

Mesure de la déformation d'une surface libre par analyse du déplacement apparent d'un motif aléatoire de points

Marc Rabaud, Frédéric Moisy & Joran Rolland

Lab FAST, Univ Paris-Sud, Univ Pierre et Marie Curie, Bât 502, Campus Universitaire, Orsay, F-91405, France
rabaud@fast.u-psud.fr

Résumé :

Une méthode de mesure non intrusive de la déformation d'une interface fluide au cours du temps est présentée. Cette méthode est basée sur l'analyse du déplacement apparent d'un motif aléatoire de points dû à la réfraction de l'image à travers la surface. La corrélation entre une image instantanée et une image de référence, obtenue lorsque l'interface est plate, permet de reconstruire la hauteur de l'interface en tous points. Ce calcul de corrélation est effectué ici au moyen d'un logiciel commercial de PIV (vélocimétrie par images de particule). La résolution de la méthode est discutée et des images sont présentés dans quelques cas classiques : onde plane en régime permanent, onde circulaire.

Abstract :

A non intrusive method to measure the instantaneous topography of a fluid interface is discussed. This method is based on the analysis of the apparent displacement of a random pattern of points due to the refraction through the surface. The correlation between an instantaneous image and a reference image obtained with the flat surface allows for the reconstruction of the local fluid height. Here the computation of the correlation is performed by a commercial PIV (particle image velocimetry) software. The resolution of the method is discussed and some results are presented in some academic situations: stationary plane wave and circular wave.

Key-words :

Ondes interfaciales ; PIV ; Topographie

1 Introduction

Si de nombreuses méthodes permettent de mesurer la hauteur d'un liquide en un point (sonde capacitive, réflexion d'un rayon laser, etc.) ou sur une ligne (intersection avec un plan laser par exemple), le suivi temporel de toute la topographie d'une surface libre $h(x, y, t)$ est beaucoup plus délicat. Pourtant pour de nombreuses études, que ce soit l'étude des films minces en étalement ou la turbulence d'onde, la connaissance de la dynamique d'un tel champ est importante.

Nous montrons ici qu'une mesure instantanée de la hauteur de la surface libre d'un liquide est possible, à partir de la simple analyse de l'image réfractée d'un motif aléatoire à travers cette surface. Cette image déformée permet la reconstruction du champ de déplacement apparent instantané $\delta\mathbf{r}(x, y, t)$, par corrélation avec une image de référence obtenue lorsque la surface est plane. Moyennant des hypothèses de pente et de courbure modérées, facilement vérifiées dans la plupart des situations pratiques, la hauteur locale est obtenue par intégration de $\delta\mathbf{r}(x, y, t)$. Une méthode proche a été développée dans le cas d'une réfraction continue pour l'étude des ondes internes dans un fluide stratifié (Dalziel et al. 2000).

Du fait d'une utilisation très répandue, à la fois en mécanique des solides (mesure de déformations lors de tests élongationnels, Hild & Roux 2006) et en mécanique des fluides (technique de PIV, vélocimétrie par images de particules), des algorithmes de corrélation d'images très

performants ont été développés et optimisés ces dernières années. Ces algorithmes sont maintenant largement accessibles, en version commerciale ou libre, et rendent la méthode décrite ici particulièrement abordable et simple de mise en œuvre. Le principe de base, les approximations effectuées ainsi que la résolution spatiale sont discutés dans la suite, ainsi que quelques exemples classiques illustrant la méthode (onde plane, onde circulaire).

2 Calcul du déplacement apparent du motif aléatoire

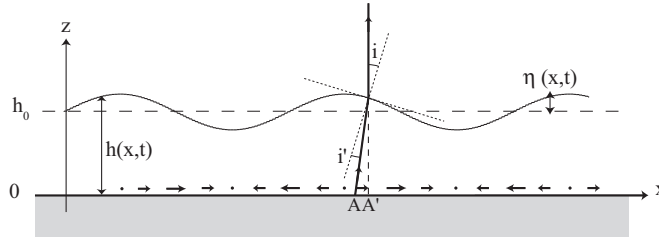


Figure 1: Réfraction d'un rayon émis du point A à travers la surface libre $h(x)$. Ce rayon semblera provenir du point A', et donnera lieu à un déplacement apparent $\delta x = AA'$ (ici $\delta x > 0$ pour $\partial h/\partial x < 0$).

