

# Estimation des corrections non-linéaires dans la méthode FS-SS de mesure optique de la surface d'un liquide transparent

Marc Rabaud<sup>1</sup>, Frédéric Moisy<sup>1</sup>

1. Lab FAST, Univ Paris-Sud, UPMC Univ Paris 6, Bât 502, Campus Universitaire, 91405 ORSAY

## Résumé :

La méthode « Free-Surface Synthetic Schlieren », que nous avons introduite récemment [1], permet de mesurer la déformation de la surface libre d'un liquide transparent avec une grande sensibilité. Cette méthode repose sur trois approximations linéaires, qui peuvent constituer des limitations importantes dans certaines situations pratiques : caméra supposée loin de l'interface, faibles déformations de l'interface et faibles pentes. Nous présentons ici les résultats de simulations numériques du champ de déplacement apparent induit par la réfraction à travers une surface déformée par une onde plane. La comparaison entre la surface imposée et la surface reconstruite par la méthode FS-SS linéaire permet de quantifier les erreurs induites par chacune de trois approximations linéaires.

## Abstract :

Free-Surface Synthetic Schlieren (FS-SS) is an optical method developed for the measurement of the instantaneous topography of the interface between two transparent fluids [1]. This method relies upon three linear approximations, which may represent a major limitation in practical applications : camera located far from the interface, weak surface deformations and weak slopes. We present here results from numerical simulations of the apparent displacement field induced by refraction through a surface deformed by a plane wave field. The comparison between the prescribed surface and the reconstructed surface based on linear FS-SS allows us to provide quantitative measurements of the errors induced by the linear approximations.

**Mots clefs :** Synthétique Schlieren ; PIV ; Topographie

## 1 Introduction

Les progrès récents des méthodes de corrélation d'images, couplés à l'augmentation continue des puissances de calcul, ont permis de concevoir et de développer de nouvelles méthodes de mesure qui sont en train de révolutionner la mécanique expérimentale. On peut citer par exemple les mesures de champ de vitesse par PIV (Particles Image Velocimetry) [2] pour la mécanique des fluides et les méthodes DIC (Digital Image Correlation) de mesure des champs de déformations de matériaux sous contraintes [3] pour la mécanique des solides.

Dans de nombreuses expériences il est important de pouvoir mesurer la forme et la dynamique de la surface d'un liquide. Un certain nombre de méthodes nouvelles sont apparues ces dernières années, issues de la profilométrie par projection de franges [4], ou de la mesure du déplacement apparent de motifs aléatoires (mouchetis) [5, 6]. Nous avons récemment présenté en détail le potentiel de cette méthode que nous avons nommée Free Surface Synthetic Schlieren (FS-SS) [1], qui permet de mesurer avec une excellente résolution (de l'ordre du micromètre) les faibles déformations d'une surface liquide transparente. Pour cela un motif aléatoire de points est observé à travers la surface déformée. Le champ de déplacement apparent des points est obtenu par corrélation des images obtenues lorsque l'interface est plate ou déformée. Nous avons montré que, dans le cadre d'approximations linéaires,

