Quelques éléments sur les tenseurs en mécanique des fluides

F. Moisy

15 septembre 2011

Dans un certain nombre de domaines de la physique, il est nécessaire d'introduire l'outil mathématique des *tenseurs*. C'est le cas notamment pour les milieux continus, et notamment en mécanique des fluides. En mécanique des fluides, savoir manipuler les tenseurs est facultatif jusqu'à un certain point, et l'on s'en passerait volontier. Mais même pour démontrer certains résultats, comme l'équation de Navier-Stokes, ou bien pour manipuler les grandeurs associées aux fluctuations de vitesse en turbulence, leur utilisation s'avère indispensable.

Savoir manipuler les tenseurs demande un peu d'entrainement. Mais c'est un investissement qui peut s'avérer très utile : ils permettent par exemple de retrouver des relations d'analyse vectorielle (du type $\vec{\nabla}_\wedge(\vec{\nabla}_\wedge\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$) uniquement par quelques manipulations élémentaires. L'objectif de cette introduction n'est pas de devenir un expert en algèbre tensorielle, mais simplement d'acquérir le minimum d'aisance afin de manipuler ces quantités dans le cadre d'un cours de mécanique des fluides.

Notons que, même si le concept mathématique de tenseur est évidemment le même dans les différents domaines de la physique où ils interviennent (relativité, mécanique des fluides, des solides, etc.), les usages et les conventions de notation peuvent différer notablement d'un domaine à l'autre. Les concepts introduits ici sont donc généraux, mais les notations et les illustrations concrètes sont issues de la mécanique des fluides uniquement.

1 Qu'est-ce qu'un tenseur ?

1.1 Qu'est-ce qu'un vecteur ?

Toute collection de 3 nombres forme-t-elle un vecteur ?

La réponse est non : En effet, un vecteur $\vec{u}$, comme la vitesse du fluide, doit être indépendante de la base de projection choisie (x, y, z). Si l'on choisit une autre base (x', y', z'), les valeurs des composantes (u_x, u_y, u_z) changeront évidemment, mais la vitesse $\vec{u}$ elle-même sera *invariante*. Par exemple, la norme de la vitesse $|\vec{u}|$ ne sera pas modifiée : elle ne dépend pas de la base de projection choisie.

Ainsi, l'objet mathématique exotique $(x^2, z+3, y-x)$ **n'est pas un vecteur**, car cet objet ne sera plus le même lors d'un changement de base (la "norme" de cet objet par exemple sera différente dans une autre base). Ainsi, pour qu'une collection de 3 nombres puisse s'appeler *vecteur*, il faut que, lors d'un changement de base, ces 3 nombres se transforment selon la règle classique $\vec{u}' = P^{-1}\vec{u}$, où P est la matrice de passage de l'ancienne vers la nouvelle base. Cette règle de transformation assure l'invariance des quantités physiques, comme la norme du vecteur.

Cette notion d'invariance se généralise à des objets plus compliqués, les tenseurs. On peut d'ailleurs définir mathématiquement les tenseurs comme les objets restant invariants par changement de base. Mais nous allons aborder dans la suite la manipulation des tenseurs d'un point de vue pratique uniquement.

1.2 Définition d'un tenseur

On se place dans un espace de dimension d, avec en général $d = 2$ ou $d = 3$. On considère une quantité physique, disons a, décrite par un tenseur de rang n, que l'on note

$$a_{ijk...}$$

où les n indices $i, j, k...$ prennent des valeurs entre 1 et d. Cela signifie que le nombre minimum de quantités scalaires (= de nombres) nécessaires pour décrire complètement cette quantité physique est d^n.

Quelques exemples :

- la température T en un point est décrite par un nombre unique : c'est un scalaire, et donc un tenseur de rang 0, puisque $3^0 = 1$. Aucun indice n'est nécessaire.
- La vitesse $\vec{u}$ est un tenseur de rang 1, car il est nécessaire d'avoir $3^1 = 3$ nombres (les projections de $\vec{u}$ selon les 3 axes) pour décrire entièrement $\vec{u}$. Il suffit d'un indice, disons i, et l'on note u_i ce tenseur.
- Les dérivées spatiales de la vitesse forment un tenseur de rang 2 : en effet, il est nécessaire d'avoir $3^2 = 9$ nombres pour décrire toutes les combinaisons de dérivées spatiales. Ce tenseur, très utile en mécanique des fluides, est noté

