Examen de Mécanique

Jeudi 16 Janvier 2003

Durée : 3 heures – sans document

Question de cours : Invariances

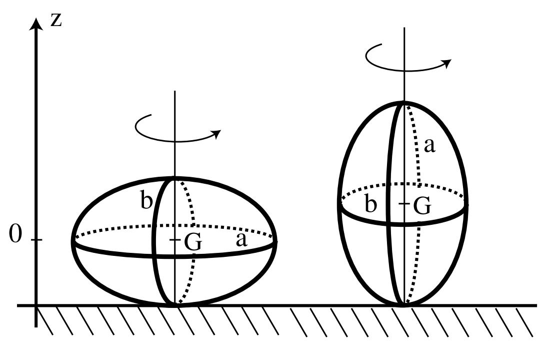
On suppose donnée l'action (intégrale dans le temps de la fonction de Lagrange) d'un système à N corps. On suppose que cette action est invariante sous transformations "hélicoïdales". En coordonnées cylindriques, ces transformations sont du type :

$$r_i \to r_i, \qquad \theta_i \to \theta_i + \alpha, \qquad z_i \to z_i + \kappa\alpha$$

où κ est une constante réelle donnée. Quelle quantité (à exprimer en fonction de dérivées partielles du Lagrangien) est alors conservée lors du mouvement de ces N corps ? Quelle est cette quantité en terme des grandeurs mécaniques telles que l'énergie, impulsion, ...

Exercice 1 : Rotation d'un œuf

Un œuf dur posé sur une table est mis en rotation autour de son petit axe. On constate qu'au-delà d'une certaine vitesse angulaire, l'œuf se redresse spontanément et se met à tourner autour de son grand axe (figure). Dans ce problème, on ne considère que les états initial et final, on ne s'intéresse pas au mécanisme transitoire du redressement de l'œuf.



On modélise l'œuf par un ellipsoïde de révolution homogène de masse m et de demi-axes a (selon $\vec{e}_1$) et b (selon $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$), avec $b < a$; on néglige la légère asymétrie de l'œuf (le centre de masse G est au centre de l'éllipsoïde). Les moments principaux d'inertie d'un ellipsoïde par rapport à son centre de masse G sont $I_1 = \frac{2}{5}mb^2$ et $I_2 = I_3 = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$.

a) Quel est le vecteur instantané de rotation ? Exprimer l'énergie mécanique totale d'un œuf tournant à vitesse angulaire Ω, en position horizontale et en position verticale. On pourra prendre comme origine de l'énergie potentielle la hauteur de G lorsque l'oeuf est horizontal. Tracer ces énergies en fonction de Ω sur un même graphe.

b) Montrer qu'au-delà d'une certaine vitesse angulaire Ω_c, la position verticale est d'énergie inférieure à la position horizontale. Calculer Ω_c pour $a = 3$ cm, $b = 2$ cm et $g = 10$ m.s^{-2}.

On suppose que le contact entre l'œuf et la table se fait sans frottement. Dans ce cas, lors du redressement de l'œuf, l'énergie doit être conservée. On fait tourner l'œuf en position horizontale, avec une vitesse angulaire initiale légèrement supérieure à la vitesse limite : $\Omega_0 = \Omega_c + \omega$ (avec $\omega \ll \Omega_c$). L'œuf se redresse, et tourne alors à une vitesse angulaire finale Ω_f, que l'on peut écrire sous la forme $\Omega_f = \Omega_c + r\,\omega$, où r est un nombre sans dimension.

c) Écrivez l'énergie mécanique totale avant et après le redressement, au premier ordre en ω. En utilisant la conservation de l'énergie, en déduire r en fonction de a et b. L'œuf a-t-il accéléré ou ralenti lors de son redressement ? Que vaudrait r pour $a \simeq b$? (œuf quasi-sphérique).

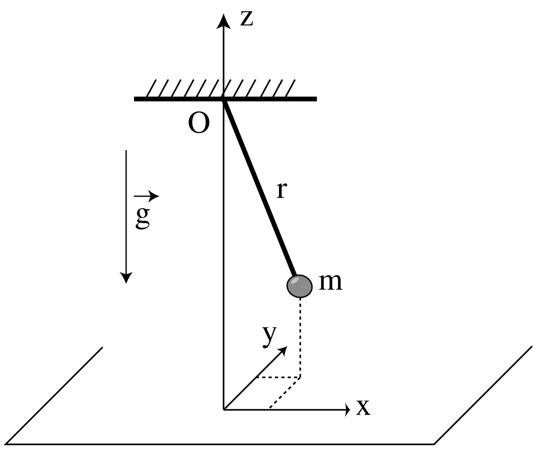
d) Calculer le moment cinétique de l'œuf par rapport à son centre de masse avant (L_0) et après (L_f) le redressement. Exprimer la variation de moment cinétique $\Delta L = L_f - L_0$ en fonction de Ω_c, m, a et b. L'œuf a-t-il gagné ou perdu du moment cinétique lors de son redressement ?

e) Cette variation de moment cinétique signifie que, pendant le temps Δt du redressement, l'œuf a subit un couple $\vec{\Gamma}$. Montrer que la composante verticale de ce couple par rapport au centre de masse peut s'écrire
$$\Gamma_z \simeq \frac{2mg(b-a)}{\Omega_c\,\Delta t}.$$
(on approximera dans le théorème du moment cinétique la dérivée temporelle par une différence finie). Le poids peut-il être responsable d'un tel couple ? Et la réaction du support ? Y a-t-il une contradiction avec les hypothèses de l'énoncé ?