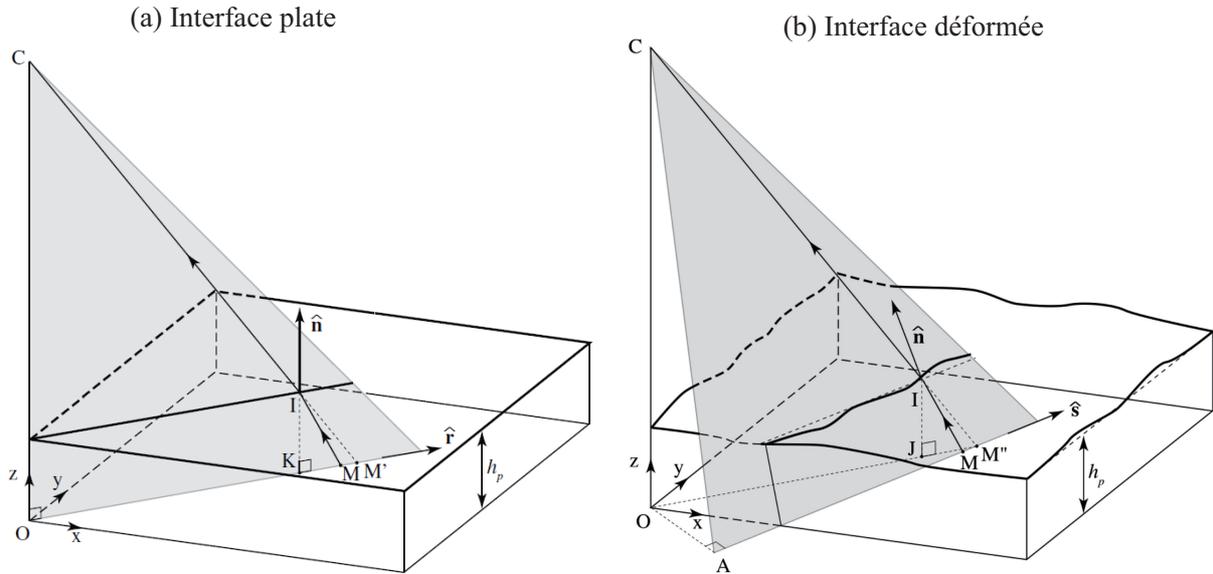


FIGURE 1 – Géométrie du rayon émis du point objet  $M$  et parvenant à la caméra  $C$  après réfraction à travers la surface libre plate ou déformée. (a) Cas de l'interface plate : le plan de réfraction  $COM$  est radial et contient l'axe optique. (b) Cas de l'interface déformée : le plan de réfraction  $CAM$ , qui doit contenir la normale  $\hat{\mathbf{n}}$  à l'interface, est maintenant incliné, et ne contient plus l'axe optique. Le point objet  $M$  donne lieu au point objet virtuel  $M'$  dans le cas (a), et  $M''$  dans le cas (b). Le déplacement apparent, tel que mesuré par corrélation d'images, est  $\delta \mathbf{r} = \mathbf{M}'\mathbf{M}''$ .

ce champ de déplacement  $\delta \mathbf{r}(x, y, t)$  est proportionnel au gradient de hauteur  $\nabla h(x, y, t)$ , et qu'une méthode d'intégration au sens des moindres carrés permet de reconstruire la hauteur  $h(x, y, t)$ .

L'influence des non-linéarités est difficile à estimer a priori dans ce problème. Dans cet article, en partant d'une déformée de surface imposée (une onde plane), nous calculons le déplacement apparent sans approximation linéaire. En intégrant ce champ dans le cadre des approximations linéaires, il est possible de comparer le champ prescrit et le champ reconstruit, et ainsi de quantifier les erreurs et de contrôler empiriquement les limites de validité de l'approximation linéaire.

## 2 Formulation optique et approximation linéaire

La figure 1 présente la géométrie des rayons lumineux émis du motif de points aléatoires, en  $z = 0$ , et collectés par la caméra au point  $C$  (approximation dite de caméra *pin-hole*), après réfraction à travers la surface libre. Nous nous restreignons ici au cas d'une caméra située au-dessus de l'interface, à une distance  $OC = H$  du motif de points disposé au fond du récipient (d'autres configurations sont toutefois possibles [1]).