La figure 1 représente une section d'un réservoir contenant un liquide d'indice optique n , et nous supposons pour simplifier que le motif aléatoire est placé au fond du réservoir. On se restreint dans un premier temps à une direction de réfraction, x , et l'on note $h(x, t)$ la hauteur locale de l'interface. Pour une caméra située à l'infini, l'image d'un point A semblera venir d'un point A'. En supposant que chaque rayon n'intercepte qu'une fois la surface, et notant i et i' les angles d'incidence et de réfraction par rapport à la normale à l'interface, le déplacement apparent δx s'écrit :

$$\delta x = -h(x, y, t) \tan(i - i') = -h(x, y, t) \phi \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad (1)$$

avec

$$\phi(\xi) = \tan(\tan^{-1} \xi - \sin^{-1}(n^{-1} \sin(\tan^{-1} \xi))), \quad (2)$$

ainsi qu'une relation similaire pour δy . La fonction $\phi(\xi)$, tracée en figure 2, est monotone et sature pour les pentes élevées. Notons que si la caméra n'est pas à l'infini, une dépendance supplémentaires des angles i et i' par rapport à la position (x, y) intervient, et il devient plus délicat de calculer par intégration la forme de l'interface.

2.1 Approximation des faibles pentes

Dans le cas où la pente est faible, la fonction ϕ peut être linéarisée : $\phi(\xi) \simeq \alpha \xi$, avec $\alpha = 1 - 1/n$ ($\alpha \simeq 0.25$ pour de l'eau). Pour une pente relativement prononcée de 45° (soit $\xi = 1$), cette approximation ne surestime que de 8 % la valeur exacte de $\phi(\xi)$ (figure 2). Dans cette approximation, le champ de déplacement est alors irrotationnel, et peut s'écrire simplement sous la forme $\delta \mathbf{r}(x, y, t) \simeq -(\alpha/2) \nabla h^2(x, y, t)$. La hauteur du fluide en tout point s'obtient donc par inversion,

$$h(x, y, t) = \left(h_0^2 - \frac{2}{\alpha} \nabla^{-1} \delta \mathbf{r}(x, y, t) \right)^{1/2}, \quad (3)$$

où h_0 est une altitude de référence arbitraire. Cette inversion peut être effectuée le long de tout chemin joignant le point de référence tel que $h(0, 0) = h_0$ et le point (x, y) considéré ou, mieux,

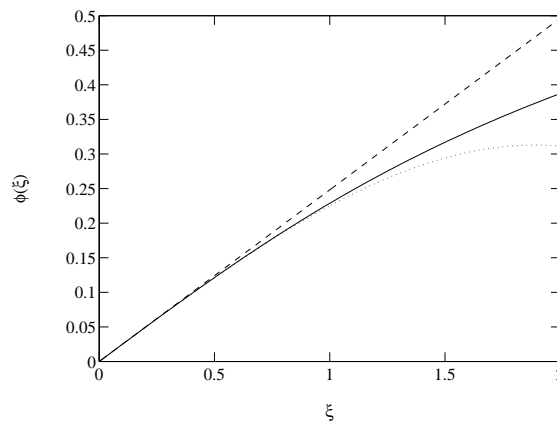


Figure 2: Tracés de la fonction $\phi(\xi)$ (—, éq. 2) ainsi que les approximations d'ordre 1 (---) et 3 (···).

par une méthode d'inversion numérique de type moindre carré (moyenne sur tous les chemins possibles).

Même si cette approximation d'ordre 1 est le plus souvent suffisante, un développement d'ordre 3 de l'éq. (2) peut être envisagé : $\phi(\xi) \simeq \alpha\xi - \beta\xi^3$, avec $\beta = 1/2n - 1/n^2 + 1/2n^3$. Dans le cas de l'eau, $\beta \simeq 0.0231$, ce qui fait que pour une pente de 45° l'ordre 3 sous-estime de 1,6 % la fonction exacte (figure 2). Toutefois ce développement ne conduit plus à une forme intégrable équivalente à l'éq. (3). En pratique, même lors d'un déferlement, les pentes dépassent rarement 30° , et l'écart entre l'approximation linéaire et la fonction exacte reste largement acceptable.