$$G_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \tag{1}$$

Les tenseurs peuvent être utilisés dans des bases quelconques ; cependant, on n'utilisera dans le cadre de ce cours que la base des coordonnées cartésiennes en dimension $d = 3$, avec $i = 1, 2, 3$ correspondant aux coordonnées x, y, z. Dans une telle base, un tenseur de rang 2 peut se représenter comme une matrice $d \times d$ (ici 3×3), les lignes étant numérotées par i et les colonnes par j (convention *li-co*) :

$$[G] = \begin{pmatrix} \partial u_x/\partial x & \partial u_x/\partial y & \partial u_x/\partial z \\ \partial u_y/\partial x & \partial u_y/\partial y & \partial u_y/\partial z \\ \partial u_z/\partial x & \partial u_z/\partial y & \partial u_z/\partial z \end{pmatrix}.$$

Le tenseur des contraintes, σ_{ij}, défini comme la $i$ème composante de la force appliquée par unité de surface normale à n_j, est un autre exemple de tenseur de rang 2.

Dans une expression comme (1), on sous-entend toujours $\forall i, j$. Ainsi, l'équation (1) correspond en fait aux 9 équations scalaires, $G_{11} = \partial u_1/\partial x_1$, etc. En revanche, si l'on note G_{xy}, on veut parler de la composante x, y (c'est-à-dire $i = 1$, $j = 2$) du tenseur G_{ij}. Ainsi, l'équation $G_{xy} = S$ est une unique équation scalaire.

Un tenseur est symétrique pour 2 indices i et j si $a_{ijk...} = a_{jik...}$. Un tenseur est antisymétrique pour 2 indices i et j si $a_{ijk...} = -a_{jik...}$. Pour un tenseur de rang 2, ces définitions coïncident avec les propriétés usuelles de symétrie des matrices : le tenseur a_{ji} est représenté par la matrice transposée ${}^t[a]$.

2 Produit scalaire et produit tensoriel

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i.$$

On utilisera la convention de sommation implicite, ou convention d'Einstein : lorsque 2 indices sont répétés, une somme est sous-entendue sur toutes les valeurs possibles de l'indice, $i = 1...d$. Ainsi, on notera simplement

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i, \tag{2}$$

avec en particulier $|\vec{a}|^2 = a_i a_i$. Le produit scalaire est invariant par changement de base.

Le *produit tensoriel* de 2 tenseurs de rang n et m permet de former un tenseur de rang $n + m$ qui "regroupe" les 2 tenseurs. Ainsi, le tenseur c_{ij} de rang 2 peut être défini comme

$$c_{ij} = a_i b_j. \tag{3}$$

La représentation matricielle du tenseur c_{ij} est :

$$[c] = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}.$$

En notation vectorielle, le produit tensoriel (3) s'écrit $\vec{a} \otimes \vec{b} = [c]$ (on trouve parfois aussi les notations $\vec{\vec{c}}$ et $\underline{\underline{c}}$). Cette écriture vectorielle est parfois ambigüe, et ne sera pas utilisée dans ce cours.

A noter que, dans chacun des 9 équations représentées par (3), a_i et b_j sont des nombres (ce sont les composantes i et j des vecteur $\vec{a}$ et $\vec{b}$). Ces termes peuvent donc permuter, et l'on peut écrire aussi bien $c_{ij} = b_j a_i$ (mais pas $c_{ij} = b_i a_j$!) Attention toutefois : si l'on peut considérer que le tenseur G_{ij} de l'Eq. (1) est construit comme le produit tensoriel de l'opérateur $\partial/\partial x_j$ et du vecteur u_i, les faire commuter n'aurait aucun sens ici.

2.1 Indices muets et libres

Dans l'expression (2), l'indice i est dit "muet" ou "sommé" : la lettre utilisée pour écrire la somme n'a pas d'importance. Ainsi, on peut noter indifféremment

$$a_i b_i = a_k b_k = a_n b_n ...$$

En revanche, dans l'expression (3), les indices i et j sont dits "libres". D'une manière générale, les indices libres sont les indices qui apparaissent une seule fois dans chaque membre d'une équation, ou dans chaque terme d'une somme. On doit avoir la même liste d'indices libres dans chaque membre de l'équation, ou dans chaque terme de la somme. On rappelle que, dans une expression comme (3), il est toujours sous-entendu $\forall i, j$.