La formulation optique du problème consiste, pour chaque point objet  $M$  du motif, à comparer la position des deux objets virtuels associés  $M'$  et  $M''$ , obtenus lorsque l'interface est respectivement plate et déformée. La difficulté du problème provient du fait que, dans le cas de l'interface déformée, le plan d'incidence ne contient pas l'axe optique  $OC$  (figure 1b). En effet, ce plan d'incidence est défini comme le plan contenant la caméra  $C$  ainsi que la normale à l'interface  $\hat{\mathbf{n}}$  évalué au point d'intersection  $I$ , qui est tel que le rayon  $M \rightarrow I \rightarrow C$  satisfait la loi de la réfraction de Snell-Descartes. Ainsi, étant connus les points  $M$  et  $C$ , la détermination du point d'intersection  $I$  constitue un problème non-linéaire 3D assez délicat dans le cas général.

Dans la suite, on se restreint au cas où l'interface liquide est une onde plane, décrite par

$$h(x, y) = h_0 + A \cos(2\pi x/\lambda). \quad (1)$$

Le problème optique est alors caractérisé par 5 longueurs : la distance caméra-motif  $H$ , la taille du champ observé (supposée ici carrée, de côté  $L$ ), la profondeur moyenne de liquide  $h_0$ , l'amplitude de l'onde  $A$ , et sa longueur d'onde  $\lambda$ . Une sixième longueur intervient pour la reconstruction de la hauteur : il s'agit de la taille des fenêtres d'interrogation utilisées dans l'algorithme de corrélation d'images.

La relation entre la surface  $h(x, y)$  et le déplacement apparent  $\delta \mathbf{r}$  dépend en général des 5 nombres dans dimension pouvant être construits sur ces 6 longueurs. Une linéarisation du problème est possible lorsque les 3 conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) Angle de parallaxe négligeable,  $\beta = L/(\sqrt{2}H) \ll 1$  (approximation de Gauss) ;
- (ii) Faible pente de l'interface,  $\xi = 2\pi A/\lambda \ll 1$  ;
- (iii) Amplitude de déformation petite comparée à la distance surface - motif,  $A/h_0 \ll 1$ .

Dans ce cas, nous avons montré dans la Ref. [1] que la relation hauteur-déplacement pouvait s'écrire simplement,

$$\nabla h = - \left( \frac{n}{(n-1)h_0} - \frac{1}{H} \right) \delta \mathbf{r}, \quad (2)$$

où  $n$  est l'indice optique du liquide. Il est alors possible de reconstruire, à l'aide d'un algorithme d'inversion au sens des moindres carrés, la hauteur  $h(x, y)$  à partir du déplacement mesuré  $\delta \mathbf{r}(x, y)$ . En revanche, l'utilisation de la relation linéaire (2) lorsque l'une au moins des 3 conditions ci-dessus n'est pas satisfaite conduit à une erreur sur la surface reconstruite, que nous allons caractériser dans la suite.

Il faut noter ici que la mesure expérimentale du champ de déplacement  $\delta \mathbf{r}(x, y)$  nécessite en outre que la courbure de l'interface ne conduise pas à des croisements de rayons lumineux, c'est-à-dire à la formation de caustiques. En effet, si la distance focale associée aux lentilles formées par les parties convexes des ondes devient inférieure à la profondeur d'eau  $h_0$ , il y a croisement des rayons, conduisant à un ensemble de points  $M''$  non continûment reliés aux points  $M'$ , et donc à un déplacement non mesurable par corrélation d'images. Cette condition n'affecte pas directement la relation linéaire (2), mais impose toutefois une condition supplémentaire liée aux conditions (ii) et (iii) : il faut en effet satisfaire  $Ah_0 \ll \lambda^2$  (ou, de façon équivalente,  $\xi \ll \lambda/h_0$ ), ce qui ne pose de problème en pratique que pour des grandes profondeurs  $h_0$ .

