline{0}$$

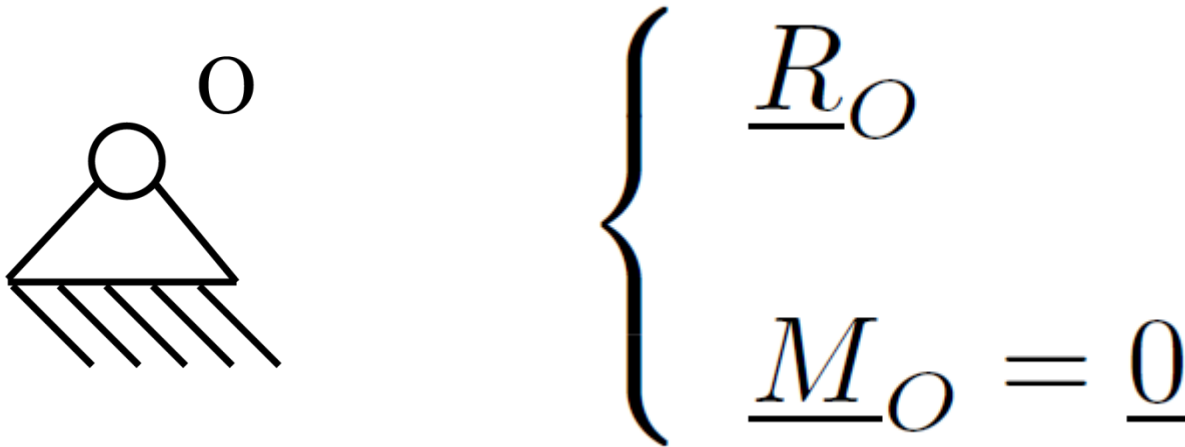
□ Equation de moment:

$$\underline{M}(s_c^+) - \underline{M}(s_c^-) + \underline{M}_c = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad [[\underline{M}]]_{s_c} + \underline{M}_c = \underline{0}$$

➡ **Inconvénient:** il est obligatoire de découper la poutre en sous-tronçon à cause de ce saut à chaque fois qu'il y a une action mécanique concentrée. Dans le cas présent, il faudra étudier le cas $s > s_c$ et le cas $s < s_c$.

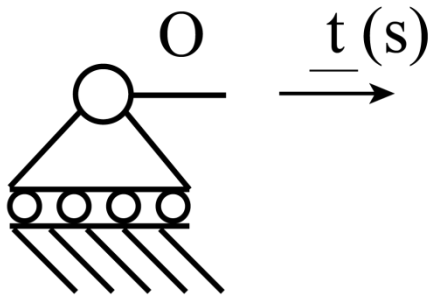
Condition limite articulation

Cette condition limite donne l'information nécessaire pour résoudre les équations des poutre. Elle traduit l'existence d'une résultante non nulle a priori et d'un moment nul au point considéré.



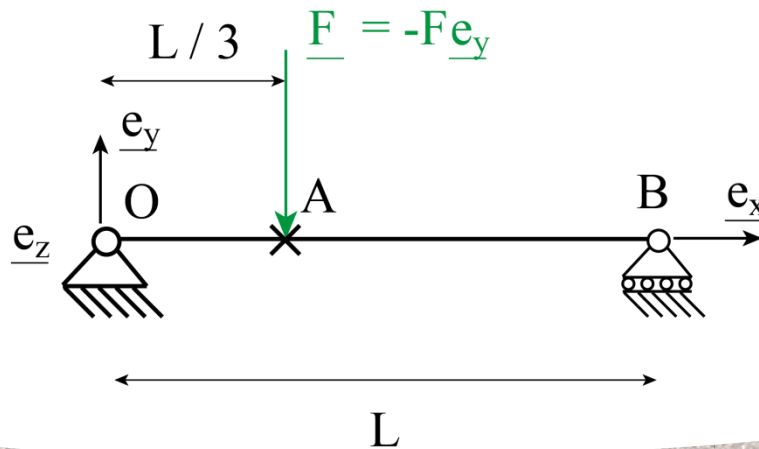
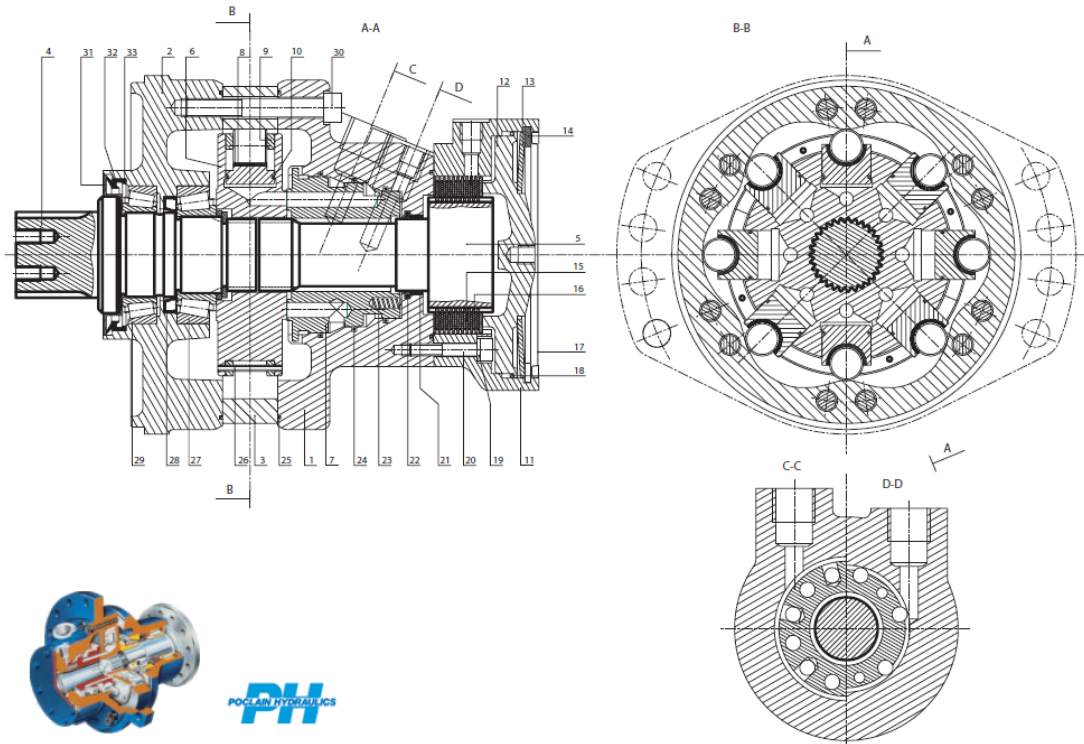
Condition limite appui simple