Ainsi, dans l'exemple :

$$a_{iki} b_j = S_{kjl} T_{lnn} \tag{4}$$

les indices i, l, n sont muets (ou sommés), tandis que les indices k et j sont libres : cette équation est vérifiée $\forall k, j$.

Les exemples suivants n'ont aucun sens :

$$\begin{aligned} a_{ik} &= b_i c_m \\ a_{ik} &= b_i + d_k \\ a_{ik} &= b_{ikj} \end{aligned}$$

Dans un calcul tensoriel, on prendra bien soin de vérifier, à chaque ligne, la cohérence des indices libres et muets dans chaque membre de l'équation (ce qui ne garantit pas nécessairement que l'équation soit juste !)

2.2 Opérations sur les matrices

Le produit matrice-vecteur $\vec{y} = A\vec{x}$ se note ainsi :

$$y_i = a_{ij} x_j$$

avec $A = [a]$ (sous-entendu : $\forall i$, $\sum_j$).

Le produit matriciel $C = AB$ se note :

$$c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$$

(sous-entendu : $\forall i, j$, $\sum_k$). Là encore, l'ordre n'importe pas : on a également $c_{ij} = b_{kj} a_{ik}$ (ce qui ne veut évidemment pas dire que $C = BA$!)

3 Deux tenseurs importants

3.1 Symbole de Kronecker

Le tenseur unité δ_{ij} (encore appelé *symbole de Kronecker*) est tel que $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$, et $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Ce tenseur symétrique correspond à la matrice unité,

$$[\delta] = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc, pour tout $\vec{x}$, l'égalité $\vec{x} = I\vec{x}$, soit :

$$x_i = \delta_{ij} x_j$$

(truc pratique : δ_{ij} permet donc de changer la lettre utilisée pour l'indice d'un tenseur).

3.2 Contraction, trace

L'opération de *contraction* d'une paire d'indice revient à sommer ces 2 indices ensemble : par exemple, si l'on a le tenseur de rang 3 a_{ijk} et que l'on souhaite calculer le "vecteur" a_{iji}, on écrit

$$a_{iji} = \delta_{ik} a_{ijk}.$$

La contraction permet donc de passer d'un tenseur de rang n à un tenseur de rang $n-2$ (de 3 à 1 dans l'exemple ci-dessus). Ainsi, le produit scalaire $a_i b_i$ (de rang 0) est la contraction du produit tensoriel $a_i b_j$ (de rang 2).

Dans le cas d'un tenseur de rang $n = 2$ (représenté par une matrice), la contraction sur les 2 indices est un scalaire, appelée la *trace* (somme des éléments diagonaux) :

$$tr[c] = c_{ij}\delta_{ij} = c_{ii}.$$

La trace de $[\delta]$ est

$$\delta_{ii} = d = 3.$$

3.3 Le tenseur de Levi-Civita

On définit le tenseur antisymétrique de rang 3 ϵ_{ijk} (dit tenseur de Levi-Civita) par

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } i,j,k = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{si } i,j,k = 321, 213, 132 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce tenseur peut se représenter comme un cube de $3^3 = 27$ éléments, dont seuls 6 sont non nuls. Ce tenseur est utile pour former le produit vectoriel : le vecteur $\vec{c} = \vec{a}_\wedge\vec{b}$ se note

$$c_i = \epsilon_{ijk}a_j b_k$$

($\forall i$, $\sum_{j,k}$). En effet, on peut vérifier que l'on a bien

$$c_1 = \epsilon_{123}a_2b_3 + \epsilon_{132}a_3b_2 = a_2b_3 - a_3b_2,$$

(puisque $\epsilon_{123} = 1$ et $\epsilon_{132} = -1$), et ainsi de suite pour c_2 et c_3.

