

Equation de Kolmogorov et structures en turbulence développée

F. Moisy, P. Tabeling, H. Willaime

Laboratoire de Physique Statistique, École Normale Supérieure

24 rue Lhomond, 75231 Paris

CNRS UMR 8550 - associé Universités Paris VI et VII

Résumé : L'équation de Kolmogorov [1] est une relation exacte s'appliquant aux écoulements turbulents, dans le cas idéalisé homogène et isotrope. Dans cette étude [2], nous nous sommes attachés à tester la validité de cette équation, incluant un terme prenant un compte le forçage à grande échelle. Grâce à une expérience de turbulence développée, utilisant de l'hélium à basse température, nous sommes capables de couvrir une importante gamme de nombre de Reynolds dans des conditions très contrôlées (le nombre de Reynolds microéchelle R_λ variant entre 120 et 1200). Nous montrons que cette équation est remarquablement vérifiée, et mettons en évidence une lente tendance vers le régime de Kolmogorov dans la limite des très grands nombres de Reynolds. Nous observons pour la première fois une nouvelle échelle de longueur, variant comme $R_\lambda^{-3/5}$, caractéristique des corrélations de vorticité. Nous montrons comment cette échelle peut être interprétée physiquement, en terme de structures petite échelle (vermisseaux) groupés en amas d'intense activité.

L'équation de Kolmogorov est un résultat fondamental en turbulence : elle dérive directement des équations du mouvement, et traduit un bilan de puissance entre l'injection de l'énergie à grande échelle, son transfert, et sa dissipation à petite échelle par les effets de la viscosité. Cette relation est également d'une grande importance pratique, car elle permet d'estimer la puissance dissipée ϵ à partir de mesures du domaine inertiel. Dans la limite des très grands nombres de Reynolds, cette equation se réduit à la "loi des 4/5" de Kolmogorov, postulant la constance du taux de transfert ϵ à travers les échelles, et considérée comme le résultat le plus important dans la description de la turbulence développée [3]. Cependant, malgré un grand nombre d'études, une confirmation précise de cette relation reste difficile à obtenir.

Afin de prendre en compte l'effet du forçage à grande échelle, nous utilisons un développement de la puissance injectée introduit par Novikov [4], paramétré par une échelle de forçage L_f :

$$S_3 = 6\nu \frac{dS_2}{dr} - \frac{4}{5}\epsilon r \left(1 - \frac{5}{14} \frac{r^2}{L_f^2} \right), \quad (1)$$

où r est une échelle de longueur, ν la viscosité cinématique et ϵ la puissance injectée. Notons que L_f est a priori différente de l'échelle intégrale, définie comme longueur d'autocorrélation des fluctuations de vitesse. Les quantités $S_n(r) = \langle [v(x+r) - v(x)]^n \rangle$ sont les fonctions de structures longitudinales, c'est-à-dire les moments des incréments de vitesse pris sur une distance r le long de l'écoulement moyen. $S_2(r)$ est liée à l'énergie cinétique à l'échelle r , et $S_3(r)$ au transfert d'énergie à travers l'échelle r .

L'écoulement que nous étudions est confiné dans un cylindre, entre deux disques de 20 cm de diamètre, équipés de pales. Le fluide est de l'hélium gazeux maintenu à pression et température constante, entre 4.2 et 6.5 K, ce qui permet de faire varier la viscosité cinématique sur près de 3 ordres de grandeur. Les mesures de fluctuations de vitesse en un point sont effectuées par anémométrie à fil chaud. Les capteurs, faits maison, sont constitués d'une fibre de carbone de 7 μm de diamètre, tendue sur un cadre rigide, et couverte d'un dépôt métallique sur toute la

longueur, excepté sur une zone de $7 \mu\text{m}$, définissant la partie sensible de la sonde. Le temps de réponse de cette sonde a été mesuré de l'ordre de la μs , permettant d'accéder à la mesure des plus petites échelles de la turbulence. Enfin, la vitesse des disques est ajustée de telle sorte que le taux de fluctuation local soit de l'ordre de 20 %, ce qui permet de déduire les incréments spatiaux des mesures temporelles. Les fichiers de données sont enregistrés sur plus de 3×10^7 points, avec un rapport signal/bruit d'au moins 70 dB, assurant une excellente convergence des moments d'ordre 2 et 3. Afin de résoudre au mieux les échelles dissipatives, nous avons restreint la présente étude à une gamme de nombres de Reynolds microéchelle R_λ compris entre 120 et 1200. On définit ici $R_\lambda = u'\lambda/\nu$, où u' est l'écart-type des fluctuations de vitesse et $\lambda = u'(15\nu/\epsilon)^{1/2}$ l'échelle de Taylor (entre 3 et 0.3 mm dans cette gamme de nombres de Reynolds).