Notons que dans le cas où la profondeur d'eau est grande devant l'amplitude des ondes, on peut écrire $h(x, y, t) = h_0 + \eta(x, y, t) \simeq h_0$ avec $|\eta| \ll h_0$. Dans ce cas, l'approximation de faible pente n'est plus requise, car l'équation (1) est alors toujours inversible, $\partial h / \partial x = -\phi^{-1}(\delta x / h_0)$, au moins numériquement. Cependant, ce régime de grande profondeur et de pente quelconque ne satisfait pas en général la condition de non croisement des rayons (discutée ci-dessous), et ne présente donc pas d'intérêt en pratique.

2.2 Condition de non-croisement des rayons lumineux

Pour pouvoir mesurer le déplacement δx , il faut que l'image d'un point reste un point, c'est-à-dire qu'il n'y ait nulle part croisement des rayons lumineux. En raisonnant à 1 dimension, il faut donc que la position $x + \delta x$ de chaque point apparent A' soit une fonction strictement croissante de x , en d'autres termes que le déplacement apparent vérifie $\partial(\delta x) / \partial x > -1$. Dans le cas contraire, il y a apparition de caustiques, et le déplacement δx est non mesurable.

Si l'on note η_0 l'amplitude des ondes et λ leur longueur d'onde, et dans le cas des approximations d'eau profonde ($\eta_0 \ll h_0$) et de faible pente ($\eta_0 \ll \lambda$), la condition de non croisement devient simplement : $h_0 < (\lambda/2\pi)^2 / (\alpha\eta_0)$. Par exemple une onde d'amplitude 1 mm et de longueur d'onde 5 cm (fréquence d'excitation de 6 Hz dans le cas de l'eau) formera des caustiques pour des profondeurs au-delà de 25 cm.

Si l'on s'intéresse aux ondes en eau relativement profonde, cette limitation peut cependant être facilement contournée en observant par le dessous, à travers le liquide, l'image déformée d'un motif aléatoire placé dans l'air au-dessus de l'interface. Dans ce cas, les deux hauteurs, profondeur d'eau et distance surface-motif, sont découplées, et il est alors toujours possible de choisir cette dernière suffisamment petite pour éviter la présence de caustiques quelque soit la profondeur d'eau.

3 Validation expérimentale

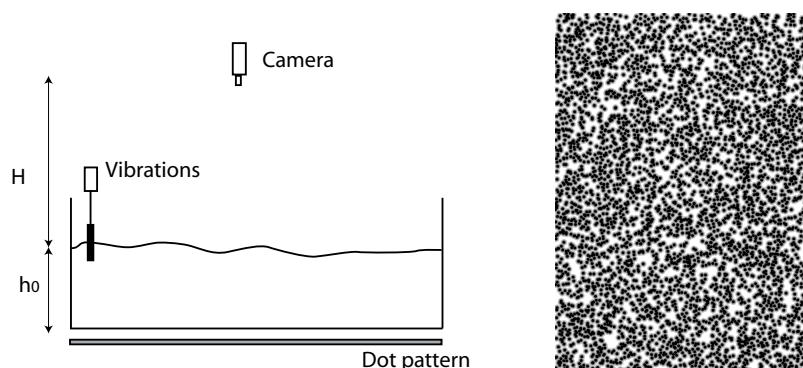


Figure 3: Schéma du montage expérimental (à gauche) et exemple de motif aléatoire (à droite). Densité de 50 %, diamètre des taches $d = 1$ mm.

3.1 Dispositif expérimental et résolution

Nous avons testé notre méthode dans un réservoir de $60 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$ rempli d'eau sur une hauteur h_0 de quelques centimètres d'eau, mesurée avec une précision de 0.1 mm. Le réservoir est éclairé par dessous à travers le fond transparent (figure 3a). Entre la source lumineuse et le fond, une feuille transparente est disposée, sur laquelle est imprimé un motif aléatoire de taches circulaires noires (figure 3b). Les ondes sont générées soit par un vibreur faisant osciller une plaque traversant la surface libre, soit en laissant tomber une goutte d'eau au-dessus de l'interface. Dans les deux cas, la condition de non-croisement des rayons est satisfaite.