Cette condition limite donne l'information nécessaire pour résoudre les équations des poutre. Elle traduit l'existence d'une résultante non nulle a priori et d'un moment nul au point considéré.

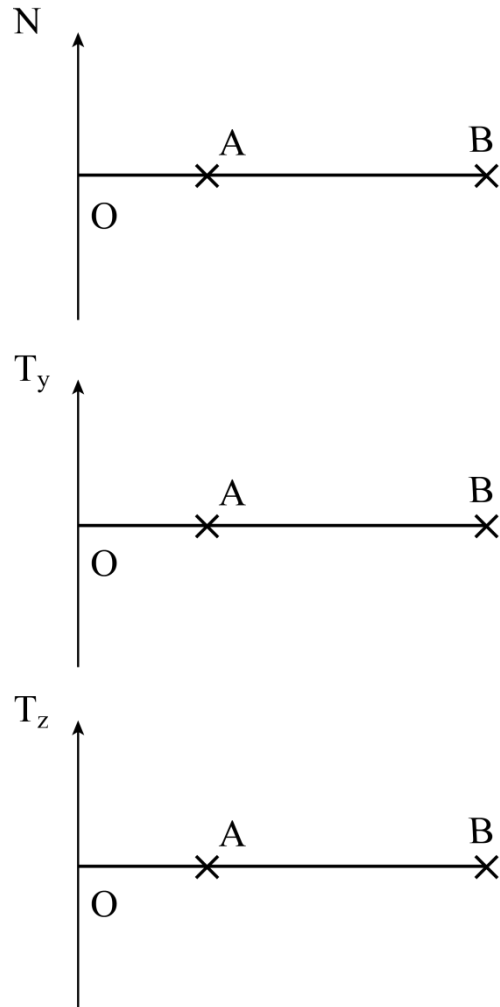


$$\begin{cases} \underline{R}(s = 0) \cdot \underline{t}(s = 0) = 0 \\ \underline{M}(s = 0) = \underline{0} \end{cases}$$

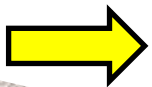
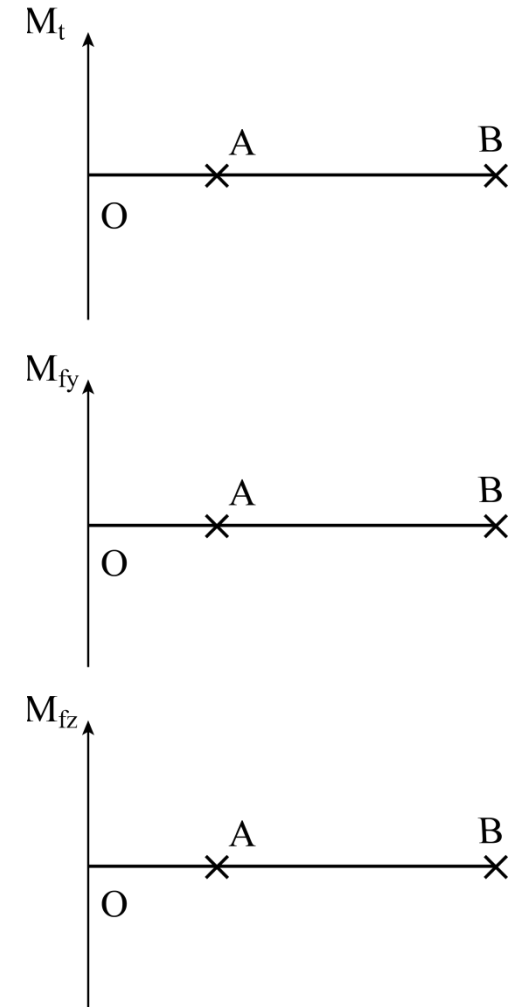
Arbre de moteur hydraulique (1)



Arbre de moteur hydraulique (2)



Diagrammes
de sollicitations



Visualiser rapidement les sections de la poutre les plus chargées.