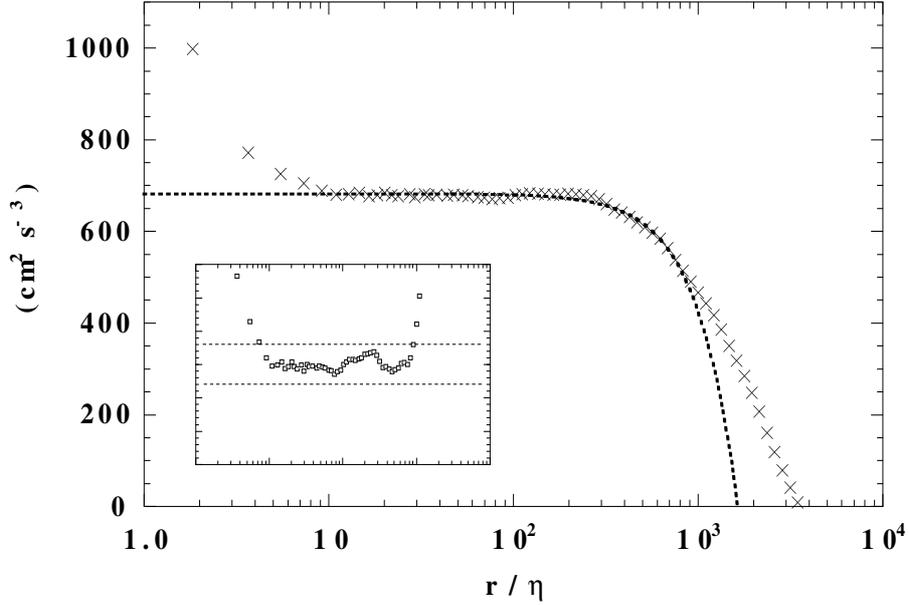


Figure 1: \times : $-S_3/r + 6\nu S_2'/r$ comparé à l'ajustement donné par l'Eq. (2), pour $R_\lambda=720$. Dans l'insert, nous avons tracé la différence entre les données expérimentale et l'ajustement; la ligne pointillée représente $\pm 3\%$.

Afin de mesurer avec quelle précision l'équation de Kolmogorov est vérifiée par l'expérience, nous l'écrivons sous la forme :

$$-\frac{S_3}{r} + \frac{6\nu}{r} \frac{dS_2}{dr} = \frac{4}{5}\epsilon \left(1 - \frac{5}{14} \frac{r^2}{L_f^2}\right) \quad (2)$$

Le membre de gauche est mesuré expérimentalement, en utilisant l'hypothèse de Taylor, et nous le comparons à l'ajustement à deux paramètres libres, ϵ et L_f , donné par le membre de droite. La figure 1 montre l'ajustement obtenu pour $R_\lambda=720$; la courbe en insert montre que cet ajustement reproduit les données expérimentale avec un accord de 3 % pour r variant entre 8 et 900 η , où $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ est l'échelle de Kolmogorov (η varie entre 150 et 5.5 μm dans notre expérience). Sous 8 η , l'écart est dû au bruit à petite échelle de S_2 , et au-delà de 900 η une telle description cesse de s'appliquer.

Afin d'estimer l'écart entre la fonction de structure d'ordre 3 mesurée et la limite donnée par la loi des 4/5, nous introduisons la fonction de Kolmogorov $K(r) = -S_3(r)/\epsilon r$ [5], où ϵ est déterminé par l'ajustement précédent. Sur la figure 2 nous avons représenté une famille de