### 3 Simulations non-linéaires

#### 3.1 Principe

Nous avons réalisé une série de simulations numériques du problème optique, afin d'évaluer l'amplitude des erreurs commises dans l'approximation linéaire (2). Le protocole est le suivant :

- (i) On part d'un ensemble de points  $M'$ , répartis sur une grille homogène. On choisit une grille de taille  $128 \times 128$ , typique des applications pratiques (e.g. fenêtres d'interrogation de 16 pixels avec un recouvrement de 50 % et une caméra de  $2048^2$  pixels).
- (ii) Par application de la loi de Snell-Descartes pour la surface plate, on en déduit la grille des points objet  $M$  dont sont issus les objets virtuels  $M'$ . Cette étape est simple, car le plan d'incidence est purement radial dans ce cas (figure 1a).
- (iii) On calcule la position des points  $M''$ , objets virtuels associés aux points  $M$  par réfraction à travers l'interface déformée prescrite (1). Cette étape est la plus délicate, car le plan d'incidence n'est plus radial. En pratique, on détermine la position du point d'intersection  $I$  en minimisant le temps de parcours du rayon lumineux  $M \rightarrow I \rightarrow C$ , donné par  $\tau = nMI + IC$  (dans un système d'unité tel que  $c = 1$ ). Cette détermination est effectuée par une optimisation non-linéaire basée sur la méthode du simplexe de Nelder-Mead (implémentée dans la fonction `fminsearch` de Matlab).
- (iv) A partir des grilles de points  $M'$  et  $M''$  issues d'un même objet  $M$ , on en déduit le champ de déplacement  $\delta \mathbf{r} = \mathbf{M}'\mathbf{M}''$  en tout point de la grille initiale  $M'$ .

