

## Instabilités tridimensionnelles de l'écoulement de von Kármán entre disques contra-rotatifs

C. Nore, O. Daube<sup>1</sup>, F. Moisy<sup>2</sup>, L. Quartier<sup>3</sup>, M. Tartar, L. S. Tuckerman et S. Xin

*LIMSI-CNRS, bâtiment 508, BP 133, 91403 ORSAY cedex*  
nore@limsi.fr

### Résumé

Nous étudions numériquement et expérimentalement l'écoulement engendré par deux disques en exacte contra-rotation avec une paroi latérale immobile. Nous avons fait varier deux paramètres adimensionnels : le rapport de forme hauteur sur rayon  $\Gamma = H/R$  et le nombre de Reynolds construit avec la vitesse de rotation des disques, leur rayon et la viscosité cinématique du fluide  $Re = \Omega R^2/\nu$ . Pour  $\Gamma = 2$ , nous avons numériquement calculé les états stables successivement rencontrés par l'écoulement en fonction de  $Re$  : des états stationnaires correspondant au mode azimutal  $m = 1$  (dénotés M), des ondes tournantes (TW), des pseudo-cycles hétéroclines (Het) et des états stationnaires correspondant à  $m = 2$  (P). Ce scénario est théoriquement décrit par une bifurcation de presque codimension 2 en présence de la symétrie  $O(2)$ . Pour différents rapports de forme  $0.5 \leq \Gamma \leq 3$ , l'étude de la stabilité linéaire a montré que les modes tridimensionnels sont dominants et stationnaires et que le mode critique décroît avec  $\Gamma$ . Un montage expérimental utilisant la même géométrie a mené à un diagramme d'existence en  $(\Gamma, Re)$  en bon accord avec les résultats numériques. Parmi les états stationnaires et dépendant du temps, des pseudo-cycles hétéroclines ont été mis en évidence à  $\Gamma = 2$ , présentant des différences avec ceux numériquement observés.

### Abstract

*The flow produced in an enclosed cylinder by the exact counter-rotation of the top and bottom disks is numerically and experimentally investigated. The dynamics are governed by two parameters, the Reynolds number  $Re$  based on cylinder radius and disk rotation speed and the height-to-radius ratio  $\Gamma$ . For  $\Gamma = 2$ , when  $Re$  is increased, the axisymmetric basic state loses stability and different complex flows appear successively: steady states with an azimuthal wavenumber of 1 (called M), traveling waves (TW), near-heteroclinic cycles (Het), and steady states with an azimuthal wavenumber of 2 (P). This scenario is understood in a dynamical system context as due to a nearly codimension-two bifurcation in the presence of  $O(2)$  symmetry. For varying aspect ratios  $0.5 \leq \Gamma \leq 3$ , the stability analysis shows that non-axisymmetric modes are dominant and stationary and that the critical azimuthal wavenumber is a decreasing function of  $\Gamma$ . An experiment using the same geometry has lead to a regime diagram in the  $(\Gamma, Re)$  plane which compares well with the numerical results. Among the steady and time-dependent states found in the experiment, robust near-heteroclinic cycles are found for  $\Gamma = 2$  that reveal different from those numerically observed.*

## 1 Introduction

L'écoulement produit dans une cavité cylindrique par l'entraînement de deux disques en rotation a été le sujet d'études théoriques, expérimentales et numériques exhaustives

---

1. LMEE, Université d'Evry Val d'Essonne, 40 rue du Pelvoux, 91020 Evry Cedex France  
2. Fluides, Automatique et Systèmes Thermiques, Bât. 502, 91405 Orsay Cedex, France  
3. Laboratoire de Physique Statistique, ENS, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France