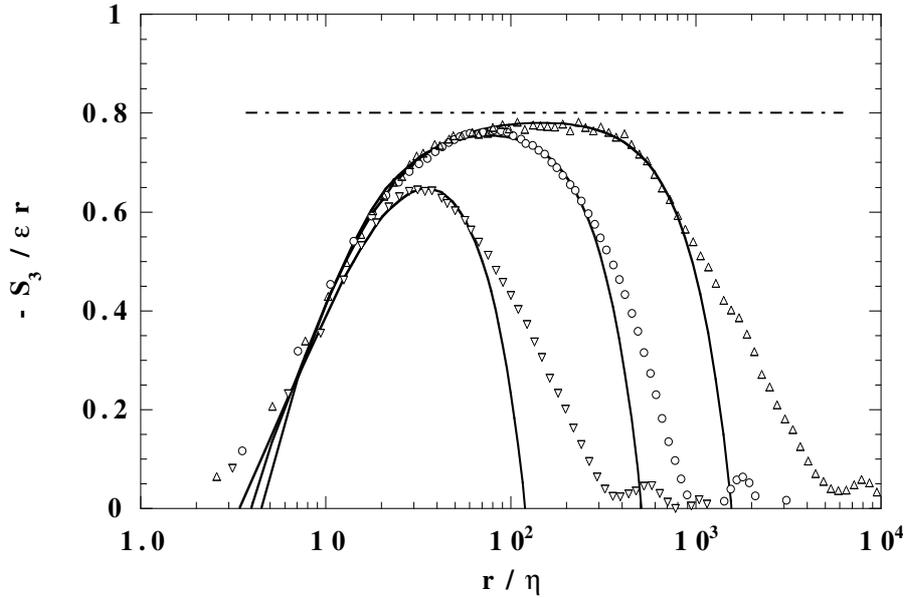


Figure 2: Fonction de Kolmogorov $K(r) = -S_3/\epsilon r$ tracée en fonction de l'échelle r/η , pour différentes valeurs de R_λ . ∇ : $R_\lambda=120$; \circ : $R_\lambda=300$; \triangle : $R_\lambda=1170$.

courbes de $K(r)$ pour différents R_λ . Les lignes pleines représentent les ajustements déterminés à partir de l'Eq. (1). À R_λ croissant, $K(r)$ tend à former un plateau dans le domaine inertiel, en accord avec la "loi des 4/5" de Kolmogorov. Cependant, nous constatons que cette tendance est très lente : En deçà de $R_\lambda \sim 1000$ (ce qui est le cas de la plupart des expériences de turbulence), il n'apparaît pas véritablement de domaine inertiel en ce qui concerne la fonction de structure d'ordre 3.

Il est possible de caractériser la tendance vers le régime des 4/5 à partir de l'équation de Kolmogorov, en déterminant la valeur maximale atteinte par $K(r)$. Pour des échelles r du domaine inertiel (c'est-à-dire telles que $\eta \ll r \ll L_f$), nous pouvons faire l'approximation $S_2(r) = c_0(\epsilon r)^{2/3}$, où $c_0 \simeq 2$, ce qui permet d'écrire la fonction de Kolmogorov sous la forme :

$$K(r) = \frac{4}{5} - 4c_0 \left(\frac{r}{\eta}\right)^{-4/3} - \frac{2}{7} R_\lambda^{-3} \left(\frac{r}{\eta}\right)^2. \quad (3)$$

On en déduit alors le maximum K_{max} de $K(r)$ en fonction de R_λ , ainsi que l'échelle de ce maximum que nous notons l_s :

$$K_{max} = \frac{4}{5} \left(1 - \left(\frac{R_\lambda}{R_{\lambda 0}}\right)^{-6/5}\right), \quad l_s \simeq L_f R_\lambda^{-3/5}. \quad (4)$$

où le paramètre libre $R_{\lambda 0} \simeq 30$ est déterminé expérimentalement par un ajustement des maxima de la fonction de Kolmogorov. Ce paramètre représente une limite inférieure à la description que nous proposons, en deçà de laquelle les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie ne peuvent évidemment plus s'appliquer.

L'échelle de longueur l_s que nous venons d'introduire se trouve être d'une grande importance pour la description de la statistique des fluctuations de vitesse, et nous allons en donner