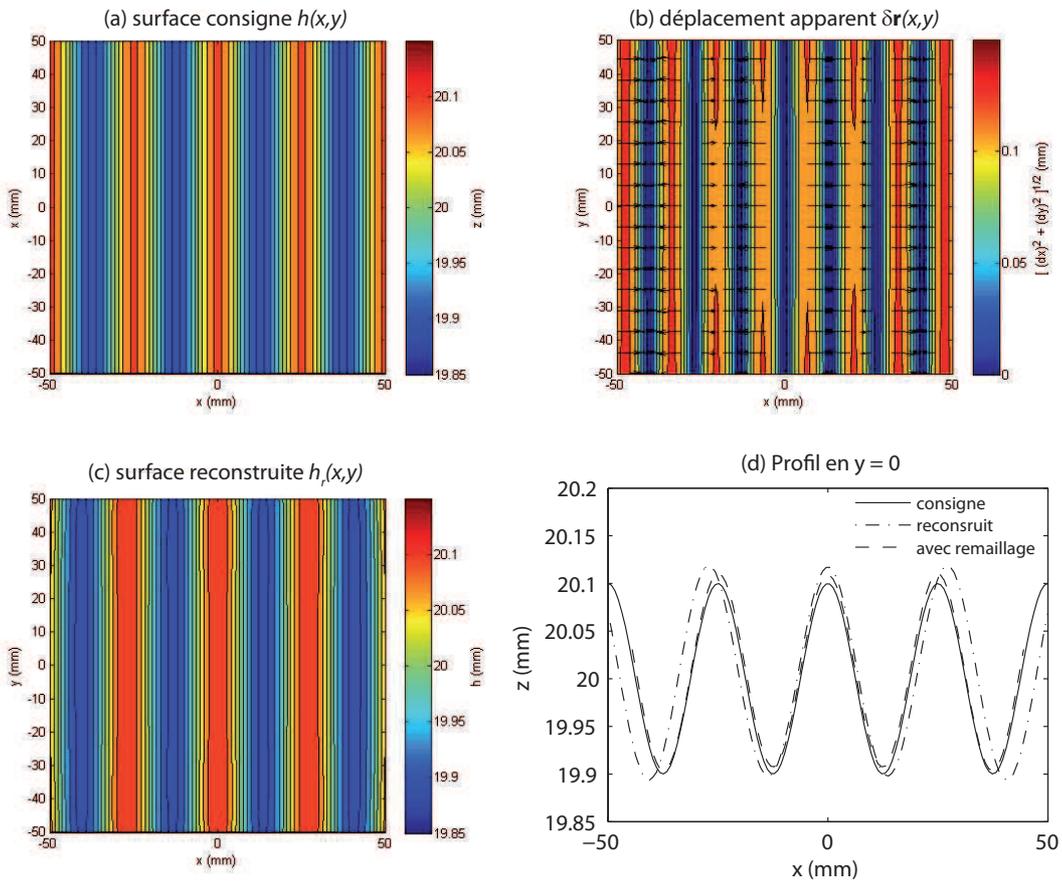


FIGURE 2 – Illustration de l’effet de parallaxe, ici dans une situation de très forte distorsion (caméra distante de  $H = 25$  cm, parallaxe  $\beta = L/(\sqrt{2}H) \simeq 0.28$ ). (a) Surface prescrite  $h(x,y)$ , avec  $A = 0.1$  mm,  $h_0 = 20$  mm,  $\lambda = 25$  mm,  $L = 100$  mm. (b) Champ de déplacement apparent  $\delta\mathbf{r}(x,y)$ . (c) Surface reconstruite  $h_r(x,y)$  par méthode FS-SS linéaire. (d) Profils de hauteur en fonction de  $x$ , pour  $y = 0$  mm, avec ou sans compensation de l’effet de parallaxe (remaillage).

- (v) On intègre ce champ de déplacement pour reconstruire l’interface déformée  $h_r(x,y)$ , par application de la loi d’inversion linéarisée (2).

Il est alors possible d’estimer l’erreur entre la hauteur prescrite  $h$  et la hauteur reconstruite  $h_r$ . Cette erreur est définie par :

$$\epsilon_{rms} = \frac{\langle (h - h_r)^2 \rangle^{1/2}}{A},$$

où  $\langle \cdot \rangle$  représente une moyenne spatiale sur tout le champ. A noter que cette définition n’est sensible qu’aux variations de  $h_r$ , et pas à sa valeur moyenne. En effet, la surface étant reconstruite par intégration, la hauteur moyenne est une constante d’intégration qui n’est pas accessible à partir de la seule donnée du champ de déplacement.

Une source d’erreur importante de la méthode de reconstruction provient de la projection associée à l’angle de parallaxe. En effet, le déplacement mesuré  $\delta\mathbf{r}$  ne se situe pas à la verticale du point  $I$  correspondant au gradient  $\nabla h$  auquel il est associé. Il est possible cependant de corriger cet effet connaissant la position du centre optique, en appliquant dans l’étape (v) une homothétie (ou remaillage) du champ de déplacement avant l’intégration. Dans la suite, nous comparons la reconstruction effectuée avec ou sans ce remaillage.

## 3.2 Résultats

Nous examinons dans un premier temps l'influence de la distance  $H$  entre la caméra et le motif de points. La configuration de référence choisie est caractéristique d'expériences réalistes en laboratoire : une hauteur  $h_0 = 20$  mm d'eau contenue dans la cuve et une zone d'observation de section carrée de largeur  $L = 10$  cm. L'onde plane (1) est choisie de longueur d'onde fixe  $\lambda = 25$  mm (soit 4 longueurs d'onde dans la cuve), et d'amplitude  $A = 0.1$  mm.

La figure 2 illustre clairement l'influence d'un angle de parallaxe trop grand (ici pour  $H = 25$  cm seulement, soit du même ordre que la taille du champ de mesure,  $L = 10$  cm). On voit que les déplacements  $\delta\mathbf{r}$  acquièrent une composante supplémentaire non perpendiculaire au front d'onde loin du centre optique, conduisant à un profil reconstruit  $h_r(x, y)$  déformé sur les bords de l'image. Le profil de hauteur reconstruit, mesuré sur la ligne centrale  $y = 0$  (figure 2d), illustre deux effets systématiques associés à cette distorsion de parallaxe : une augmentation de l'amplitude reconstruite sur les bords, et un décalage vers l'extérieur des extrema de hauteur, conduisant à une sur-estimation de la longueur d'onde mesurée. On constate que pour une telle distorsion, la correction de parallaxe par transformation homothétique du champ améliore considérablement les résultats : la position des maxima coïncide très bien la surface consigne, et l'amplitude mesurée coïncide à mieux que 3 % avec l'amplitude consigne.