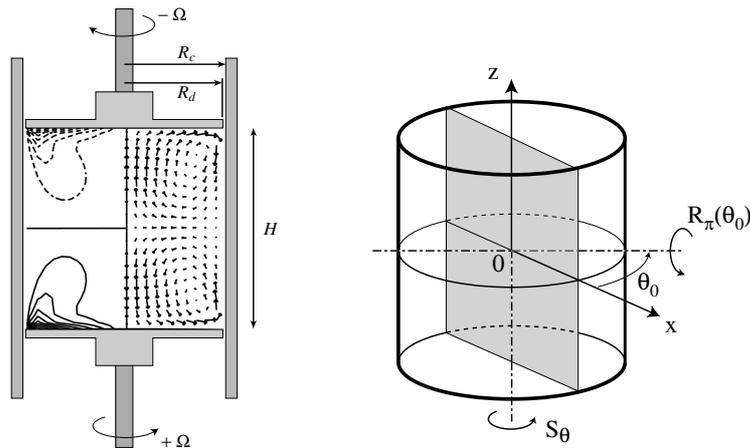


FIG. 1 – *Géométrie et symétries: (a) Schéma de la configuration étudiée. Les figures insérées sont des résultats numériques des contours de la vitesse azimutale (à gauche) et des vecteurs du champ méridien (à droite) pour  $Re = 300$ . (b) Schémas des symétries. D’après [5].*

depuis Batchelor [1] et a été baptisé écoulement de von Kármán par Zandbergen et Dijkstra [2]. Parmi ces écoulements, celui engendré par deux disques en contra-rotation avec une paroi latérale immobile a permis d’atteindre des nombres de Reynolds de l’ordre de  $10^7$  dans l’eau, l’air, l’hélium gazeux ou le sodium liquide. Or, la route vers le chaos de cet écoulement turbulent n’a pas été précédemment étudiée. Nous avons donc entrepris l’étude des bifurcations et des états non linéaires de cet écoulement.

## 2 L’écoulement de von Kármán à $\Gamma = 2$

### 2.1 Géométrie de l’écoulement et symétries

Le dispositif étudié est représenté en figure 1 (a) où les notations sont précisées. La dynamique est gouvernée par deux paramètres adimensionnels: le rapport de forme hauteur sur rayon  $\Gamma = H/R$  et le nombre de Reynolds construit avec la vitesse de rotation des disques, leur rayon et la viscosité cinématique du fluide  $Re = \Omega R^2/\nu$ . Dans le code, le rayon du disque  $R_d$  est le même que celui du cylindre  $R_c$ , c’est-à-dire  $R_c = R_d = R$ . Cette configuration est invariante par rotation autour de l’axe vertical désignée par  $S_\theta$  et par rotation d’angle  $\pi$  autour d’un axe horizontal arbitraire notée  $R_\pi(\theta_0)$  (fig. 1 b). Ces deux groupes de symétrie confèrent la symétrie  $O(2)$  au système pour tout rapport de forme. L’écoulement de base possède toutes les symétries du problème, il est donc stationnaire et axisymétrique. La contra-rotation des deux disques crée une couche de mélange azimutale équatoriale (fig. 1 (a) à gauche). Chaque disque tournant donne lieu à une couche d’Ekman (fig. 1 (a) à droite).

### 2.2 L’interaction modale 1:2 mise en évidence à $\Gamma = 2$

Nous avons étudié numériquement dans [3] le cas en *exacte* contra-rotation à un rapport de forme  $\Gamma = 2$ . Nous avons calculé les états stables successivement rencontrés par l’écoulement en fonction de  $Re$ : des états stationnaires correspondant au mode azimutal  $m = 1$  (dénotés mixed mode M), des ondes tournantes (TW), des ondes tournantes

modulées (MWH), des pseudo-cycles hétéroclines (Het) et des états stationnaires correspondant à  $m = 2$  (dénotés pure mode P) (voir fig. 2). La branche des états M apparaissant