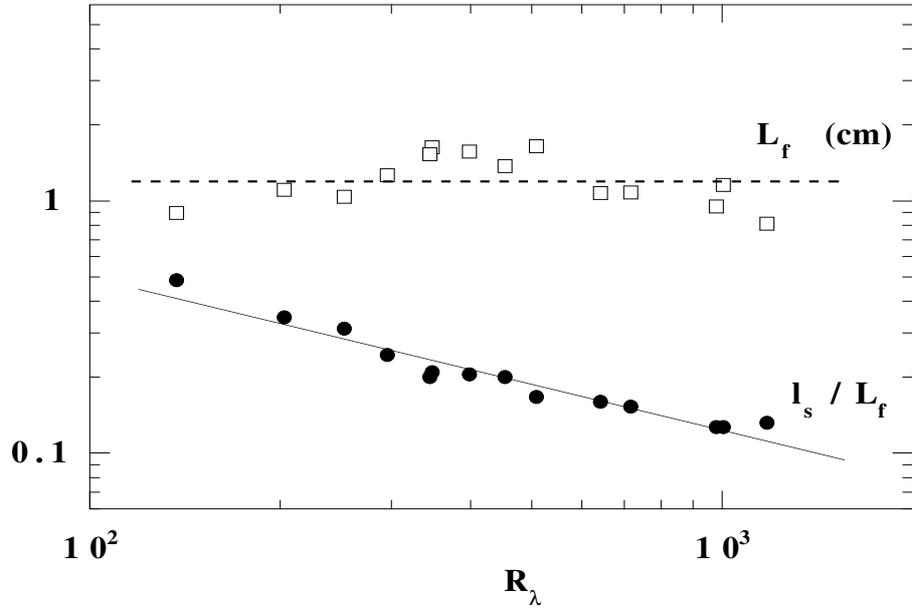


Figure 3: Echelle L_f de forçage, et rapport l_s/L_f , où l_s est défini par la position du maximum de $K(r)$, en fonction du nombre de Reynolds microéchelle R_λ . La droite montre un ajustement en loi de puissance d'exposant -0.57 ± 0.04

une interprétation physique. Tracée en fonction de R_λ sur la figure 3, l_s montre clairement un comportement en loi de puissance de la forme :

$$l_s = (7.1 \pm 0.6)L_f R_\lambda^{-0.57 \pm 0.04}. \quad (5)$$

Cet exposant est en très bon accord avec le maximum de $K(r)$ tel que décrit par l'Eq. (3). Cette nouvelle échelle de longueur a reçu récemment une interprétation (Novikov, [6]) comme échelle caractéristique des corrélations de vorticité – on peut montrer simplement que la définition que nous en donnons à partir de fonctions de structures longitudinales coïncide avec celle décrite par Novikov. Dans cette analyse, l'échelle l_s provient de l'équilibre entre la corrélation de vorticité à petite échelle, due à la viscosité, et le forçage à grande échelle. Ce lien suggère donc l'étude de cette échelle en terme de structures de vorticité.

De nombreuses études précédentes, tant numériques qu'expérimentales (voir par exemple [7, 8]), ont montré l'existence de structures à l'échelle dissipative, des vortex intenses appelés vermisses. Nous avons proposé une méthode pour détecter ces structures, basée sur un seuillage des gradients longitudinaux de vitesse. En modélisant l'impact d'un vortex intense sur une sonde, sensible aux fluctuations longitudinales de vitesse, nous pouvons en déduire les principales caractéristiques de ces structures : Leur rayon est de l'ordre de 3η , et leur vitesse périphérique de l'ordre des fluctuations typiques à grande échelle u' . Ces observations sont en très bon accord avec les simulations numériques. Ces objets décrivent les  v nements rares et intenses des gradients de vitesse, bien que jouant a priori un rôle négligeable du point de vue de la dissipation moyenne d'énergie (mesurée par l'écart-type de ces fluctuations, et donc insensible aux  v nements rares).

Une étude détaillée des temps d'attente entre deux vermisses successifs montre une loi de distribution bimodale :   temps long, ce temps d'attente suit une loi exponentielle,