La figure 3(a) montre la variation de l'erreur relative en fonction de l'angle de parallaxe, pour une onde de longueur d'onde fixée,  $\lambda = 25$  mm, et une amplitude comprise entre  $A = 0.01$  mm et 2 mm (au-delà de 2 mm, la courbure importante de l'onde conduit à la formation de caustiques pour la valeur de profondeur considérée ici,  $h_0 = 20$  mm). Globalement, l'erreur diminue comme attendu avec l'éloignement de la caméra, et sature à une valeur qui dépend de l'amplitude. Cette valeur de saturation provient des autres sources de non-linéarité (amplitude et pente faibles). Il apparaît que la correction de parallaxe permet d'améliorer la qualité de la reconstruction jusqu'à un facteur 10 pour des angles de parallaxe de l'ordre de 0.1. Pour un champ de taille  $L = 10$  cm, une caméra distante d'au moins 1 m permet une reconstruction de l'interface avec une précision de l'ordre de 1 %, ce qui est très satisfaisant en pratique.

Si une faible profondeur d'eau permet de minimiser les effets de parallaxe, cela induit en revanche une limitation concernant l'hypothèse de faible déformation  $A/h_0 \ll 1$ , également utilisée dans la dérivation de la loi linéaire (2). Cet effet est illustré sur la figure 3(b), représentant l'erreur relative en fonction de la pente pour différentes profondeurs  $h_0$ . Il est clair ici que, tant que l'angle de parallaxe reste négligeable (ici on a choisi une caméra distante de  $H = 2$  m), augmenter la profondeur d'eau  $h_0$  améliore maintenant la qualité de la reconstruction. Ici, une reconstruction de l'ordre de 1 % est obtenue pour une profondeur de l'ordre  $h_0 = 20$  mm, grande comparée à l'amplitude de l'onde considérée (A noter que les oscillations présentes sur les courbes sont liées à un effet de nombre fini de longueurs d'onde : à amplitude  $A$  fixée, les faibles pentes sont obtenues lorsque la longueur d'onde devient de l'ordre de la taille du champ).

## 4 Conclusion

Dans cet article nous avons quantifié les erreurs commises dans la reconstruction de la hauteur d'une interface fluide dans la méthode FS-SS dans le cadre des approximations linéaires : caméra loin, ondes de faible amplitude et faible pente de l'interface. Etant donné qu'il n'existe pas à ce jour de méthode générale de reconstruction basée sur le problème optique non-linéaire complet, il est important de connaître précisément l'incertitude générée par ces approximations linéaires. La mesure expérimentale du champ de déplacement  $\delta\mathbf{r}(x, y)$  par méthode de corrélation d'images étant effectuée avec une précision de l'ordre de 1 %, il est important de connaître en particulier les paramètres géométriques pour lesquels l'erreur de reconstruction est d'au plus 1 %. Nous montrons ici qu'à condition de prendre en compte un remaillage homothétique du champ de déplacement mesuré, destiné à compenser les effets de distorsion liés à la parallaxe, une très bonne qualité de reconstruction peut être obtenue dans le cadre de cette approximation linéaire.