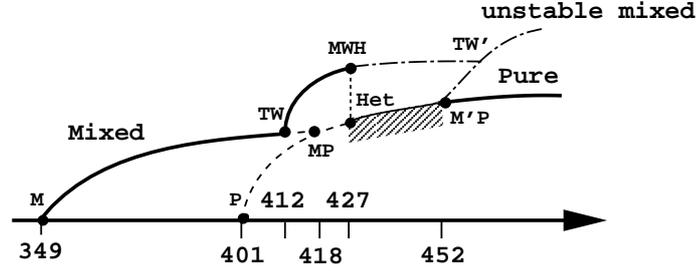


FIG. 2 – Diagramme de bifurcation théorique en fonction de  $Re$ . Les solutions stables sont indiquées en trait continu, les instables en tiré et les pseudo-cycles hétéroclines en zone hachurée. Les lignes en point-tiré sont les branches non calculées. Les seuils sont indiqués par des points:  $Re_M = 349$ ,  $Re_P \simeq 401$ ,  $Re_{TW} \simeq 412$ ,  $Re_{MP} \simeq 418$ ,  $Re_{MWH} = 427.3$ ,  $Re_{Het} = 427.4$ ,  $Re_{M'P} \simeq 452$ . D'après [3].

à  $Re_M$  correspond à une modulation azimuthale de la couche de cisaillement équatoriale qui donne naissance à un tourbillon radial stationnaire (voir fig. 3 a). Ces solutions deviennent instables à  $Re_{TW}$  et se transforment en ondes tournantes, droites ou gauches. Ces ondes sont elles-mêmes instables à  $Re_{MWH}$  vis à vis d'ondes modulées représentées en fig. 4 (a) existant sur une très petite gamme de Reynolds  $427.3 \leq Re \leq 427.4$ . Le régime le plus exotique apparaît à  $Re_{Het}$  où le système oscille entre deux modes  $m = 2$  se déduisant l'un de l'autre par une rotation de  $\pi/2$ . Nous avons observé deux types de pseudo-cycles hétéroclines : des cycles à deux plateaux et d'autres à quatre plateaux (fig. 4 b et c). Ces cycles sont détruits à  $Re_{M'P}$  où la branche de solutions devient celle des modes  $m = 2$  correspondant à deux tourbillons radiaux co-rotatifs (fig. 3 b).

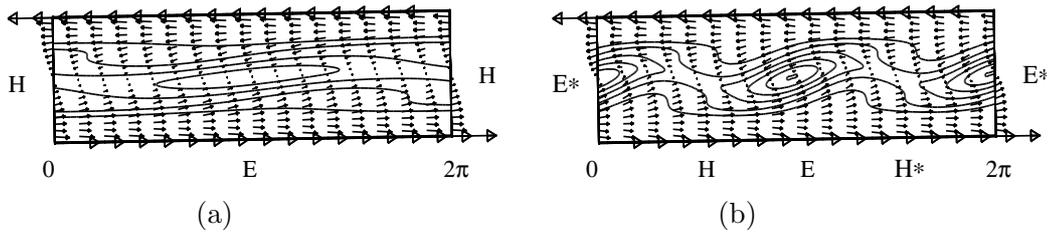


FIG. 3 – Champ de vecteurs et vorticité radiale dépliés de  $0$  à  $2\pi$  montrant (a) un tourbillon radial à  $Re = 355$ , (b) une paire de tourbillons corotatifs à  $Re = 500$ . D'après [3].