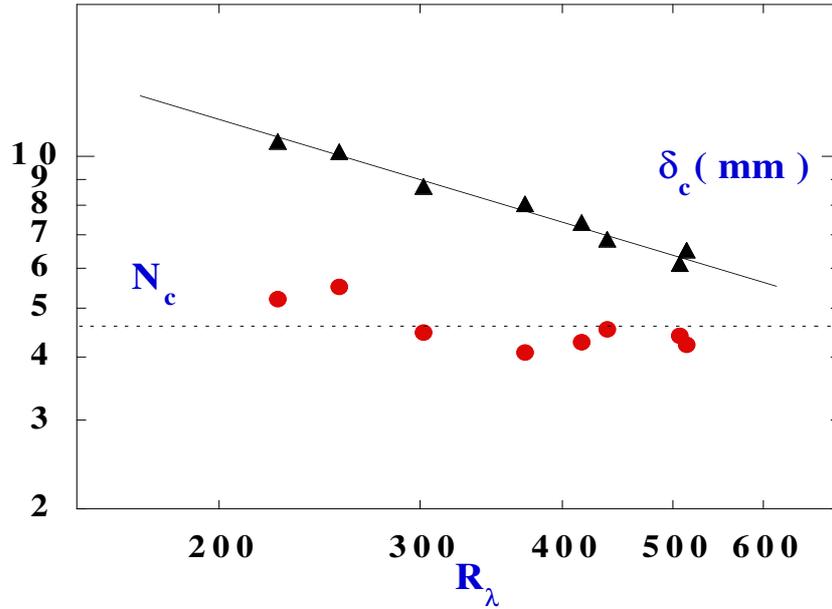


Figure 4: Taille moyenne δ_c et densité moyenne N_c (normalisée par la fréquence de rotation des disques) des amas de vermisseaux, en fonction de R_λ . La ligne continue montre un ajustement par une loi de puissance, d'exposant -0.70 ± 0.10 .

caractéristique d'événements statistiquement indépendants, alors qu'à temps court on observe une grande occurrence d'événements rapprochés. Cette observation suggère que les vermisseaux ainsi détectés apparaissent (pour 50 % d'entre eux environ) groupés en amas. Une méthode pour mesurer l'extension de ces amas est décrite en [9], et consiste à identifier sur le signal de vitesse une portion continue d'intense activité (en terme de dissipation locale). La figure 4 montre l'évolution de la taille des amas ainsi définis en fonction de R_λ , ainsi que de leur fréquence N_c , normalisée par la fréquence de rotation des disques. Là encore, on observe que la taille des amas suit une loi de puissance,

$$\delta_c \sim R_\lambda^{-0.70 \pm 0.10}, \quad (6)$$

dont l'exposant est très proche de la valeur $-3/5$ discutée plus haut. Cette observation fournit donc une interprétation physique de l'échelle l_s observée sur la fonction de Kolmogorov : aux échelles inférieures $r < l_s$, le signal présente une cohérence interne, en accord avec la diffusion de corrélation de vorticité introduite par Novikov [6], alors qu'aux échelles supérieures $r > l_s$, on retrouve des événements statistiquement indépendants. Il apparaît donc naturel que l'extension de ces amas de vermisseaux soit contrôlée par cette échelle d'équilibre intermédiaire.

Pour conclure, nous avons effectué une vérification extrêmement précise d'une relation fondamentale de la turbulence développée, grâce à l'utilisation de l'hélium à basse température, permettant de couvrir une importante gamme de nombres de Reynolds dans des conditions contrôlées. Nous avons mis en évidence une tendance vers le régime asymptotique de Kolmogorov dans la limite des grands nombres de Reynolds. Il apparaît que l'observation d'un tel régime nécessite des nombre de Reynolds extrêmement élevés, en général non atteints dans la plupart des expériences en laboratoire (notons cependant que la loi en $k^{-5/3}$ du spectre d'énergie est très bien vérifiée, même à des nombres de Reynolds modérés). De plus, nous avons observé expérimentalement, pour la première fois, une échelle caractéristique des corrélations de vorticité, à partir de mesures longitudinales en un point. Nous proposons une interprétation de

cette échelle en terme d'amas de vermisseaux, définissant des zones d'intense activité dans le signal. Ainsi, une description en terme de structures peut venir compléter l'image statistique des représentations usuelles de la turbulence.

Remerciements :

Nous tenons à remercier I. Proccacia, E. Siggia, E.A. Novikov, A. Tsinober, Y. Couder, S. Douady, B. Andreotti et J. Paret pour de nombreuses discussions sur ce travail.

References

- [1] A.N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **32**, 1, (1941) [Proc. R. Soc. Lond. A **434**, 15 (1991)].
- [2] F. Moisy, P. Tabeling, H. Willaime, Phys Rev Lett. (1999) (à paraître).
- [3] U. Frisch, *Turbulence* (Cambridge University Press, 1995).
- [4] E.A. Novikov, Zh. Eksp. Theor. Fiz. **47**, 1919 (1964) [Sov. Phys. JETP **20**, 1290 (1965)].
- [5] K.R. Sreenivasan and B. Dhruva, Prog. Theor. Phys. **130**, 103 (1998).
- [6] E.A. Novikov, Phys. Rev. Lett. **71**, 17 (1993).
- [7] J. Jimenez, A. Wray, J. Fluid. Mech. **373**, 255 (1998).
- [8] F. Belin, J. Maurer, P. Tabeling and H. Willaime, J. Phys. II France **6**, 1 (1996).
- [9] F. Belin, F. Moisy, P. Tabeling and H. Willaime, *Trends in Mathematics, Fundamental problematic issues in turbulence* (à paraître).