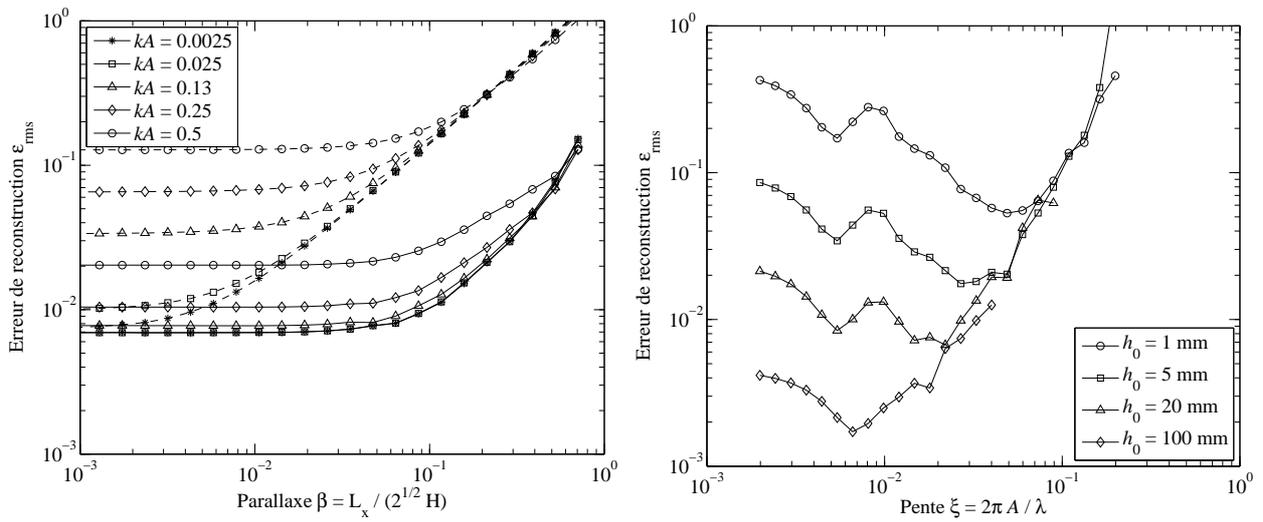


FIGURE 3 – (a) Erreur relative entre l'interface prescrite  $h(x, y)$  et l'interface reconstruite  $h_r(x, y)$  selon l'approximation linéaire pour différentes pentes  $\xi = kA = 2\pi A/\lambda$  en fonction de l'angle de parallaxe  $\beta$ . Les courbes pointillées sont obtenues sans la correction de parallaxe, et les courbes pleines avec la correction. Simulations effectuées pour une zone d'observation de côté  $L = 10$  cm, une onde de longueur d'onde  $\lambda = 25$  mm, une épaisseur d'eau moyenne de  $h_0 = 20$  mm. (b) Erreur relative avec correction de parallaxe, en fonction de la pente de l'interface pour différentes profondeurs d'eau  $h_0$ . Simulations effectuées pour une cuve de côté  $L = 10$  cm, une distance caméra-motif  $H = 2$  m, une amplitude  $A = 0.1$  mm, et une longueur d'onde  $\lambda$  variant entre 3 et 100 mm.

## Références

- [1] F. Moisy, M. Rabaud & K. Salsac, 2009, A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface, *Exp. Fluids* **46**, 1021-1036.
- [2] R.J. Adrian, 1991, Particle-image techniques for experimental fluid mechanics, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23**, 261–364.
- [3] F. Hild & S. Roux, 2006, Digital Image Correlation : from Displacement Measurement to Identification of Elastic Properties – a review, *Strain* **42**, 69-80.
- [4] P. Cobelli, A. Maurel, V. Pagneux & P. Petitjeans, 2009, Global measurement of water waves by Fourier transform profilometry, *Exp. in Fluids*, **46**, 1037-1047.
- [5] A. Fouras, D. Lo Jacono, G.J. Sheard & K. Hourigan, 2008, Measurement of instantaneous velocity and surface topography in the wake of a cylinder at low Reynolds number, *J. Fluids and Structures* **24**, 1271-1277.
- [6] S.B. Dalziel, G.O. Hughes & B.R. Sutherland, 2000, Whole-field density measurements by 'synthetic schlieren', *Exp. Fluids* **28**, 322-335.