### 3 Variation du rapport de forme

#### 3.1 Résultats numériques

Nous avons étudié numériquement la stabilité de l'écoulement produit par des disques en exacte contra-rotation en fonction du rapport de forme dans l'intervalle  $0.5 \leq \Gamma \leq 3$  [4]. Pour chaque  $\Gamma$ , nous avons calculé le nombre de Reynolds marginal  $Re_m(\Gamma)$  pour des

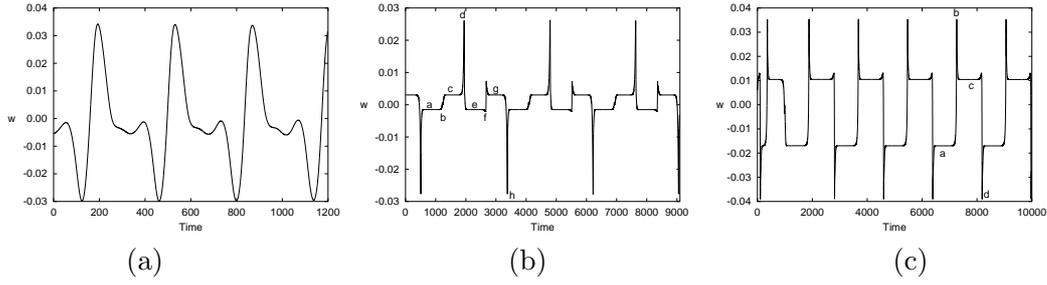


FIG. 4 – Evolution temporelle d'un signal numérique de vitesse verticale pour (a) les ondes tournantes modulées à  $Re = 427.35$ , (b) les pseudo-cycles hétéroclines à 4 plateaux à  $Re = 430$ , (c) les pseudo-cycles à 2 plateaux à  $Re = 435$ . D'après [3].

valeurs entières du nombre d'onde azimutal  $0 \leq m \leq 5$  (fig. 5). Tous les modes sont stationnaires au seuil, i.e. les valeurs propres sont nulles au seuil sauf pour les branches notées  $m = 0$  ( $H_1$ ) et  $m = 0$  ( $H_2$ ). Les points de codimension 2 correspondent à l'intersection entre

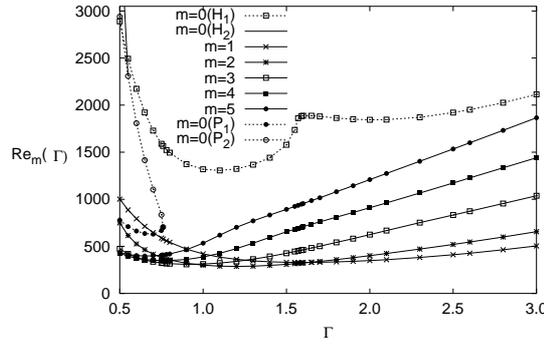


FIG. 5 – Seuils  $Re_m(\Gamma)$  pour les modes azimutaux  $m = 0$  à 5 en fonction du rapport de forme  $\Gamma$ . Les modes  $m = 1$  à 5 sont stationnaires alors que le mode axisymétrique est stationnaire pour  $m = 0$  ( $P_1$ ) et ( $P_2$ ) et oscillant pour  $m = 0$  ( $H_1$ ) et ( $H_2$ ). D'après [4].

deux courbes de nombres d'onde différents et sont donnés par  $Re(m = 4, m = 3) = 365$  à  $\Gamma = 0.63$ ,  $Re(m = 3, m = 2) = 310$  à  $\Gamma = 0.95$  et  $Re(m = 2, m = 1) = 330$  à  $\Gamma = 1.64$ .

### 3.2 Résultats expérimentaux

Notre étude expérimentale utilise deux techniques complémentaires : la visualisation par ensemencement d'iriodine dans de l'huile de silicone et la vélocimétrie par images de particules (PIV). Pour les visualisations, nous avons disposé deux miroirs à  $120^\circ$  degrés de part et d'autre du cylindre et nous avons ensuite traité les images enregistrées par caméra CCD (voir fig. 6). Ces deux techniques nous ont permis de comparer les résultats numériques et expérimentaux de façon précise. L'enveloppe inférieure des seuils en nombre de Reynolds trouvée numériquement est reproduite en figure 7 avec les résultats expérimentaux obtenus à l'aide des visualisations par particules d'iriodine. L'accord entre les seuils numériques et expérimentaux est très satisfaisant. Nous avons aussi déterminé des seuils d'apparition de comportements instationnaires [5].