Une région d'environ 20 cm de côté est filmée à la fréquence de 100 images/s par une caméra de 1280×1024 pixels. Le champ de déplacement $\delta \mathbf{r}$ de l'image déformée est calculé à chaque instant par corrélation avec une image de référence pour laquelle l'interface était au repos à l'aide du logiciel de PIV DaVis (LaVision (5)). La hauteur d'eau $h(x, y, t)$ est ensuite reconstruite sous Matlab, par une intégration numérique de l'éq. (3) (6).

Pour le calcul du champ de déplacement, des fenêtres d'interrogation de 16×16 pixels ont été utilisées (afin d'avoir 5 taches par fenêtre environ) avec un chevauchement de 8 pixels, soit un maillage de 160×128 points avec une résolution spatiale de 1.3 mm. Pour une onde d'amplitude $\eta_0 = 1$ mm et de longueur d'onde $\lambda = 5$ cm, avec une profondeur moyenne $h_0 = 3$ cm, le déplacement maximal attendu est de $|\delta \mathbf{r}| \simeq 2\pi\alpha h_0 \eta_0 / \lambda \simeq 0.9$ mm, soit environ 6 pixels. Avec une résolution sur le déplacement de l'ordre de 0.1 pixel (algorithme d'interpolation du pic de corrélation), la pente locale $\xi = \partial h / \partial x$ peut donc être obtenue à $\Delta \xi / \xi \simeq 2 \%$ près en chaque point du maillage. L'intégration numérique de l'opérateur ∇^{-1} , qui équivaut à une moyenne sur tous les chemins possibles, conduit ici à une erreur absolue de l'ordre de $\Delta h \simeq 4 \cdot 10^{-3} \eta_0 \simeq 4 \mu\text{m}$.

3.2 Exemples

La figure 4 montre la déformation de la surface libre à un instant donné lorsque le vibreur excite des ondes planes. On peut y mesurer l'amplitude de forçage A_0 , la longueur d'onde et l'atténuation de ces ondes. A partir du film on peut aussi mesurer la vitesse de phase de ces ondes. En utilisant la réflexion d'un faisceau laser sur la surface nous avons vérifié le

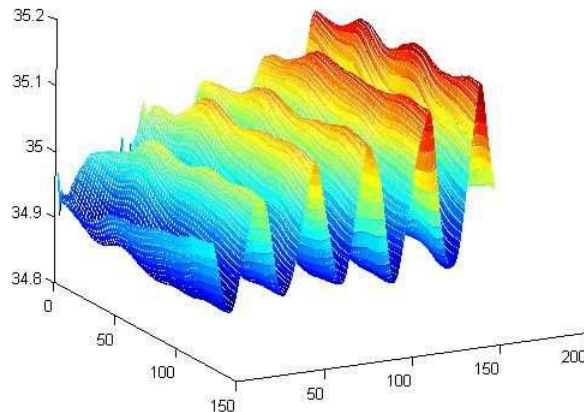


Figure 4: Représentation 3D à un instant donné de la surface de l'eau lorsqu'une plaque verticale vibre sur la droite à 7 Hz. On observe lors de la propagation vers la gauche, la forte atténuation exponentielle des ondes (longueur d'atténuation $L = 17$ cm).

calibrage de notre chaîne de mesure. La connaissance de la relation de dispersion des ondes linéaires en eau peu profonde (en l'absence de dissipation) nous permet de comparer la longueur d'onde théorique pour une excitation à la fréquence f et la longueur d'onde expérimentale. L'accord est excellent si l'on utilise la tension de surface (non mesurée in situ) comme paramètre d'ajustement. Nous trouvons une valeur $\gamma = 50 \cdot 10^{-3}$ Pa m, tout à fait raisonnable pour de l'eau du robinet. Sur la figure 4 on note aussi une forte dissipation qui conduit à une décroissance exponentielle de l'amplitude des ondes. Landau & Lifchitz (2000) prévoient en eau profonde un amortissement sur une distance caractéristique $L = \omega/2\nu k^3$. Toutefois la distance trouvée ici est nettement plus faible, sans doute à cause de l'existence de dissipation dans les couches limites dans le fond du récipient (Howell et al. 2000).