Exercice 2 : Mouvement d'un pendule généralisé

On considère une masse ponctuelle m au bout d'un support qui sera successivement un élastique, une tige et puis un fil. L'autre bout de ce support est fixé en O et peut tourner librement. Ce support est de masse négligeable et est "idéal", c'est-à-dire que la force qu'il exerce est purement radiale et sans frottement. La masse m est aussi soumise à son poids $m\vec{g}$, où $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ ($\vec{e}_z$ est vers le haut). Ces deux forces sont conservatives et on néglige les autres forces (frottement avec l'air etc...).

On travaillera en coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'origine O (avec z orienté positivement vers le haut) dans la question 1, et en coordonnées polaires dans les questions 2 et 3.



1. On commence avec le cas de l'élastique idéal dont la longueur au repos est nulle ; quand il est tendu, cet élastique exerce une force de rappel vers O d'intensité Kr, où $K > 0$ est une constante et r la distance entre la masse et O.

a) Trouver les deux quantités conservées par le mouvement, l'une un scalaire et l'autre une composante d'un vecteur. (On pourra considérer les directions possibles du moment des forces par rapport à O.) Justifier cette dernière loi de conservation à partir d'une invariance du système physique.

b) Donner l'énergie potentielle $V(x, y, z)$ du système (masse plus l'élastique). Bien expliciter la dépendance en K, m et g. De même pour l'énergie cinétique T. En déduire le lagrangien du système et donner les équations du mouvement. Commentaires?

c) On étudie le mouvement en regardant d'abord ses projections sur les plans (xOy) et (xOz). Trouver la nature des orbites associées à ces deux projections. Considérer maintenant la trajectoire dans sa totalité, $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. La trajectoire est-elle fermée en général ?

d) Le mouvement a-t-il lieu dans un plan ? Pour cela, on cherchera s'il existe ou pas un vecteur fixé $\vec{n}$ qui est perpendiculaire au vecteur vitesse à tout temps.

2. Dans ces questions on remplace l'élastique par une tige rigide (toujours de masse négligeable) et de longueur ℓ constante. On suppose aussi que la condition initiale imposée est que le corps a une vitesse nulle.

   a) Démontrer que le mouvement est dans le plan vertical. Ceci nous permet de repérer la masse m par ses coordonnées polaires (r, θ) dans ce plan, où θ est l'angle entre la tige et l'axe vertical. En tenant compte des conditions initiales, donner le lagrangien du système $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta})$, et en déduire l'équation du mouvement.

   On se propose de calculer la force de tension qu'exerce la tige sur la masse m. Pour cela, on modifie le système physique et on ne suppose plus la longueur ℓ fixée *a priori*. On appelle F l'intensité de la force que cette tige exerce sur la masse ; cette force est radiale, comptée positivement suivant la direction partant de O. En général F variera lors du mouvement.

   b) Ecrire les équations du mouvement pour r et θ en partant du Lagrangien de ce système modifié $\mathcal{L}(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$. (On tiendra encore compte des conditions initiales et surtout de la force "extérieure" F exercée par la tige). Définir et justifier la force généralisée intervenant dans ces équations différentielles. Si nécessaire, on se rappellera qu'en cours on a interprété ce type de terme par son travail généralisé, et que l'équation de Lagrange généralisée se met sous la forme
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i$$

   c) Maintenant on veut revenir à notre système initial où $r = \ell$ à tout temps. Pour cela, F doit être tel que $\dot{r}(t) = 0$ à tout temps. Donner alors l'expression de F en fonction de θ, de ses dérivées et des paramètres du système.

3. Dans cette dernière question, la tige est remplacée par un fil de longueur ℓ et toujours de masse négligeable. Le fil est tendu si $r = \ell$ et non tendu si $r < \ell$; dans ce dernier cas la tension F du fil est nulle. On prend maintenant comme condition initiale que la masse est à son point le plus bas possible (donc à la verticale de O) et on lui donne une vitesse initiale.

   Montrer qualitativement que pour des vitesses initiales grandissantes, on a successivement trois régimes différents :

   - oscillations avec un fil toujours tendu ;
   - mouvement initial avec fil tendu, puis au delà d'un angle critique le fil se détend ;
   - mouvement de rotation autour de O avec fil toujours tendu.

   Trouver les deux valeurs de cette vitesse initiale qui séparent ces trois régimes.