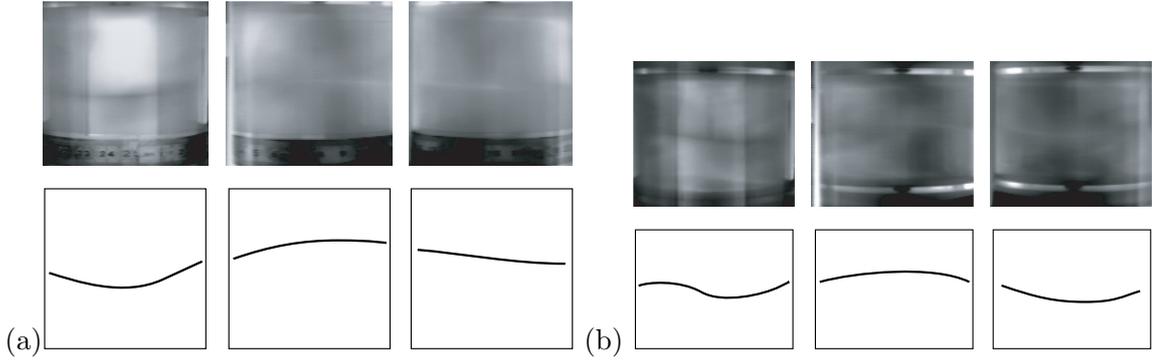


FIG. 6 – Modulation azimuthale de la couche de mélange mise en évidence par les particules d’iriodine pour deux rapports de forme. Les images sont traitées de la façon suivante : l’image directe est présentée à gauche, les images des miroirs sont renversées et disposées au milieu et à droite. Ce montage permet de reconstruire l’image du périmètre. Le mode azimuthal correspond au nombre de maxima le long d’une circonférence. Les schémas inférieurs aident à la lecture des images. (a)  $\Gamma = 2$ ,  $m_C = 1$  ; (b)  $\Gamma = 1.5$ ,  $m_C = 2$ . D’après [5].

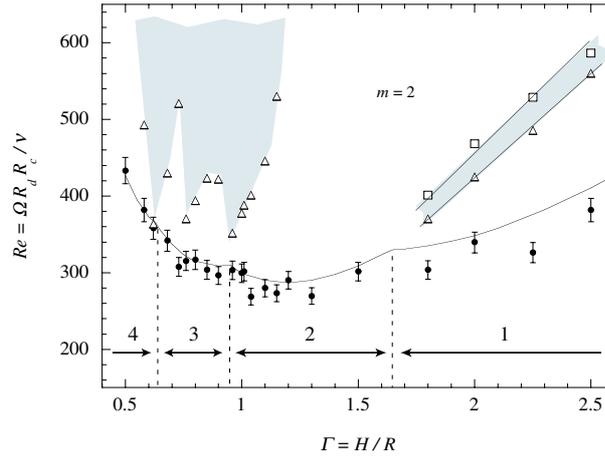


FIG. 7 – Diagramme dans le plan  $(\Gamma, Re)$  [5]. ● : Etat stationnaire non axisymétrique de mode critique  $m_C$  (indiqué par le chiffre), △ : état instationnaire, carré : état stationnaire non axisymétrique avec  $m \neq m_C$ . La partie grisée représente différents états instationnaires. — : Seuils numériques, - - - : Lignes indiquant les points de codimension-2.