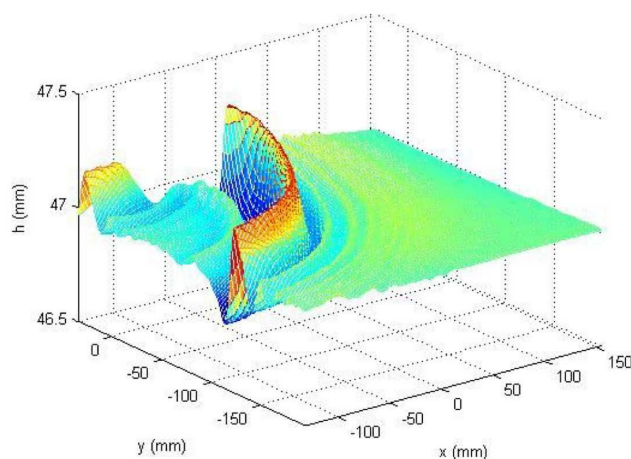


Figure 5: Représentation 3D de la surface de l'eau quelques instants après qu'une goutte d'eau ait impacté la surface.

Une seconde illustration de la méthode est donnée en figure 5. Ici, une onde circulaire a été

initiée par la chute d'une goutte d'eau. Dans cette situation, un paquet d'ondes, dont la longueur d'onde maximale est de l'ordre de la taille de la perturbation, est émis. Toutefois lors de la propagation, du fait du caractère dispersif des ondes de surface, on ne retrouve pas les mêmes longueurs d'onde à l'avant et à l'arrière du paquet d'onde. Des ondes capillaires de faible amplitudes ($\simeq 20 \mu\text{m}$) sont visibles en avant de l'onde principale. Beaucoup d'informations peuvent être obtenues par l'analyse d'un film : vitesse de phase, vitesse de groupe, dispersion, etc.

4 Discussion et conclusion

Nous avons présenté une méthode très simple permettant de suivre l'évolution temporelle de la topographie d'une surface fluide de manière non intrusive. Une mesure de l'amplitude des ondes tous les millimètres peut être facilement obtenue, et ce avec une résolution de 0,4 %. Cette méthode est utilisable même pour des pentes très prononcées. La vraie limitation est l'apparition de caustiques, pour des courbures trop fortes, qui interdisent la mesure du déplacement apparent.

Notre méthode n'est pas limitée aux liquides transparents. En effet, dans le cas du mercure par exemple, on peut travailler de la même manière en réflexion en plaçant le motif de points dans l'air. Par ailleurs, dans le cas de déplacements très importants des taches entre l'image de référence et l'image à l'instant t , il est possible de calculer le champ de déplacement entre deux instants plus proches t_1 et t_2 . Dans ce cas, le déplacement peut être plus faible mais il faut faire une intégration temporelle en plus de l'intégration spatiale pour reconstruire la hauteur $h(x, y, t_2)$. Enfin, pour des phénomènes relativement lents (par exemple l'étalement d'un fluide visqueux), une excellente résolution peut être obtenue en travaillant avec un appareil photo numérique (résolution jusqu'à 10 Mégapixels).

References

- [1] Dalziel, S.B., Hughes, G.O. & Sutherland, B.R. 2000 Whole-field density measurements by 'synthetic schlieren'. *Experiments in Fluids* **28**, 322-335.
- [2] Hild, F. & Roux, S. 2006 Digital Image Correlation: from Displacement Measurement to Identification of Elastic Properties – a review. *Strain* **42**, 69-80.
- [3] Howell, D. R., Buhrow, B., Heath, T., McKenna, C., Hwong, W. & Schatz, M. F. 2000 Measurements of surface-wave-damping in a container. *Phys. Fluids* **12**, 322-326.
- [4] Landau, L. & Lifchitz, E. 2000 *Mécanique des Fluides. Cours de Physique Théorique*. Ellipse.
- [5] LaVision GmbH, Anna-Vandenhoeck-Ring 19, D-37081 Goettingen, Germany.
- [6] D'Errico, J. 2006 Soumission "Intgrad2.m", Matlab Central File Exchange (www.mathworks.com/matlabcentral/).