3.4 Quelques identités pratiques

A partir de la première identité (que l'on admettra), retrouver les deux identités suivantes par contractions successives :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} &= (d-1)\delta_{il} = 2\delta_{il} \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} &= d(d-1) = 6 \end{aligned}$$

Retrouver, à partir de la première identité, le résultat classique suivant :

$$\vec{a}_\wedge(\vec{b}_\wedge\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

4 Opérateurs différentiels

4.1 Gradient

L'**opérateur gradient** $\vec{\nabla}$ s'écrit $\partial/\partial x_i$ en notation tensorielle (parfois aussi noté ∂_i). Cet opérateur peut s'appliquer à des scalaires, mais aussi à des tenseurs de rang quelconque, y compris des vecteurs. C'est là que le formalisme tensoriel devient particulièrement adapté pour la mécanique des fluides : par exemple, le tenseur de gradient de vitesse que nous avons déjà introduit,

$$G_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j},$$

est le gradient (selon x_j) de la $i$ème composante du vecteur $\vec{u}$. De manière générale, le gradient d'un tenseur de rang n est un tenseur de rang $n+1$.

L'opérateur scalaire $\vec{u}\cdot\vec{\nabla}$ s'écrit $u_i\partial/\partial x_i$ en notations tensorielles. Cet opérateur s'applique lui aussi à des scalaires ou des tenseurs de rang quelconque. Il joue un rôle fondamental dans la définition de la dérivée Lagrangienne($d/dt = \partial/\partial t + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}$), qui intervient dans les équations de Navier-Stokes.

4.2 Divergence

L'**opérateur divergence** n'est pas différent de l'opérateur gradient, si ce n'est que l'indice de l'opérateur est contracté (sommé) avec un des indices du tenseur sur lequel il s'applique. Par exemple, $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$ correspond simplement à

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Ainsi, la divergence d'un tenseur de rang $n>1$ est un tenseur de rang $n-1$ (la divergence d'un scalaire n'a pas de sens). Noter que, dans l'exemple précédent, on a

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = G_{ii} = G_{ij}\delta_{ij} = tr[G].$$

Exercice : montrer que, pour un fluide incompressible ($\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0$), l'accélération particulaire $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ peut s'écrire comme la divergence du tenseur symétrique u_iu_j.

4.3 Laplacien

L'**opérateur laplacien** est simplement la divergence du gradient : $\partial^2/\partial x_i\partial x_i$ (la notation répétée $\partial x_i\partial x_i$, plutôt que ∂x_i^2, est utilisée ici pour se souvenir de la sommation implicite sur l'indice répété i). Le laplacien d'un tenseur de rang n reste un tenseur de rang n. Cet opérateur correspond à la contraction (trace) de l'opérateur Hessien $\partial^2/\partial x_i\partial x_j$.

Exercice : Pour un fluide incompressible, montrer que $\partial G_{ij}/\partial x_i = 0$. Sous quelle condition a-t-on également $\partial G_{ij}/\partial x_j = 0$?

Exercice : A partir de l'équation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}$$

obtenir la relation suivante (dite équation de Poisson)

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_i} = G_{ij}G_{ji}.$$

4.4 Rotationnel

Enfin, l'**opérateur rotationnel** s'obtient comme le produit vectoriel entre le "vecteur" $\partial/\partial x_i$ et le tenseur sur lequel il s'applique. Cet opérateur est utile pour définir la vorticité, $\vec{\omega} = \vec{\nabla}_\wedge\vec{u}$. Ainsi, avec l'utilisation du tenseur antisymétrique de rang 3, on a :

$$\omega_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

Illustration : La vorticité est un champ de divergence nulle. En effet,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) = \epsilon_{ijk}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u_k = 0.$$

La dernière égalité est satisfaite même pour un champ de vitesse qui n'est pas incompressible (i.e., tel que $\partial u_i/\partial x_i \neq 0$). En effet, on a contraction entre le tenseur antisymétrique ϵ_{ijk} et le tenseur symétrique $\partial^2/\partial x_i \partial x_j$. Par permutation des indices i, j, on voit immédiatement que cette contraction est nulle.

4.5 Quelques relations utiles

On a :

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}.$$

Il s'ensuit que $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = d = 3$, en effet :

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \delta_{ii} = d = 3$$

En notant r la norme du vecteur x_i (c'est-à-dire tel que $r^2 = x_i x_i$), la relation $\vec{\nabla} r = \vec{e}_r$ s'écrit

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}.$$

Deux autres relations utiles sur les vecteurs unitaires :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_j}{r}\right) = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x_i x_j}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right) = \frac{d-1}{r} = \frac{2}{r}.$$