## 4 Cycles hétéroclines numériques et expérimentaux

Nous avons obtenu des pseudo-cycles hétéroclines à  $\Gamma = 2$  dans l’expérience à  $\Gamma = 2$  pour  $450 \pm 8 \leq Re \leq 480 \pm 4$ . Des signaux temporels de la vitesse horizontale sont présentés en fig. 8. Les oscillations ont lieu en fait entre trois états stationnaires : deux modes  $m = 2$  reliés par une rotation de  $\pi/2$  (labels a et c) et un mode  $m = 2$  différent (label e). Les états transitoires (labels b et d) correspondent à des modes  $m = 1$ . Les cycles expérimentaux sont donc distincts des cycles strictement périodiques trouvés numériquement (fig. 4 b et c). La différence semble être due aux bruits et à un défaut géométrique du montage expérimental [5].

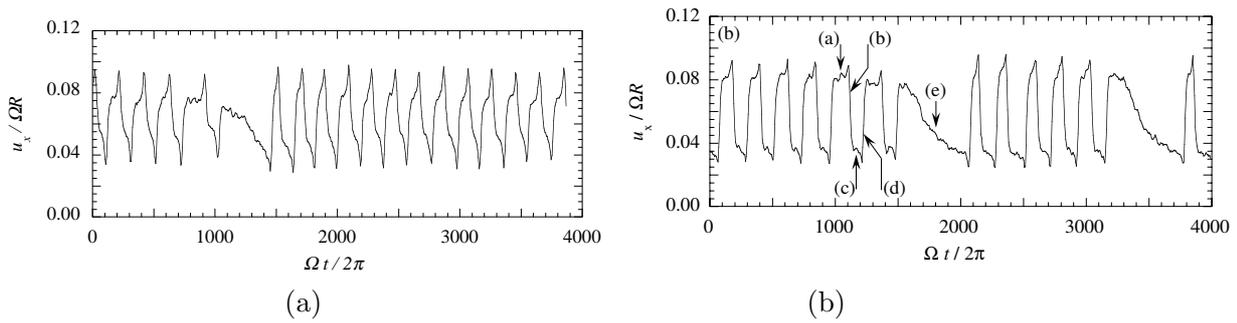


FIG. 8 – *Evolution temporelle d'un signal expérimental de vitesse horizontale pour les pseudo-cycles hétéroclines (a) à  $Re \simeq 452$ , (b) à  $Re \simeq 469$ . D'après [5].*

## 5 Conclusion

Nous avons mené des études numériques et expérimentales sur l'écoulement de von Kármán en exacte contra-rotation. Elles ont mis en évidence des pseudo-cycles hétéroclines pour une gamme étendue de nombres de Reynolds. L'expérience que nous avons réalisée est la troisième au monde à présenter ce régime exotique à côté d'une expérience de convection thermique en rotation autour d'un axe vertical via l'instabilité de Kuppers-Lorz [6] et une expérience d'instabilité de flammes [7].

## Références

- [1] Batchelor G.K., *Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow*, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **4**, 29–41, 1951.
- [2] Zandbergen P. J. & Dijkstra D., *Von Kármán swirling flows*, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **19**, 465–491, 1987.
- [3] C. Nore, L.S. Tuckerman, O. Daube & S. Xin, *The 1 : 2 mode interaction in exactly counter-rotating von Kármán swirling flow*, *J. Fluid Mech.* **477**, 51–88, 2003.
- [4] C. Nore, M. Tartar, O. Daube & L.S. Tuckerman, *Survey of instability thresholds of flow between exactly counter-rotating disks*, *J. Fluid Mech.* **511**, 45–65, 2004.
- [5] C. Nore, F. Moisy & L. Quartier, *Experimental observation of near-heteroclinic cycles in the von Kármán swirling flow*, *Phys. Fluids*, en cours de révision, 2005.
- [6] G. Küppers & D. Lortz, *Transition from laminar convection to thermal turbulence in a rotating fluid layer*, *J. Fluid Mech.*, **35**, 609–620, 1969.
- [7] E. Stone, M. Gorman, M. el-Hamdi & K. A. Robbins, *Identification of intermittent ordered patterns as heteroclinic connections*, *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 2061–2064, 1996.